Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*
Oddelek za matematiko

Matematika – 3. stopnja

Nina Ružić

KOPULE IN ODVISNOST SLUČAJNIH SPREMENLJIVK

Doktorska disertacija

Mentor: prof. dr. Matjaž Omladič

Ljubljana, 2015

Podpisana Nina Ružić izjavljam, da sem doktorsko disertacijo z naslovom *Kopule in odvisnost slučajnih spremenljivk* izdelala samostojno pod mentorstvom prof. dr. Matjaža Omladiča. Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani dovoljujem objavo elektronske oblike doktorske disertacije na njenih spletnih straneh.

Ljubljana, 16. marec 2015

Zahvala

Zahvaljujem se mentorju Matjažu Omladiču tako za ideje in nasvete pri raziskovalnem delu kot tudi za potrpežljivost ter vzpodbudo v časih, ko se je zataknilo in sem mu skušala dokazati, da se doktorirati ne da.

Hvala staršema, ker nista le mama in tata, ampak tudi Geni in Davor. Hvala Markotu, ker je bil moj navijač, skrbel zame v stresnih obdobjih in prebral celo disertacijo brez razlike, tudi zvezdice in pike.

Zahvala za podporo in mnoge zabavne trenutke gre tudi kolegom ter prijateljem, še posebej mojim štirim. Hvala Katarini, ker je na moji strani že od sedmega leta. Hvala Maši, ki me vse od petnajstega leta spravlja tako v smeh kot tudi ob živce. Hvala Ajdi za vse maratonske in hitre kave, ki se vrstijo že od šestnajstega leta. Hvala Iri, ker z mano vse od dvajsetega leta debatira o bolj ali manj pomembnih problemih in dilemah.

Disertacijo posvečam Gordanu in didi, ker sta načrtovala moj doktorat, ko jaz nanj nisem še niti pomislila.

Povzetek

Eden izmed možnih načinov modeliranja odvisnosti slučajnih spremenljivk vodi preko kopul, ki na ravni porazdelitvenih funkcij združujejo enorazsežne porazdelitve v večrazsežne. V doktorski disertaciji definiramo novo družino dvorazsežnih kopul, imenovano *maksmin kopule*, ki prav tako kot Marshallove izhajajo iz verjetnostnega modela za življenjsko dobo dvokomponentnega sistema, na katerega delujejo udari.

Na sistem s komponentama A in B naj delujejo udari treh vrst. Prva vrsta udara vpliva le na komponento A, druga vrsta le na komponento B, tretja vrsta udara pa deluje na obe komponenti hkrati. Čase udarov zaporedoma označimo s slučajnimi spremenljivkami X, Y in Z ter za njih predpostavimo, da so med seboj neodvisne. Življenjski dobi komponent A in B označimo z U oziroma z V. Ker vsaka izmed komponent preneha delovati ob prvem udaru nanjo, je $U = \min\{X, Z\}$ in $V = \min\{Y, Z\}$. Porazdelitev (U, V) modelira Marshallova kopula. Marshall v članku [33] navede in dokaže izrek, ki karakterizira to družino kopul. V disertaciji pokažemo, da je za veljavnost izreka potrebno dodati še nekaj tehničnih predpostavk, ob tem pa dokažemo tudi močnejšo različico tega izreka. Če za čase udarov predpostavimo eksponentne porazdelitve, dobimo bolj znane Marshall-Olkinove kopule.

Verjetnostni model Marshallovih kopul spremenimo tako, da dopuščamo možnost obnovitve komponente A, medtem ko ostanejo lastnosti komponente B in treh vrst udarov nespremenjene. To si lahko predstavljamo tudi tako, da imamo na razpolago dodatni primerek komponente A. Življenjska doba $V = \min\{Y, Z\}$ komponente B ostane nespremenjena, medtem ko je $U = \max\{X, Z\}$, saj komponenta A preneha delovati šele ob obeh udarih nanjo. Želimo poiskati slučajnima spremenljivkama U in V pripadajočo kopulo. V ta namen vpeljemo maksmin kopule, ki rešijo opisani problem. V disertaciji karakteriziramo družino maksmin kopul, raziščemo njihove lastnosti in navedemo primere.

Math. Subj. Class. (2010): 60E05, 62H05, 62E15, 62E10.

Ključne besede: kopula, odvisnost slučajnih spremenljivk, analiza preživetja, Marshallova kopula, Marshall-Olkinova kopula, porazdelitvena funkcija.

Abstract

Copulas are one of the main tools in modelling the dependence of random variables. They join univariate distributions into the multivariate ones on the level of distribution functions. In the thesis, we define a new family of two-dimensional copulas, called *maxmin copulas*, which are typically applied to model the lifetime of a two-component system where components are subject to shocks, similarly as Marshall copulas.

Consider a system with components A and B which are subject to three different types of shocks. The first one is fatal for Component A only, the second one for Component B only, and the third type of shock affects both components simultaneously. The independent times of occurrences of three types of shocks are denoted respectively by X, Y and Z. Let U, respectively V, denote the lifetime of Component A, respectively Component B. Observe that $U = \min\{X, Z\}$ and $V = \min\{Y, Z\}$. The distribution of (U, V) is modelled by Marshall copula. In the paper [33], Marshall proves a theorem that characterizes this family of copulas. In the thesis, we show that additional technical assumptions are needed, and we also prove a stronger version of this theorem. If we assume that occurences of shocks are distributed exponentially, we get well-known Marshall-Olkin copulas.

We modify the above probabilistic model by allowing Component A to have a recovery option, while Component B is behaving as before. Imagine, for example, that we have an additional copy of Component A. The lifetime of Component B is still expressed as $V = \min\{Y, Z\}$, while the lifetime of Component A becomes $U = \max\{X, Z\}$, since it is eliminated only by both types of shocks. It is our main goal to find a copula that models the lifetimes of these components. We give a full study of the augmented case by introducing maxmin copulas, which solve the described problem. In the thesis, we characterize maxmin copulas, study their properties, and give examples.

Math. Subj. Class. (2010): 60E05, 62H05, 62E15, 62E10.

Keywords: copula, dependence of random variables, survival analysis, Marshall copula, Marshall-Olkin copula, distribution function.

Kazalo

Poglavje 1

Uvod

Če poznamo skupno porazdelitev slučajnega vektorja, so robne porazdelitve njegovih komponent enolično določene. Po drugi strani lahko porazdelitvi dveh slučajnih spremenljivk združimo v skupno porazdelitev slučajnega vektorja na številne načine. Slučajne spremenljivke so lahko med seboj odvisne na nešteto načinov in odkrivanje le-teh je temeljni problem verjetnosti. Eno izmed glavnih orodij za modeliranje odvisnosti so kopule, ki na ravni porazdelitvenih funkcij združujejo enorazsežne porazdelitve v večrazsežne.

Dvorazsežna kopula je funkcija dveh spremenljivk $C\colon [0,1]\times[0,1] \longrightarrow [0,1]$, za katero je

(i) $C(u,0) = 0$ za vsak $u\in[0,1]$ in $C(0,v) = 0$ za vsak $v\in[0,1]$,

(ii) $C(u,1) = u$ za vsak $u\in[0,1]$ in $C(1,v) = v$ za vsak $v\in[0,1]$,

(iii) $C(u_2,v_2) - C(u_2,v_1) - C(u_1,v_2) + C(u_1,v_1) \geq 0$ za vse $u_1 \leq u_2$ in $v_1 \leq v_2$.

Tretji pogoj lahko interpretiramo kot nenegativnost „ploščine poljubnega pravokotnika $(u_1,u_2]\times(v_1,v_2]$ s funkcijo C“. Definicija n-razsežne kopule $C\colon [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ je neposredna posplošitev definicije dvorazsežne kopule. Tretji pogoj za n-razsežno kopulo pove, da je prostornina poljubnega hiperkvadra v $[0,1]^n$ s funkcijo C nenegativna. Kopule so torej zožitve večrazsežnih porazdelitvenih funkcij, katerih robne enorazsežne porazdelitvene funkcije pripadajo enakomerni zvezni porazdelitvi na intervalu $[0,1]$. Vsaka kopula je enakomerno zvezna in naraščajoča v vsaki spremenljivki posebej.

Naj bo $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ slučajni vektor s skupno porazdelitveno funkcijo H in naj bo F_i porazdelitvena funkcija X_i za vsak $i\in\{1,2,\ldots,n\}$. **Sklarov izrek** pravi, da obstaja taka n-razsežna kopula C, da je

$$H(x_1,x_2,\ldots,x_n) = C(F_1(x_1),F_2(x_2),\ldots,F_n(x_n)) \tag{1.1}$$

za vse $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}$. Kopula C je enolično določena na $\overline{\operatorname{im} F_1}\times\overline{\operatorname{im} F_2}\times\ldots\times\overline{\operatorname{im} F_n}$. Če so torej slučajne spremenljivke $X_1,X_2,\ldots,X_n$ zvezne, tj. so zvezne njihove porazdelitvene funkcije, je C enolično določena. Če je po drugi strani C neka n-razsežna kopula in so $F_1, F_2, \ldots, F_n$ enorazsežne porazdelitvene funkcije, potem je z enačbo (1.1) definirana n-razsežna porazdelitvena funkcija H, katere robne enorazsežne porazdelitvene funkcije so enake $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Če za slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$ velja (1.1), potem imenujemo C slučajnim spremenljivkam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ pripadajoča kopula.

Sklarov izrek razkrije, zakaj se funkcije z lastnostmi (i), (ii) in (iii) imenujejo ravno kopule. Beseda *copula* je izpeljana iz latinske besede za povezavo oziroma vez med dvema stvarema. V Slovarju slovenskega knjižnega jezika najdemo naslednji zapis:

> **kópula** -e ž (ộ) lingv. *pomensko nepopolni glagol, navadno biti, kot del povedka; vez:* poiskati kopule v stavku // *veznik:* kopule: in, pa, ter ◇ filoz. *beseda, ki potrjuje ali zanikuje odnos med osebkom in povedkom*

Tako kot v lingvistiki kopula združuje osebek s povedkom, tako v teoriji verjetnosti kopula združuje enorazsežne porazdelitvene funkcije v večrazsežno. Besedo kopula je v matematiki prvič uporabil Abe Sklar leta 1959 v svojem članku z naslovom *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges* [45], ki vsebuje prej navedeni izrek, kasneje poimenovan po njem.

Funkcije, ki jih sedaj imenujemo kopule, so se ob obravnavi večrazsežnih porazdelitev s fiksnimi enorazsežnimi robnimi porazdelitvami pojavljale v delih Frécheta, Dall'Aglia, Férona in mnogih drugih že pred časom Sklarovega članka. Začetki segajo celo v leto 1940, ko je Wassily Hoeffding v člankih [19, 20] izpeljal tako imenovane *standardizirane porazdelitve* – porazdelitve z nosilcem, ki je vsebovan v $[-1/2, 1/2]^2$ in z enorazsežnima robnima porazdelitvama, ki sta porazdeljeni enakomerno zvezno na $[-1/2, 1/2]$. Če bi Hoeffding torej uporabil „normalizacijo“ glede na $[0,1]^2$ namesto na $[-1/2, 1/2]^2$, bi odkril kopule. Leta 1951 je Maurice René Fréchet neodvisno odkril veliko podobnih rezultatov kot Hoeffding [11]. Leta 1975 sta kopule ponovno odkrila Kimeldorf in Sampson [25], ki sta jih poimenovala *enakomerne reprezentacije*. Galambos [15] in Dehuvels [5] sta kopule leta 1978 poimenovala *funkcije odvisnosti*.

Vrnimo se na Sklarov izrek in orišimo idejo dokaza. Najprej implicitno definiramo funkcijo C na $\operatorname{im} F_1 \times \operatorname{im} F_2 \times \ldots \times \operatorname{im} F_n$ in s tem dobimo enakomerno zvezno funkcijo, ki jo lahko zvezno razširimo do roba. Glavni del dokaza je pokazati, da lahko C razširimo na $[0,1]^n$. To naredimo preko „multilinearne interpolacije“.

Omenili smo že, da se je teorija kopul, kakršno poznamo danes, pričela razvijati leta 1959 s Sklarovim člankom [45]. Isti avtor je obširnejšo razpravo o kopulah objavil šele leta 1973 [46], vendar nobeden izmed teh dveh člankov ne vsebuje dokazov. Dokaz osnovnih lastnosti dvorazsežnih kopul in Sklarovega izreka je bil objavljen šele leta 1974 v članku Bertholda Schweizerja in Aba Sklara [43]. Lastnosti n-razsežnih kopul in Sklarov izrek so z izjemo izreka o razširitvi funkcije do kopule na $[0,1]^n$ dokazani v knjigi istih dveh avtorjev iz leta 1983 [44]. Omenjeni izrek je že leta 1978 dokazal Paul Deheuvels [5]. Dokaz izreka o razširitvi v razsežnosti n, ki je idejno enak dokazu v dveh razsežnostih iz [43], je podan v Sklarovem članku iz leta 1996 [47].

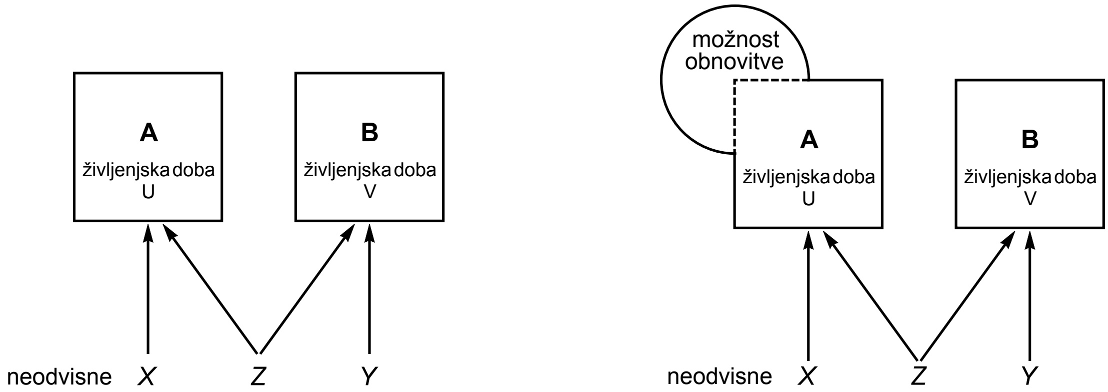
Če v n-razsežni kopuli za $k \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$ postavimo $n-k$ komponent na 1, dobimo funkcijo z domeno $[0,1]^k$, ki je k-kopula. Ko je $n > 2$, se pojavi tako imenovani *problem združljivosti*. Iz vsake n-kopule dobimo $\binom{n}{k}$ k-kopul, medtem ko za izbor $\binom{n}{k}$ k-kopul velikokrat velja, da niso hkrati k-robne kopule nobene n-kopule.

V doktorski disertaciji se bomo osredotočili na obravnavo dvorazsežnih kopul, ki jih imenujemo kar kopule. Produktna kopula $\Pi(u,v) = uv$ modelira neodvisni slučajni spremenljivki, medtem ko vsaka druga kopula modelira neke vrste odvisnost. Funkciji $M, W \colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, podani s predpisoma $W(u,v) = \max\{u+v-1, 0\}$ in $M(u,v) = \min\{u,v\}$, sta kopuli, za kateri velja $W(u,v) \leq C(u,v) \leq M(u,v)$ za vsak $u, v \in [0,1]$ za poljubno kopulo C. Kopuli W in M imenujemo Fréchet-Hoeffdingova spodnja oziroma zgornja meja v čast matematikoma, ki sta bila pionirja teorije kopul. Zveznima slučajnima spremenljivkama X in Y pripadajoča kopula je enaka M oziroma W natanko tedaj, ko je Y skoraj gotovo strogo naraščajoča oziroma padajoča funkcija slučajne spremenljivke X. Mnoge številske karakteristike (na primer Kendallov τ, Spearmanov ρ, Pearsonov korelacijski koeficient) in repne lastnosti slučajnih spremenljivk so odvisne le od pripadajoče kopule.

Naj bo (X,Y) slučajni vektor s skupno porazdelitveno funkcijo H in naj bosta F in G porazdelitveni funkciji X oziroma Y. Z F^{-1} in G^{-1} označimo posplošena obrata funkcij F oziroma G. Če sta funkciji F in G zvezni, potem je s predpisom $C(u,v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v))$, $u, v \in [0,1]$, definirana kopula, s čimer dobimo metodo za njihovo konstrukcijo. Če označimo s $\overline{H}$, $\overline{F}$ in $\overline{G}$ ustrezne funkcije preživetja, potem je s predpisom $\overline{H}(\overline{F}^{-1}(u), \overline{G}^{-1}(v))$, $u, v \in [0,1]$, tudi definirana kopula, imenujemo jo slučajnima spremenljivkama X in Y pripadajoča kopula preživetja. Na ta način so konstruirane Marshall-Olkinove kopule (1967) [34].

Marshallove kopule (1996) [33], katerih poseben primer so Marshall-Olkinove kopule, izhajajo iz verjetnostnega modela življenjske dobe dvokomponentnega sistema, na katerega delujejo udari. Na sistem s komponentama A in B naj delujejo udari treh vrst. Prva vrsta udara vpliva le na komponento A, druga vrsta le na komponento B, tretja vrsta udara pa deluje na obe komponenti hkrati. Čase udarov označimo zaporedoma s slučajnimi spremenljivkami X, Y in Z ter za njih predpostavimo, da so med seboj neodvisne. Življenjski dobi komponent A in B označimo z U oziroma z V. Ker vsaka izmed komponent preneha delovati ob prvem udaru nanjo, velja $U = \min\{X, Z\}$ in $V = \min\{Y, Z\}$. Slučajnima spremenljivkama U in V pripadajoča kopula preživetja je Marshallova kopula. Grafična predstavitev tega modela je na levi strani slike 1.1. Če za čase udarov predpostavimo eksponentne porazdelitve, dobimo Marshall-Olkinove kopule.

Opisani verjetnostni model sodi v področje analize preživetja [28, 40] in ga je zato mogoče uporabiti na raznovrstnih področjih, kot so na primer (bio)medicina, inženirstvo in ekonomija. Navedimo primer uporabe na področju ekonomije. Denimo, da opazujemo majhen trg, ki je primarno odvisen le od dveh podjetij – podjetja A, ki pripada živilsko predelovalni industriji, in podjetja B, ki proizvaja avtomobilske



Slika 1.1. Verjetnostna modela Marshallovih (levo) in maksmin kopul (desno).

dele. Naj bosta X in Y časa zloma živilsko predelovalne industrije oziroma trga avtomobilskih delov, medtem ko naj bo Z čas zloma celotnega domačega trga.

Marshallovo kopulo določata taki naraščajoči funkciji $\phi, \psi\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$, z lastnostma $\phi(0) = \psi(0) = 0$ in $\phi(1) = \psi(1) = 1$, da sta funkciji $\phi^*, \psi^*\colon (0,1] \longrightarrow [1,\infty)$, podani s predpisoma $\phi^*(u) = \phi(u)/u$, $u \in (0,1]$, in $\psi^*(v) = \psi(v)/v$, $v \in (0,1]$, padajoči. **Marshallova kopula** je funkcija, definirana s predpisom

$$C^M_{\phi,\psi}(u,v) = \min\{\phi(u)v, u\psi(v)\} = uv\min\{\phi^*(u), \psi^*(v)\}$$

za $u, v \in (0,1]$.

Marshall v članku [33] navede in dokaže naslednji izrek, poimenujmo ga **Marshallov izrek**, ki karakterizira to družino kopul. Naj bo $C^M_{\phi,\psi}$ Marshallova kopula in $H = C^M_{\phi,\psi}(F,G)$, kjer sta F in G enorazsežni porazdelitveni funkciji ter H dvorazsežna porazdelitvena funkcija. Potem sta naslednji trditvi ekvivalentni:

(i) Obstajajo take slučajne spremenljivke X, Y in Z, da je H skupna porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja $(\max\{X,Z\}, \max\{Y,Z\})$.

(ii) $\phi^* \circ F = \psi^* \circ G$.

V implikaciji iz (i) v (ii) predhodno predpostavimo, da obstajata taki funkciji ϕ in ψ, za kateri je slučajnima spremenljivkama $\max\{X,Z\}$ in $\max\{Y,Z\}$ pripadajoča kopula enaka Marshallovi kopuli $C^M_{\phi,\psi}$. V disertaciji dokažemo močnejšo različico: če velja (i), potem obstajata taki funkciji ϕ in ψ, da za pripadajočo Marshallovo kopulo $C^M_{\phi,\psi}$ velja $H = C^M_{\phi,\psi}(F,G)$. Iz dokaza, v katerem funkciji ϕ in ψ konstruiramo, sledi (ii).

Ob preučevanju dokaza implikacije iz (ii) v (i) smo odkrili, je za veljavnost (i) potrebno dodati še nekaj tehničnih predpostavk za funkcije ϕ, ψ, F in G. V disertaciji zato formulacijo izreka popravimo in ga dokažemo. Temeljna ideja dokaza ostaja enaka tisti iz Marshallovega članka [33].

Osrednji del disertacije je namenjen vpeljavi *maksmin kopul*, ki izhajajo iz modifikacije verjetnostnega modela Marshallovih kopul. Tega spremenimo tako, da dopuščamo možnost obnovitve komponente A, medtem ko ostanejo lastnosti komponente B in treh vrst udarov nespremenjene. To si lahko predstavljamo tudi tako, da imamo na razpolago dodatni primerek komponente A. Življenjska doba $V = \min\{Y, Z\}$ komponente B ostane nespremenjena, medtem ko je $U = \max\{X, Z\}$, saj zaradi obnovitvene lastnosti komponenta A preneha delovati šele ob obeh udarih nanjo. Želimo poiskati slučajnima spremenljivkama U in V pripadajočo kopulo. V ta namen vpeljemo maksmin kopule, ki rešijo opisani problem. Grafična predstavitev tega modela je na desni strani slike 1.1.

Tudi za ta model navedimo primer s področja ekonomije. Denimo, da opazujemo majhen trg, ki je zopet primarno odvisen le od dveh podjetij – farmacevtskega podjetja A in podjetja B, ki proizvaja avtomobilske dele. Naj bosta U in V življenjski dobi podjetij A oziroma B. Podjetje A ima na nekem tujem trgu še hčerinsko podjetje. Naj bosta X in Z čas zloma tujega oziroma domačega trga, Y pa naj bo čas zloma trga avtomobilskih delov. Ugotovimo, da je $U = \max\{X, Z\}$ in $V = \min\{Y, Z\}$.

Tako kot Marshallove kopule so tudi maksmin kopule odvisne od dveh funkcij, ki morata zadoščati določenim lastnostim. Pri tem mora ena izmed funkcij zadoščati enakim zahtevam kot funkciji iz definicije Marshallovih kopul.

Definicija 1.1. Naj bosta $\phi, \psi \colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ naraščajoči funkciji, za kateri velja $\phi(0) = \psi(0) = 0$ in $\phi(1) = \psi(1) = 1$. Funkciji $\phi^*, \psi_* : [0,1] \longrightarrow [1,\infty]$, podani s predpisoma $\phi^*(u) = \phi(u)/u$, $u \in [0,1]$, in $\psi_*(v) = (1-\psi(v))/(v-\psi(v))$, $v \in [0,1]$, naj bosta padajoči. **Maksmin kopula** je funkcija $C_{\phi,\psi} \colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, definirana s predpisom

$$C_{\phi,\psi}(u,v) = \min\{\phi(u)(v-\psi(v)), u(1-\psi(v))\} + u\psi(v) \text{ za } u, v \in [0,1]$$

oziroma

$$C_{\phi,\psi}(u,v) = \begin{cases} u(v-\psi(v)) \min\{\phi^*(u), \psi_*(v)\} + u\psi(v), & \text{za } u > 0 \text{ in } v \neq \psi(v), \\ uv, & \text{sicer.} \end{cases}$$

V disertaciji dokažemo naslednja dva izreka, ki karakterizirata družino maksmin kopul.

Izrek 1.2. *Naj bo $U = \max\{X, Z\}$ in $V = \min\{Y, Z\}$, kjer so X, Y in Z neke neodvisne slučajne spremenljivke. Naj bosta F in G porazdelitveni funkciji slučajnih spremenljivk U oziroma V ter naj bo H skupna porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja (U, V). Potem obstaja tak par funkcij (ϕ,ψ), da za pripadajočo maksmin kopulo $C_{\phi,\psi}$ velja $H(x,y) = C_{\phi,\psi}(F(x), G(y))$ za vse $x, y \in \mathbb{R}$.*

Izrek 1.3. *Naj bo $C_{\phi,\psi}$ maksmin kopula s pripadajočima funkcijama ϕ in ψ ter naj bosta F in G porazdelitveni funkciji, za katere predpostavimo naslednje:*

- *Za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $\phi(F(x))\Big(G(x) - \psi(G(x))\Big) = F(x)\Big(1 - \psi(G(x))\Big)$. Kjer je $F(x) > 0$ in $\psi(G(x)) \neq G(x)$, je ta enakost ekvivalentna $\phi^* \circ F = \psi_* \circ G$.*

- *Funkcija* ϕ *je zvezna v točki* 0*, ali pa je* $x_F = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) > 0\} > -\infty$ *in ima* F *v* x_F *skok. Funkcija* ψ *je zvezna v točki* 1*, ali pa obstaja tak* $x \in \mathbb{R}$*, da je* $G(x) = 1$*.*
- *Obstaja tak* x_0*, da je* $F(x_0) > 0$ *in* $G(x_0) < 1$*.*

Definiramo $H(x, y) = C_{\phi,\psi}(F(x), G(y))$ *za vsak* $x, y \in \mathbb{R}$*. Potem obstajajo take neodvisne slučajne spremenljivke* X*,* Y *in* Z*, da je* H *skupna porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja* $(\max\{X, Z\}, \min\{Y, Z\})$*.*

V dokazu izreka 1.2 funkciji ϕ in ψ definiramo eksplicitno, s čimer pridemo do postopka za izpeljavo kopul, ki izhajajo iz opisanega verjetnostnega modela z določenimi porazdelitvami časov udarov. Tudi v dokazu izreka 1.3 definiramo porazdelitvene funkcije slučajnih spremenljivk X, Y in Z eksplicitno. To omogoča vzorčenje iz maksmin kopule $C_{\phi,\psi}$ s pripadajočima funkcijama ϕ in ψ, ki zadoščata predpostavkam izreka.

Vsebina doktorske disertacije je urejena po poglavjih na naslednji način. V drugem poglavju so predstavljeni osnovni pojmi in oznake, ki jih uporabljamo v kasnejših poglavjih. Vpeljemo porazdelitveno funkcijo in porazdelitveni zakon ter obravnavamo njune lastnosti. Tretje poglavje je namenjeno osnovam teorije kopul. Podamo definicijo dvorazsežnih kopul, obravnavamo njihove analitične lastnosti, dokažemo Sklarov izrek in izrazimo Kendallov τ, Spearmanov ρ, Pearsonov korelacijski koeficient ter nekatere repne lastnosti slučajnih spremenljivk z analitičnimi lastnostmi pripadajoče kopule. Na koncu poglavja vpeljemo še večrazsežne kopule. V četrtem poglavju predstavimo nekaj metod za konstruiranje kopul in nekatere pomembne družine kopul, ki izhajajo iz teh metod, na primer Arhimedove ter eliptične kopule. Peto poglavje je namenjeno Marshallovim kopulam. V njem izpeljemo Marshall-Olkinove kopule, definiramo Marshallove kopule in dokažemo njihovo prenovljeno karakterizacijo – tisto, ki je bila opisana v tem uvodu. Poleg tega obravnavamo tudi njihove repne lastnosti in večrazsežne posplošitve. Šesto in zadnje poglavje vsebuje natančno študijo maksmin kopul. V prvem razdelku opišemo verjetnostni model, iz katerega izhajajo, in v drugem razdelku dokažemo, da so maksmin kopule, definirane v 1.1, dejansko kopule. Tretji razdelek je namenjen izrekoma karakterizacije. V četrtem razdelku obravnavamo lastnosti in konkretne primere parametričnih družin.

Izvirno raziskovalno delo obsega celotno šesto poglavje *Maksmin kopule* in dokaze petega poglavja *Marshallove kopule.* Rezultati šestega poglavja so obravnavani v članku [37]: M. Omladič, N. Ružić, *Shock models with recovery option via the maxmin copulas*, sprejeto v objavo pri reviji *Fuzzy Sets and Systems.*

Poglavje 2

Osnovni pojmi

V tem poglavju vpeljemo pojme in oznake, ki jih bomo uporabljali v naslednjih poglavjih. V prvem razdelku predstavimo nekaj splošnih oznak. Drugi razdelek je namenjen vpeljavi in lastnostim porazdelitvene funkcije slučajne spremenljivke, njenemu posplošenemu obratu, skupni porazdelitveni funkciji slučajnega vektorja ter verjetnostni podlagi za algoritem vzorčenja iz enorazsežne porazdelitve. V tretjem razdelku so vpeljane osnovne definicije iz teorije mere, predstavljena je konstrukcija porazdelitvenega zakona slučajnega vektorja, njegov razcep na absolutno zvezni, singularno zvezni in diskretni del ter Lebesgueov integral glede na porazdelitveni zakon.

Ker je namen tega poglavja zgolj predstaviti orodja, ki jih potrebujemo v nadaljevanju, in so le-ta zajeta v vsakem osnovnem predmetu o verjetnosti ali teoriji mere, bomo skoraj vse trditve navedli brez dokaza. Bolj poglobljeno matematično ozadje tega poglavja je moč najti v večini verjetnostnih učbenikov, na primer v [2, 41], kjer so vsebovani tudi manjkajoči dokazi.

2.1 Oznake

Z $\mathbb{R}$ označimo realna števila, medtem ko $\overline{\mathbb{R}}$ označuje njihovo razširitev $[-\infty, \infty]$. Za točki $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ in $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ iz $\overline{\mathbb{R}}^n$ je $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$ oziroma $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ natanko tedaj, ko je $a_i \leq b_i$ oziroma $a_i < b_i$ za vsak $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. **Kvader** v $\overline{\mathbb{R}}^n$ oziroma **pravokotnik** v primeru $n = 2$ je kartezični produkt n polodprtih intervalov

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \coloneqq (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \ldots \times (a_n, b_n].$$

Točka $\boldsymbol{c}$ je **oglišče** kvadra, če je komponenta c_i enaka a_i ali b_i za vsak i. **Enotska kocka** v $\overline{\mathbb{R}}^n$ oziroma **enotski kvadrat** v primeru $n = 2$ je kvader $\mathrm{I}^n \coloneqq (\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, kjer je $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ in $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$.

Definicijsko območje poljubne funkcije $f : \overline{\mathbb{R}}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^m$ označimo z $\operatorname{dom} f$, njeno sliko pa z $\operatorname{im} f$. **Nosilec funkcije** f je zaprtje množice

$$\operatorname{supp}(f) \coloneqq \{x \in \operatorname{dom} f \mid f(x) \neq 0\}.$$

Zaprtje množice $A \subseteq \mathbb{R}^n$ označimo z $\overline{A}$. Naj bo $f : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funkcija. Funkcija f je **naraščajoča**, če je $f(x) \leq f(y)$ za vse $x \leq y$. Funkcija f je **padajoča**, če je $f(x) \geq f(y)$ za vse $x \leq y$. Levo in desno limito funkcije f v točki x označimo z $f(x-)$ oziroma z $f(x+)$. Če je $f(x) = x$ za vse $x \in \overline{\mathbb{R}}$, potem jo označimo z id. Funkcija $f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ je ***c*-Lipschitzeva**, $c \geq 0$, če za vse $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n$ velja

$$|f(\boldsymbol{x}') - f(\boldsymbol{x})| \leq c\,||\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}||_1 = c\Big(|x_1' - x_1| + |x_2' - x_2| + \ldots + |x_n' - x_n|\Big).$$

Z $\mathrm{EZ}[a,b]$ označimo enakomerno zvezno porazdelitev na intervalu $[a,b]$, kjer je $a < b$. Eksponentno porazdelitev s parametrom λ označimo z $\mathrm{Exp}(\lambda)$. Če sta slučajni spremenljivki X in Y enako porazdeljeni, bomo pisali $X \sim Y$. Za neprazno množico Ω in množico $A \subseteq \Omega$ označimo z $\mathbb{1}_A$ **indikatorsko funkcijo** množice A, tj.

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{če je } \omega \in A, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

2.2 Porazdelitvene funkcije

Podrobno predstavimo definicije in izreke v povezavi s porazdelitvenimi funkcijami, na katerih temelji teorija kopul. Naj bo Ω neprazna množica. Za slučajno spremenljivko $X \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ in $A \subseteq \mathbb{R}$ pišemo $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} = \{X \in A\}$.

Definicija 2.1. Naj bo $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ verjetnostni prostor, $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ slučajna spremenljivka in $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n) \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, slučajni vektor.

- **Porazdelitvena funkcija** slučajne spremenljivke X je funkcija $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$, podana s predpisom $F(x) = P(X \leq x)$.
- **Funkcija preživetja** slučajne spremenljivke X je funkcija $\overline{F} \colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$, podana s predpisom $\overline{F}(x) = P(X > x)$.
- **Skupna (*n*-razsežna) porazdelitvena funkcija** slučajnega vektorja $\boldsymbol{X}$ je funkcija

  $$H \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1], \quad H(\boldsymbol{x}) = P(\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{x}) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n).$$

  Porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke X_i imenujemo **robna porazdelitvena funkcija**, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
- **Skupna (*n*-razsežna) funkcija preživetja** slučajnega vektorja $\boldsymbol{X}$ je funkcija $\overline{H} \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ s predpisom $\overline{H}(\boldsymbol{x}) = P(\boldsymbol{X} > \boldsymbol{x})$.

Ponekod bomo z namenom poenostavitve pri terminu ‚skupna porazdelitvena funkcija' izpustili besedo ‚skupna'. Ali se navezujemo na porazdelitveno funkcijo ali na skupno porazdelitveno funkcijo, bo tedaj jasno iz konteksta. Porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke X oziroma slučajnega vektorja $\boldsymbol{X}$ bomo označevali z F_X oziroma z $F_{\boldsymbol{X}}$, če ne bo drugače navedeno. Uporabljali bomo tudi oznako $\boldsymbol{X} \sim F_{\boldsymbol{X}}$.

Slučajna spremenljivka in slučajni vektor sta enolično določena s svojo (skupno) porazdelitveno funkcijo. Če je H skupna porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, potem je za vsak $x \in \mathbb{R}$ porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X_k enaka

$$F_{X_k}(x) = \lim_{\substack{x_i \to +\infty \\ \text{za vsak } i \neq k}} H(x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_k, \ldots, x_n). \tag{2.1}$$

Skupna porazdelitvena funkcija torej enolično določa robne porazdelitvene funkcije. V analognih oznakah za funkcije preživetja velja

$$\overline{F}_{X_k}(x) = \lim_{\substack{x_i \to -\infty \\ \text{za vsak } i \neq k}} \overline{H}(x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_k, \ldots, x_n) \text{ za vsak } x \in \mathbb{R}.$$

Pri $n = 1$ opazimo, da je $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$, pri $n = 2$ pa velja

$$\begin{aligned} \overline{H}(x, y) &= 1 - P(\{X \leq x\} \cup \{Y \leq y\}) \\ &= 1 - (P(X \leq x) + P(Y \leq y) - P(X \leq x, Y \leq y)) \\ &= 1 - F(x) - G(y) + H(x, y). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Z naslednjimi izreki, trditvami in definicijami opišemo lastnosti ter navedemo karakterizacijo (skupne) porazdelitvene funkcije. Dokaze večinoma izpustimo.

Izrek 2.2. Lastnosti in karakterizacija porazdelitvene funkcije. *Če je F porazdelitvena funkcija neke slučajne spremenljivke X, potem velja:*

(i) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ *in* $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$,

(ii) *F je naraščajoča,*

(iii) *F je zvezna z desne.*

Obratno, naj bo $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ neka funkcija, ki zadošča pogojem (i), (ii) *in* (iii). *Potem obstaja tak verjetnostni prostor $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ in taka slučajna spremenljivka $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, da je F njena porazdelitvena funkcija.*

Porazdelitvena funkcija ima kvečjemu števno mnogo točk nezveznosti in v vsaki taki točki ima singularnost prve vrste oziroma skok, saj je naraščajoča in omejena. Višina morebitnega skoka v točki $x \in \mathbb{R}$ je enaka $F(x) - F(x-) = P(X = x)$. Preden nadaljujemo z ostalimi izreki, vpeljimo še definicijo, pomembno v naslednjih poglavjih.

Definicija 2.3. Naj bodo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ podmnožice $\mathbb{R}$ in $H : A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \longrightarrow [0, 1]$ funkcija. Naj bo $R = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ kvader z oglišči $\{\boldsymbol{c}^k\}_{k=1}^{2^n}$ v $\operatorname{dom} H$. **Prostornina kvadra $\boldsymbol{R}$ glede na $\boldsymbol{H}$** je podana z

$$V_H(R) = \sum_{k=1}^{2^n} \operatorname{sgn}\left(\boldsymbol{c}^k\right) H\left(\boldsymbol{c}^k\right),$$

kjer je

$$\operatorname{sgn}(\boldsymbol{c}) = \begin{cases} 1, & \text{če je } c_i = a_i \text{ za sodo mnogo i,} \\ -1, & \text{če je } c_i = a_i \text{ za liho mnogo i.} \end{cases}$$

Funkcija H je ***n*-naraščajoča**, če je $V_H(R) \geq 0$ za vsak kvader R z oglišči v $\operatorname{dom} H$.

Ko je $n = 2$, imenujemo $V_H(R)$ **ploščina pravokotnika** in formula se poenostavi v

$$V_H((x_1, x_2] \times (y_1, y_2]) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1).$$

Poudarimo, da n-naraščajoče funkcije niso nujno naraščajoče v vsaki spremenljivki posebej. Za funkcijo $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, podano s predpisom $H(x, y) = xy$, za poljuben pravokotnik velja $V_H((x_1, x_2] \times (y_1, y_2]) = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \geq 0$, vendar H ni naraščajoča v vsaki spremenljivki posebej. Tudi obratno ne drži – funkcije, ki naraščajo v vsaki spremenljivki posebej, niso nujno n-naraščajoče. Funkcija $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, s predpisom $H(x, y) = \max\{x, y\}$, je očitno naraščajoča v vsaki spremenljivki posebej, medtem ko je $V_H(\mathrm{I}^2) = -1$ in zato H ni 2-naraščajoča.

Izrek 2.4. Lastnosti in karakterizacija *n*-razsežne porazdelitvene funkcije. *Če je H skupna porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, potem velja:*

(i) *za* $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *je* $\lim\limits_{x_i \to -\infty} H(\boldsymbol{x}) = 0$ *za vsak* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *in* $\lim\limits_{\substack{x_i \to +\infty \\ \text{za vsak } i}} H(\boldsymbol{x}) = 1$,

(ii) *H je n-naraščajoča.*

Obratno, naj bo $H : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1]$ neka funkcija, ki zadošča pogojema (i) *in* (ii)*. Potem obstaja tak verjetnostni prostor $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ in tak slučajni vektor $\boldsymbol{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, da je H njegova skupna porazdelitvena funkcija.*

Če je H skupna porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, je po pravilu vključitev in izključitev $V_H(R) = P((X_1, X_2, \ldots, X_n) \in R)$. Z namenom poenostavitve zapisa limit v neskončnosti bomo od sedaj naprej obravnavali (skupne) porazdelitvene funkcije kot funkcije z definicijskim območjem $\overline{\mathbb{R}}$ oziroma $\overline{\mathbb{R}}^n$. Čeprav n-naraščajoče funkcije niso nujno naraščajoče v vsaki spremenljivki posebej, pa to zaradi lastnosti (i) prejšnjega izreka velja za skupne porazdelitvene funkcije, kar dokažemo v naslednji trditvi.

Trditev 2.5. *Naj bo $H : \overline{\mathbb{R}}^n \longrightarrow [0, 1]$ skupna porazdelitvena funkcija in $\{F_i\}_{i=1}^n$ pripadajoče robne porazdelitvene funkcije. Potem velja:*

(i) *H je naraščajoča v vsaki spremenljivki posebej,*

(ii) *za vse* $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *in* $\boldsymbol{x}' = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$ *iz* $\overline{\mathbb{R}}^n$ *velja*

$$|H(\boldsymbol{x}') - H(\boldsymbol{x})| \leq \sum_{i=1}^{n} |F_i(x_i') - F_i(x_i)|,$$

torej je H ***zvezna od zgoraj****, tj.* $H(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\zeta}) \to H(\boldsymbol{x})$*, ko* $\boldsymbol{\zeta} \downarrow \boldsymbol{0}$*.*

Dokaz. Trditev dokažemo le za $n = 2$. Dokaz za splošen n najdemo v knjigi [44].

(i) Naj bodo $x_1 \leq x_2$ in y poljubni elementi $\overline{\mathbb{R}}$ in $R = (x_1, x_2] \times (-\infty, y]$. Po obeh točkah izreka 2.4 velja

$$\begin{aligned} 0 \leq V_H(R) &= H(x_2, y) - H(x_2, -\infty) - H(x_1, y) + H(x_1, -\infty) \\ &= H(x_2, y) - H(x_1, y). \end{aligned}$$

Analogno dokažemo, da H narašča v drugi spremenljivki.

(ii) Izberimo poljubne $x, x', y, y' \in \overline{\mathbb{R}}$. Po trikotniški neenakosti velja

$$|H(x', y') - H(x, y)| \leq |H(x', y') - H(x, y')| + |H(x, y') - H(x, y)|.$$

Naj bo najprej $x \leq x'$. Iz $V_H((x, x'] \times (y', \infty]) \geq 0$ potem sledi

$$H(x', y') - H(x, y') \leq H(x', \infty) - H(x, \infty) = F_1(x') - F_1(x).$$

Podobno za $x' \leq x$ velja $H(x, y') - H(x', y') \leq F_1(x) - F_1(x')$. Dokazali smo torej $|H(x', y') - H(x, y')| \leq |F_1(x') - F_1(x)|$. Analogno pokažemo tudi, da je $|H(x, y') - H(x, y)| \leq |F_2(y') - F_2(y)|$ in s tem dokažemo želeno neenakost točke (ii), iz katere očitno sledi t. i. zveznost od zgoraj.

■

Zveznost od zgoraj torej v primeru skupne porazdelitvene funkcije slučajnega vektorja sledi iz točk (i) in (ii) izreka 2.4, medtem ko to ne velja za porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke.

Porazdelitvena funkcija F ni nujno niti injektivna niti surjektivna, vendar lahko zaradi njenih lastnosti vseeno definiramo neke vrste obrat, ki ga poimenujemo posplošeni obrat. Čeprav F ni surjektivna, je množica $\mathrm{I} \setminus \operatorname{im} F$ sestavljena iz kvečjemu števno mnogo disjunktnih intervalov (zaradi skokov) in števil 0 ter 1 (saj se lahko F tema vrednostima zgolj približuje). Ker je F naraščajoča, praslika točke $u \in \operatorname{im} F$ s funkcijo F ali vsebuje le eno točko ali pa je enaka intervalu.

Definicija 2.6. Posplošeni obrat porazdelitvene funkcije F je funkcija

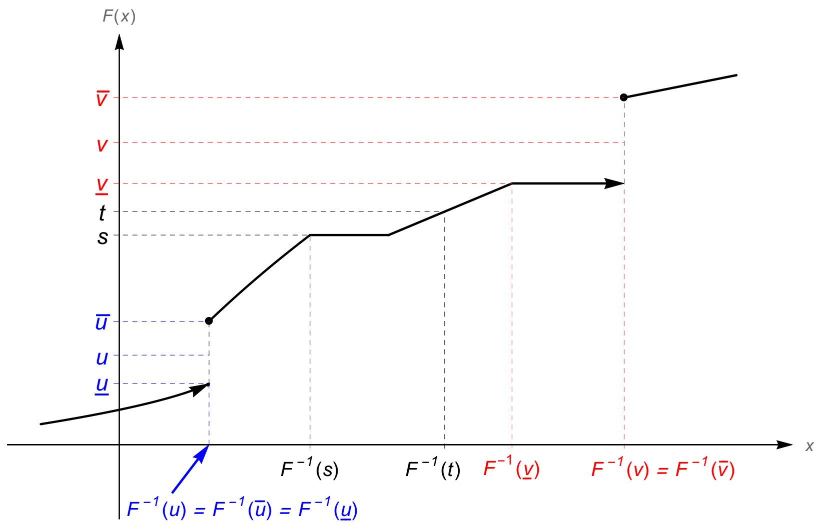
$$F^{-1} \colon [0, 1] \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad F^{-1}(u) = \inf\{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid F(x) \geq u\}.$$

Opisane lastnosti porazdelitvene funkcije so razvidne iz slike 2.1, na kateri je predstavljen tudi posplošeni obrat porazdelitvene funkcije. V naslednji lemi bomo navedli lastnosti posplošenega obrata porazdelitvene funkcije. Ker je dokaz leme predvsem tehnične narave, bomo natančen dokaz prepustili bralcu. V dokazu uporabimo naslednje ugotovitve, ki so predstavljene tudi na sliki 2.1.

Za $w \notin \operatorname{im} F \cup \{0,1\}$ vpeljemo oznaki $\overline{w} = F(F^{-1}(w))$ in $\underline{w} = F(F^{-1}(w)-)$. Očitno je $\overline{w} \in \operatorname{im} F$, medtem ko je $\underline{w}$ ali vsebovan v $\operatorname{im} F$ ali pa ni vsebovan v $\operatorname{im} F$, vendar je $\underline{w} - \varepsilon \in \operatorname{im} F$ za vsak dovolj majhen $\varepsilon > 0$. Veljavnost lastnosti moramo premisliti za štiri možne različne oblike porazdelitvene funkcije v okolici točke $w \notin \{0,1\}$, katere posplošeni obrat računamo:

- praslika $F^{-1}(\{w\})$ vsebuje le eno točko (kot v primeru $w = t$ na sliki 2.1),
- praslika $F^{-1}(\{w\})$ je enaka intervalu (kot v primeru $w = s$ na sliki 2.1),
- $w \notin \operatorname{im} F$ in $\underline{w} \notin \operatorname{im} F$ (kot v primeru $w = u$ na sliki 2.1),
- $w \notin \operatorname{im} F$ in $\underline{w} \in \operatorname{im} F$ (kot v primeru $w = v$ na sliki 2.1).

Veljavnost lastnosti v točkah 0 in 1 je potrebno premisliti posebej, kjer upoštevamo, da se porazdelitvena funkcija tema dvema vrednostima ali približuje ali pa ju zavzame.



Slika 2.1. Grafična predstavitev porazdelitvene funkcije, njenega posplošenega obrata in njegovih lastnosti.

Lema 2.7. *Naj bo F porazdelitvena funkcija in F^{-1} njen posplošeni obrat. Potem velja:*

(i) $F^{-1}(u) = \infty$ *natanko tedaj, ko je* $u = 1 \notin \operatorname{im} F$, *in* $F^{-1}(u) = -\infty$ *natanko tedaj, ko je* $u = 0$,

(ii) F^{-1} *je naraščajoča funkcija,*

(iii) F^{-1} *je zvezna z leve,*

(iv) $F(F^{-1}(u)) \geq u$ *za vsak* $u \in [0,1]$ *in* $F(F^{-1}(u)) = u$ *natanko tedaj, ko je* $u \in \operatorname{im} F \cup \{0,1\}$,

(v) $F^{-1}(F(x)) \leq x$ *za vsak* $x \in \mathbb{R}$ *in* $F^{-1}(F(x)) = x$ *natanko tedaj, ko je funkcija* F *na intervalu* $[x-\varepsilon, x]$ *nekonstantna za vsak* $\varepsilon > 0$,

(vi) $F \circ F^{-1} \circ F = F$ *in* $F^{-1} \circ F \circ F^{-1} = F^{-1}$.

Dokažimo preprosto lemo, ki jo bomo kasneje potrebovali za algoritme vzorčenja iz porazdelitev pri risanju razsevnih diagramov.

Lema 2.8. *Naj bo* F *poljubna porazdelitvena funkcija in* F^{-1} *njen posplošeni obrat.*

(i) *Naj bo slučajna spremenljivka* U *porazdeljena enakomerno zvezno na intervalu* $[0,1]$. *Potem je porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke* $X = F^{-1}(U)$ *enaka* F.

(ii) *Naj bo* X *slučajna spremenljivka z zvezno porazdelitveno funkcijo* F. *Slučajna spremenljivka* $U = F(X)$ *je potem porazdeljena enakomerno zvezno na intervalu* $[0,1]$.

Dokaz.

(i) Za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja

$$\begin{aligned} F_{F^{-1}(U)}(x) &= P(F^{-1}(U) \leq x) = P\Big(F(F^{-1}(U)) \leq F(x)\Big) = P(U \leq F(x)) \\ &= F(x). \end{aligned}$$

Natančno premislimo le, da velja $P(F^{-1}(U) \leq x) = P(F(F^{-1}(U)) \leq F(x))$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Ker je F naraščajoča, za poljuben $x \in \mathbb{R}$ velja, da iz $F^{-1}(U) \leq x$ sledi $F(F^{-1}(U)) \leq F(x)$. Obratno, v splošnem iz $F(F^{-1}(U)) \leq F(x)$ sledi le $F^{-1}(U) = F^{-1}(F(F^{-1}(U))) \leq F^{-1}(F(x))$. Če je F na intervalu $[x-\varepsilon, x]$ nekonstantna za vsak $\varepsilon > 0$, potem je $F^{-1}(F(x)) = x$ in smo zato enakost v tem primeru dokazali. Denimo, da je F konstantna na $[x-\varepsilon, x]$ za nek $\varepsilon > 0$ in naj bo $x_0 = \min\{t \in \overline{\mathbb{R}} \mid F(t) = F(x)\}$. Točka x_0 torej ustreza prejšnjemu primeru in zato velja

$$\begin{aligned} P(F^{-1}(U) \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x_0) = P\Big(F(F^{-1}(U)) \leq F(x_0)\Big) = \\ = P\Big(F(F^{-1}(U)) \leq F(x)\Big). \end{aligned}$$

(ii) Naj bo $u \in [0,1]$. Za poljubno porazdelitveno funkcijo F velja

$$\begin{aligned} F_{F(X)}(u) &= P(F(X) \leq u) = P\Big(F^{-1}(F(X)) \leq F^{-1}(u)\Big) = P(X \leq F^{-1}(u)) \\ &= F(F^{-1}(u)). \end{aligned}$$

Ker za zvezno porazdelitveno funkcijo velja še $F(F^{-1}(u)) = u$, je lema dokazana.

■

Druga točka leme ne velja za poljubno porazdelitveno funkcijo. Če je X skoraj gotovo konstantna, potem je $F(X)$ skoraj gotovo enaka 1.

2.3 Porazdelitveni zakon

V tem razdelku vpeljemo pojem porazdelitvenega zakona slučajnega vektorja, ki ga konstruiramo iz porazdelitvene funkcije. Najprej zato navedimo nekaj osnovnih pojmov iz teorije mere.

Naj bo Ω neprazna množica in $\mathcal{P}(\Omega)$ njena potenčna množica. Družina množic $\mathscr{S} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ je **polalgebra**, če vsebuje Ω, je zaprta za končne preseke in lahko komplement vsake množice iz $\mathscr{S}$ zapišemo kot končno unijo paroma disjunktnih elementov $\mathscr{S}$. Družina množic $\mathscr{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ je **algebra**, če vsebuje Ω in je zaprta za komplemente ter končne unije. Družina množic $\mathscr{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ je **σ-algebra**, če vsebuje Ω in je zaprta za komplemente ter števne unije. Par $(\Omega, \mathscr{F})$ imenujemo **merljiv prostor**, elemente $\mathscr{F}$ pa **merljive množice**. Vsaka algebra je torej polalgebra in vsaka σ-algebra je algebra. Za družino množic $\mathscr{C}$ označimo z $\mathcal{A}(\mathscr{C})$ in s $\sigma(\mathscr{C})$ najmanjšo algebro oziroma σ-algebro, ki vsebuje $\mathscr{C}$. Ker je poljuben presek algeber algebra in presek σ-algeber σ-algebra, sta $\mathscr{A}(\mathscr{C})$ in $\sigma(\mathscr{C})$ enaka preseku vseh algeber oziroma σ-algeber, ki vsebujejo $\mathscr{C}$. Če je $\mathcal{X}$ topološki prostor, potem najmanjšo σ-algebro, ki vsebuje vse odprte množice, imenujemo **Borelova σ-algebra** in jo označimo z $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Če je $\mathscr{S}$ polalgebra, potem je $\mathcal{A}(\mathscr{S})$ družina vseh končnih unij paroma disjunktnih elementov $\mathscr{S}$.

Naj bo $\emptyset \in \mathscr{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ in $\mu : \mathscr{C} \longrightarrow [0, \infty]$. Funkcija μ je **končno (števno) aditivna**, če je $\mu(\emptyset) = 0$ in za poljubno končno (števno) družino paroma disjunktnih množic $\{C_n\}_n \subseteq \mathscr{C}$, katerih unija je vsebovana v $\mathscr{C}$, velja $\mu(\bigcup_n C_n) = \sum_n \mu(C_n)$. Števno aditivna funkcija μ je **σ-končna**, če obstaja števna družina množic $\{C_n\}_n$ iz $\mathscr{C}$, katerih unija je enaka Ω in za vsak n velja $\mu(C_n) < \infty$. **Mera** je števno aditivna funkcija na σ-algebri. Mera P je **verjetnostna mera**, če je $P(\Omega) = 1$. Merljiva množica A je **atom** mere μ, če je $\mu(A) > 0$ in za vsako merljivo množico $B \subseteq A$, za katero je $\mu(B) < \mu(A)$, velja $\mu(B) = 0$. Lastnost L velja **skoraj povsod** na Ω, če je mera vseh točk, ki ne zadoščajo lastnosti L, enaka nič. Če je mera verjetnostna, potem pravimo, da lastnost L velja **skoraj gotovo**.

Naj bo $\mathcal{X}$ topološki prostor in μ mera na $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$. **Nosilec mere** μ je množica vseh točk $x \in \mathcal{X}$, za katere ima vsaka odprta okolica x pozitivno mero. Komplement nosilca mere je enak uniji vseh odprtih množic z mero nič in zato je nosilec mere zaprta množica. Mera μ je **diskretna**, če je njen nosilec števna množica.

Naj bo μ mera na merljivem prostoru $(\Omega, \mathscr{F})$. Funkcija $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ je **merljiva (glede na $\mathscr{F}$)**, če je praslika vsake odprte množice merljiva. Z $\mathrm{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$, $p \geq 1$, označimo prostor vseh merljivih funkcij $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, za katere je Lebesgueov integral $\int_\Omega |f| \, d\mu$ končen.

Če je $\mathscr{S}$ polalgebra in μ končno aditivna funkcija na njej, potem lahko μ enolično razširimo do števno aditivne funkcije $\mu_{\mathcal{A}}$ na $\mathcal{A}(\mathscr{S})$. Za poljuben $A \in \mathcal{A}(\mathscr{S})$ obstajajo paroma disjunktne množice $S_1, S_2, \ldots, S_n \in \mathscr{S}$, katerih unija je A. Razširitev očitno definiramo kot $\mu_{\mathcal{A}}(A) = \sum_i \mu(S_i)$.

Izrek 2.9. Carathéodoryjev izrek o razširitvi. *Naj bo $\mathscr{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ algebra in μ števno aditivna funkcija na njej. Potem obstaja mera μ_σ na $\sigma(\mathscr{A})$, ki se na $\mathscr{A}$ ujema z μ. Če je μ σ-končna, potem je razširitev enolična in je μ_σ σ-končna.*

Končno aditivno funkcijo μ na polalgebri $\mathscr{S}$ lahko torej najprej enolično razširimo do števno aditivne funkcije na algebri $\mathcal{A}(\mathscr{S})$ in če je le-ta σ-končna, jo lahko nato enolično razširimo do σ-končne mere na $\sigma(\mathscr{S})$. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Za slučajni vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$ s porazdelitveno funkcijo H lahko na ta način konstruiramo verjetnostno mero $\mu_{\boldsymbol{X}} = \mu_H$ na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, za katero velja

$$\mu_H((\boldsymbol{-\infty}, \boldsymbol{x}]) = H(\boldsymbol{x}) \quad \text{za vse } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Najprej na polalgebri $\mathscr{S} = \{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \mid \boldsymbol{-\infty} \leq \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{\infty}\}$ definiramo

$$\mu_H((\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]) = V_H((\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}])$$

in nato po opisani konstrukciji μ_H razširimo na $\sigma(\mathscr{S}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Dobljeno verjetnostno mero $\mu_{\boldsymbol{X}} = \mu_H$ na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ poimenujemo **porazdelitveni zakon** slučajnega vektorja $\boldsymbol{X}$ in zanj velja

$$\mu_{\boldsymbol{X}}(E) = P(\boldsymbol{X} \in E) \text{ za vsak } E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Atomi porazdelitvenega zakona so natanko množice $\{\boldsymbol{x}\}$, za katere H ni zvezna v $\boldsymbol{x}$. Porazdelitveni zakon ima torej največ števno mnogo atomov.

Naj bosta μ_1 in μ_2 meri na merljivem prostoru $(\Omega, \mathscr{F})$. Za $A \in \mathscr{F}$ definiramo $(\mu_1 + \mu_2)(A) = \mu_1(A) + \mu_2(A)$. Funkcija $\mu_1 + \mu_2$ je mera na $(\Omega, \mathscr{F})$. Mera μ_1 je **absolutno zvezna** glede na mero μ_2, kar označimo z $\mu_1 \ll \mu_2$, če za vsak $A \in \mathscr{F}$ z $\mu_2(A) = 0$ velja tudi $\mu_1(A) = 0$. Mera μ_1 je **skoncentrirana** na množici A_1, če za vsako merljivo množico $B \subseteq A_1^{\mathrm{c}}$ velja $\mu_1(B) = 0$. Meri μ_1 in μ_2 sta **vzajemno singularni**, označimo $\mu_1 \perp \mu_2$, če obstajata taki disjunktni množici A_1 in A_2, da je μ_1 skoncentrirana na A_1 in μ_2 skoncentrirana na A_2.

Izrek 2.10. Lebesgueov razcep mere in Radon-Nikodýmov izrek. *Naj bosta μ in λ meri na merljivem prostoru $(\Omega, \mathscr{F})$ ter naj bo λ σ-končna. Potem obstajata natanko določeni meri μ_{az} in μ_{s} na $(\Omega, \mathscr{F})$, da velja $\mu = \mu_{\mathrm{az}} + \mu_{\mathrm{s}}$, $\mu_{\mathrm{az}} \ll \lambda$ in $\mu_{\mathrm{s}} \perp \lambda$. Nadalje, obstaja skoraj povsod glede na λ enolično določena funkcija $f \in \mathrm{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \lambda)$, tako da je $\mu_{\mathrm{az}}(A) = \int_A f \, d\lambda$ za vsak $A \in \mathscr{F}$. Tako funkcijo f imenujemo **Radon--Nikodýmov odvod** mere μ_a glede na λ.*

Naj bo $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$ slučajni vektor s porazdelitvenim zakonom $\mu_{\boldsymbol{X}}$ in λ Lebesgueova mera na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Uporabimo izrek 2.10, da dobimo razcep mere $\mu_{\boldsymbol{X}}$ na vsoto mer $\mu_{\mathrm{az}}^{\boldsymbol{X}}$ in $\mu_{\mathrm{s}}^{\boldsymbol{X}}$ na prostoru $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Razcep lahko nadaljujemo z $\mu_{\mathrm{s}}^{\boldsymbol{X}} = \mu_{\mathrm{sz}}^{\boldsymbol{X}} + \mu_{\mathrm{d}}^{\boldsymbol{X}}$, kjer je $\mu_{\mathrm{sz}}^{\boldsymbol{X}} \perp \lambda$ in $\mu_{\mathrm{sz}}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = 0$ za vsak $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ ter je $\mu_{\mathrm{d}}^{\boldsymbol{X}}$ diskretna mera, katere nosilec je enak množici vseh atomov porazdelitvenega zakona. Enoličen razcep porazdelitvenega zakona z ustreznimi poimenovanji je torej

$$\begin{aligned}
&\mu_{\boldsymbol{X}} = \mu_{\mathrm{az}}^{\boldsymbol{X}} + \mu_{\mathrm{sz}}^{\boldsymbol{X}} + \mu_{\mathrm{d}}^{\boldsymbol{X}}, \text{ kjer je}\\
&\mu_{\mathrm{az}}^{\boldsymbol{X}}(E) = \int_E f\, d\lambda,\ E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \text{ – } \textbf{absolutno zvezni del} \text{ z } \textbf{gostoto } f,\\
&\mu_{\mathrm{sz}}^{\boldsymbol{X}} \perp \lambda \text{ in } \mu_{\mathrm{sz}}^{\boldsymbol{X}} \text{ nima atomov – } \textbf{singularno zvezni del},\\
&\mu_{\mathrm{d}}^{\boldsymbol{X}} \text{ diskretna mera – } \textbf{diskretni del}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Slučajni vektor je **absolutno zvezen** oziroma **singularno zvezen** oziroma **diskreten**, če v razcepu porazdelitvenega zakona slučajnega vektorja nastopa le $\mu_{\mathrm{az}}^{\boldsymbol{X}}$ oziroma $\mu_{\mathrm{sz}}^{\boldsymbol{X}}$ oziroma $\mu_{\mathrm{d}}^{\boldsymbol{X}}$. Slučajni vektor $\boldsymbol{X}$ je **zvezen**, če je $\mu_d^{\boldsymbol{X}} = 0$. Zvezni slučajni vektorji imajo zvezne porazdelitvene funkcije. Primer singularno zvezne porazdelitve je enakomerna zvezna porazdelitev na Cantorjevi množici, ki je neštevna množica z ničelno Lebesgueovo mero.

Naj bo $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ verjetnostni prostor, $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ slučajni vektor s porazdelitveno funkcijo H in $g \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ merljiva funkcija glede na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Potem je $g(\boldsymbol{X}) \in \mathrm{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$ natanko tedaj, ko je $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu_{\boldsymbol{X}})$, pri čemer velja

$$\mathrm{E}(g(\boldsymbol{X})) \coloneqq \int_\Omega g(\boldsymbol{X})\, dP = \int_{\mathbb{R}^n} g\, d\mu_{\boldsymbol{X}}. \tag{2.4}$$

Ker porazdelitveni zakon in porazdelitvena funkcija enolično določata drug drugega ter bomo v naslednjih poglavjih slučajne vektorje karakterizirali z njihovimi porazdelitvenimi funkcijami, bomo za Lebesgueov integral po porazdelitvenem zakonu uporabljali naslednji zapis:

$$\int_E g\, d\mu_{\boldsymbol{X}} = \int_E g(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dH(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

kjer je $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Naj bo F_i porazdelitvena funkcija X_i za vsak i.

Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$ so **neodvisne**, če je $\mu_{\boldsymbol{X}}$ enak produktu porazdelitvenih zakonov $\mu_{X_1} \times \mu_{X_2} \times \ldots \times \mu_{X_n}$, kar je ekvivalentno s

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_1(x_1) F_2(x_2) \cdot \ldots \cdot F_n(x_n)$$

za vse $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Za neodvisne slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$ zato po Fubinijevem izreku velja

$$\int_E g(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dH(x_1, \ldots, x_n) = \int \ldots \int_E g(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dF_1(x_1) \ldots dF_n(x_n).$$

Za konec vpeljimo še **disperzijo** ali **varianco** slučajne spremenljivke $X \in \mathrm{L}^2$, ki jo označimo z $\mathrm{D}(X)$, in **kovarianco** slučajnih spremenljivk X in Y iz L^2, ki jo označimo s $\mathrm{K}(X)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}(X) &= \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))^2\right) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2,\\
\mathrm{K}(X, Y) &= \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))(Y - \mathrm{E}(Y))\right) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y).
\end{aligned}$$

Poglavje 3

Osnove teorije kopul

Če poznamo skupno porazdelitev slučajnega vektorja, so njegove robne porazdelitve enolično določene z enačbo (2.1). Obratno, če poznamo porazdelitvi dveh slučajnih spremenljivk, potem ju lahko združimo v skupno porazdelitev na številne načine. Eden izmed možnih načinov modeliranja odvisnosti vodi preko kopul, ki združijo enorazsežne porazdelitve v večrazsežne na ravni porazdelitvenih funkcij.

V prvem razdelku vpeljemo definicijo dvorazsežne kopule, funkcije dveh spremenljivk z določenimi lastnostmi, in dokažemo njene analitične lastnosti. Sklarov izrek, ki pojasni vlogo teh funkcij v odnosu med skupno porazdelitveno funkcijo in njenima robnima porazdelitvenima funkcijama, dokažemo v drugem razdelku. Tu navedemo tudi nekatere verjetnostne lastnosti kopul, definiramo kopulo preživetja in opišemo algoritem za vzorčenje iz kopule. Tretji razdelek je namenjen obravnavi lastnosti kopul, ki pojasnijo določen način odvisnosti med robnima porazdelitvama. V zadnjem razdelku tega poglavja definiramo večrazsežne kopule in navedemo Sklarov izrek za n-razsežne slučajne vektorje. Osnovna literatura za to poglavje sta knjigi [36, 32].

3.1 Definicija kopule

Najprej definiramo širši pojem od kopule – podkopulo. Definicija (pod)kopule je ilustrirana na sliki 3.1.

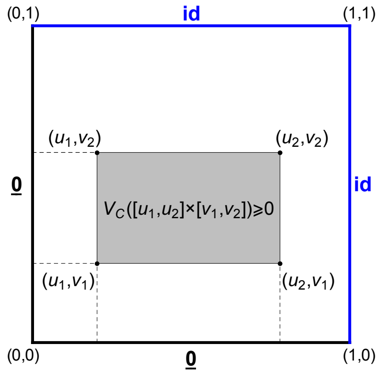
Definicija 3.1. Funkcija $C\colon A_1 \times A_2 \longrightarrow [0,1]$, kjer sta $A_1, A_2 \subseteq \mathrm{I}$, je **dvorazsežna podkopula**, ali na kratko **podkopula**, če velja $0, 1 \in A_j$ za $j \in \{1,2\}$ in so izpolnjeni naslednji pogoji:

(C1) $C(u,0) = 0$ za vsak $u \in A_1$ in $C(0,v) = 0$ za vsak $v \in A_2$,

(C2) $C(u,1) = u$ za vsak $u \in A_1$ in $C(1,v) = v$ za vsak $v \in A_2$,

(C3) C je 2-naraščajoča.

Definicija 3.2. Dvorazsežna kopula, ali na kratko **kopula**, je podkopula, katere definicijsko območje je enako I^2.



Slika 3.1. Grafična predstavitev pogojev **(C1)**, **(C2)** in **(C3)**.

Kljub temu, da se definiciji razlikujeta le v definicijskem območju funkcije, bo ta razlika pomembna pri že omenjenem Sklarovem izreku. Večina lastnosti kopul drži pravzaprav že za podkopule. Dokažimo prvo izmed njih.

Trditev 3.3. *Naj bo C podkopula z domeno* $\operatorname{dom} C = A_1 \times A_2$. *Potem velja:*

(i) *za vse $v_1 \leq v_2$ iz A_2 je funkcija $t \mapsto C(t, v_2) - C(t, v_1)$ naraščajoča na A_1 in za vse $u_1 \leq u_2$ iz A_1 je funkcija $t \mapsto C(u_2, t) - C(u_1, t)$ naraščajoča na A_2,*

(ii) *C je naraščajoča v vsaki spremenljivki posebej,*

(iii) *za vse $(u, v), (u', v') \in \operatorname{dom} C$ velja*

$$|C(u', v') - C(u, v)| \leq |u' - u| + |v' - v|, \tag{3.1}$$

torej je C Lipschitzeva z Lipschitzevo konstanto 1 *in zato enakomerno zvezna.*

Dokaz.

(i) Naj bosta $v_1 \leq v_2$ poljubna elementa A_2 in $t_1 \leq t_2$ elementa A_1. Za pravokotnik $R = (t_1, t_2] \times (v_1, v_2]$ po **(C3)** velja $V_C(R) \geq 0$, iz česar sledi

$$C(t_2, v_2) - C(t_2, v_1) \geq C(t_1, v_2) - C(t_1, v_1).$$

Podobno dokažemo, da je funkcija $t \mapsto C(u_2, t) - C(u_1, t)$ naraščajoča.

(ii) Če pri prvi funkciji iz točke (i) vzamemo $v_1 = 0$ in upoštevamo pogoj **(C1)**, dokažemo, da C narašča v prvi spremenljivki. Podobno, podkopula C narašča v drugi spremenljivki, ker je druga funkcija iz točke (i) naraščajoča za $u_1 = 0$ in poljuben $u_2 \in \mathrm{I}$.

(iii) Izberimo poljubni točki $(u, v), (u', v') \in \operatorname{dom} C$. Po trikotniški neenakosti velja

$$|C(u', v') - C(u, v)| \leq |C(u', v') - C(u, v')| + |C(u, v') - C(u, v)|.$$

Naj bo najprej $u \leq u'$. Po točki (i) in pogoju **(C2)** potem velja

$$C(u', v') - C(u, v') \leq C(u', 1) - C(u, 1) = u' - u.$$

Podobno za $u' \leq u$ velja $C(u, v') - C(u', v') \leq u - u'$. Dokazali smo torej, da velja $|C(u', v') - C(u, v')| \leq |u' - u|$. Analogno izpeljemo še drugo neenakost $|C(u, v') - C(u, v)| \leq |v' - v|$ in s tem dokažemo (3.1).

■

Opazimo, da je slednji dokaz popolnoma analogen dokazu trditve 2.5, če zamenjamo 0 z $-\infty$ in 1 z ∞. Za poljubno kopulo vpeljimo naslednje funkcije.

Definicija 3.4. Naj bo C kopula in $a \in \mathrm{I}$.

- **Vodoravni odsek kopule $\boldsymbol{C}$ pri $\boldsymbol{a}$** je funkcija iz I v I, ki je podana s predpisom $t \mapsto C(t, a)$.
- **Navpični odsek kopule $\boldsymbol{C}$ pri $\boldsymbol{a}$** je funkcija iz I v I, ki je podana s predpisom $t \mapsto C(a, t)$.
- **Diagonalni odsek kopule $\boldsymbol{C}$** je funkcija $\delta_C \colon \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{I}$ s predpisom $\delta_C(t) = C(t, t)$.

Skozi celotno delo bo skoraj povsod pomenilo skoraj povsod glede na Lebesgueovo mero. Lastnosti odsekov so zbrane v naslednji posledici trditve 3.3.

Posledica 3.5. *Naj bo C kopula. Vsi vodoravni in navpični odseki ter diagonalni odsek kopule C so naraščajoče enakomerno zvezne funkcije, ki so odvedljive skoraj povsod na* I*. Natančneje:*

- *Za skoraj vsak $t \in \mathrm{I}$ je $\delta'_C(t) \in [0, 2]$.*
- *Za vsak $v \in \mathrm{I}$ obstaja parcialni odvod $\partial C(u, v)/\partial u$ za skoraj vsak u in pri takih u ter v je $\partial C(u, v)/\partial u \in [0, 1]$. Podobno za vsak $u \in \mathrm{I}$ obstaja parcialni odvod $\partial C(u, v)/\partial v$ za skoraj vsak v in kadar obstaja je med nič in ena.*
- *Funkciji $v \mapsto \partial C(u, v)/\partial u$ in $u \mapsto \partial C(u, v)/\partial v$ sta definirani in naraščajoči skoraj povsod na* I.

Dokaz. Ker je C naraščajoča v vsaki spremenljivki posebej in velja neenakost (3.1), so vsi vodoravni in navpični odseki ter diagonalni odsek naraščajoče enakomerno zvezne funkcije. Od tod sledi odvedljivost skoraj povsod.

- Naj bo $t \in \mathbb{R}$ tak, da obstaja $\delta'_C(t)$. Ker je δ_C naraščajoča, je $\delta'_C(t) \geq 0$. Po neenakosti (3.1) velja $|\delta_C(t) - \delta_C(t')| \leq 2|t - t'|$ za vsak $t' \in \mathrm{I}$, od koder sledi $\delta'_C(t) \leq 2$.
- Naveden obstoj parcialnih odvodov je ekvivalenten odvedljivosti vodoravnih in navpičnih odsekov skoraj povsod. Parcialni odvodi so nenegativni, ker so vodoravni in navpični odseki naraščajoče funkcije. Če v neenakost (3.1) vstavimo $v' = v$, opazimo, da je parcialni odvod glede na prvo spremenljivko navzgor omejen z ena. Podobno iz neenakosti (3.1) pri $u' = u$ sledi $\partial C(u, v)/\partial v \leq 1$.
- Za $v_1 \leq v_2$ je funkcija $u \mapsto C(u, v_2) - C(u, v_1)$ po točki (i) trditve 3.3 naraščajoča na I in zato obstaja odvod $\partial\big(C(u, v_2) - C(u, v_1)\big)/\partial u$ skoraj povsod in je nenegativen.

Od tod sledi, da je funkcija $v \mapsto \partial C(u,v)/\partial u$ definirana in naraščajoča skoraj povsod na I. Podobno velja za $u \mapsto \partial C(u,v)/\partial v$.

■

Nadaljujmo s tremi pomembnimi zgledi kopul, pred katerimi pa vpeljemo še dva nova pojma.

Definicija 3.6. Podkopula C je **simetrična**, če je $C(u,v) = C(v,u)$ za vse $u, v \in \mathrm{I}$.

Definicija 3.7. Kopula C_1 **je manjša od** C_2, kar označimo s $C_1 \preceq C_2$, če je $C_1(u,v) \le C_2(u,v)$ za vse $u, v \in \mathrm{I}$.

Relacija $\preceq$ je očitno relacija delne urejenosti na množici vseh kopul. Poljubni dve kopuli seveda nista nujno primerljivi. Naslednja trditev in lema povesta, da obstajata najmanjši in največji element v delno urejeni množici kopul.

Trditev 3.8. *Za poljubno podkopulo C velja*

$$\max\{u+v-1, 0\} \le C(u,v) \le \min\{u,v\}$$

za vsak $(u,v) \in \operatorname{dom} C$.

Dokaz. Naj bo $(u,v) \in \operatorname{dom} C$. Ker po trditvi 3.3 velja $C(u,v) \le C(u,1) = u$ in $C(u,v) \le C(1,v) = v$, je zato $C(u,v) \le \min\{u,v\}$. Ker je C 2-naraščajoča, je

$$0 \le V_C((u,1] \times (v,1]) = C(1,1) - C(1,v) - C(u,1) + C(u,v) = 1 - v - u + C(u,v)$$

in zato je $C(u,v) \ge u + v - 1$. Od tod sledi $C(u,v) \ge \max\{u+v-1, 0\}$. ■

Definicija 3.9. Za $u, v \in \mathrm{I}$ označimo

$$\begin{aligned} W(u,v) &= \max\{u+v-1, 0\} = u - \min\{u, 1-v\}, \\ M(u,v) &= \min\{u,v\}, \\ \Pi(u,v) &= uv. \end{aligned}$$

Funkciji W in M imenujemo **Fréchet-Hoeffdingova spodnja meja** oziroma **zgornja meja**, funkcijo Π pa **produktna kopula**.

Lema 3.10. *Funkcije W, M in Π so kopule.*

Dokaz. Vse tri funkcije očitno izpolnjujejo pogoja **(C1)** in **(C2)**. Vzemimo poljubne $u_1 \le u_2$ in $v_1 \le v_2$ iz I. Ker je $V_\Pi((u_1,u_2] \times (v_1,v_2]) = (u_2 - u_1)(v_2 - v_1) \ge 0$, je Π dejansko kopula.

Za dokaz pogoja **(C3)** za funkcijo M ločimo glede na urejenost u_2 in v_2 ter u_1 in v_1 štiri primere. V primeru, ko je $u_2 \le v_2$ in $u_1 \le v_1$, je

$$\begin{aligned} V_\Pi((u_1,u_2] \times (v_1,v_2]) &= \min\{u_2,v_2\} - \min\{u_2,v_1\} - \min\{u_1,v_2\} + \min\{u_1,v_1\} \\ &= u_2 - \min\{u_2,v_1\} - u_1 + u_1 \ge 0. \end{aligned}$$

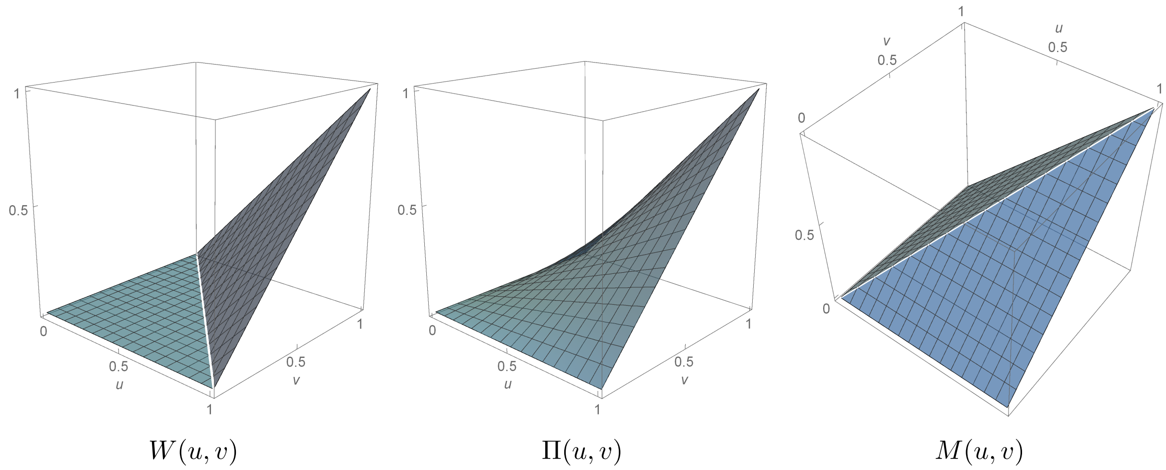
Če je $u_2 \leq v_2$ in $u_1 > v_1$, potem je $V_\Pi((u_1,u_2]\times(v_1,v_2]) = u_2 - v_1 - u_1 + v_1 \geq 0$. Preostala dva primera dokažemo simetrično.

Označimo $m(u,v) = \min\{u, 1-v\}$. Ker je $W(u,v) = u - m(u,v)$, lahko zapišemo

$$V_W((u_1,u_2]\times(v_1,v_2]) = -V_m((u_1,u_2]\times(v_1,v_2]) = V_M((u_1,u_2]\times(1-v_2,1-v_1]) \geq 0,$$

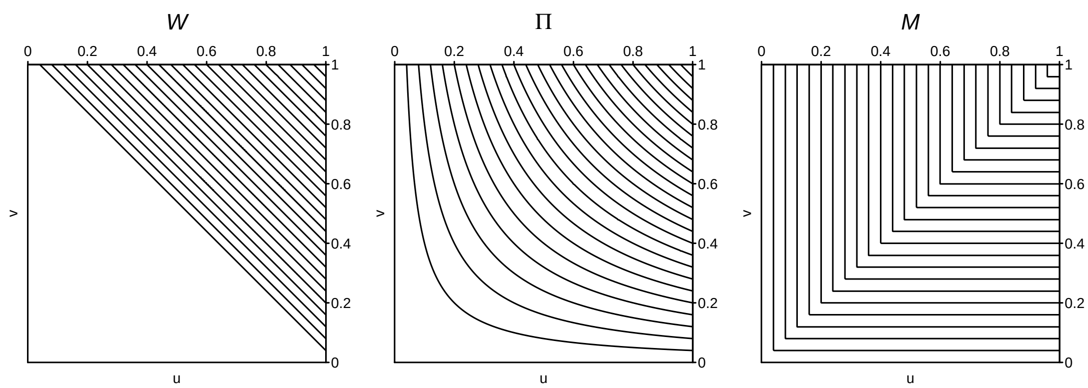
saj je $1 - v_2 \leq 1 - v_1$. ■

Za vsako kopulo C torej velja $W \preceq C \preceq M$, kjer sta W in M prav tako kopuli. Ker je $\delta_\Pi(t) = t^2$, ocene $\delta'_C(t) \in [0,2]$ iz posledice 3.5 ni mogoče izboljšati. Kopule W, Π in M so simetrične. Grafi kopul W, Π in M so predstavljeni na sliki 3.2.



Slika 3.2. Grafi kopul W, Π in M.

Bolj nazorno kot z grafom kopulo predstavimo z **grafom nivojnic**, tj. za izbrane *nivoje* $a \in [0,1]$ narišemo krivulje $\gamma_a = \{(u,v) \in \mathrm{I} \,|\, C(u,v) = a\}$. Poudarimo, da pri grafu nivojnic kopule ni potrebno posebej označiti vrednosti nivoja a, saj po pogoju **(C2)** velja $(a,1), (1,a) \in \gamma_a$. Na sliki 3.3 so predstavljeni grafi nivojnic kopul W, Π in M.



Slika 3.3. Nivojnice kopul W, Π in M.

Ker je po trditvi 3.3 podkopula zvezna na svoji domeni, jo lahko enolično razširimo do roba. Izrek, ki ga bomo navedli, pokaže še več. Njegov dokaz je povzet po že omenjenem članku Schweizerja in Sklara [43].

Izrek 3.11. *Vsako podkopulo lahko razširimo do kopule.*

Dokaz. Naj bo $C''\colon A_1 \times A_2 \longrightarrow [0,1]$ podkopula. Ker je C'' po trditvi 3.3 zvezna, obstaja enolična razširitev funkcije C'' do funkcije $C'\colon \overline{A}_1 \times \overline{A}_2 \longrightarrow [0,1]$, ki je podkopula. Želimo konstruirati kopulo $C\colon \mathrm{I}^2 \longrightarrow [0,1]$, ki se na $\overline{A}_1 \times \overline{A}_2$ ujema s C'.

Naj bo (u,v) poljubna točka v I^2. Čeprav smo oznake tipa $\underline{w}$ in $\overline{w}$ uporabili že pri posplošenem obratu porazdelitvene funkcije na strani 12, bomo zgolj za potrebe tega dokaza tema oznakama spremenili pomen: za $u \in \mathrm{I}$ označimo z $\underline{u}$ in $\overline{u}$ največji oziroma najmanjši tak element $\overline{A}_1$, da je $\underline{u} \le u \le \overline{u}$. Analogno definiramo $\underline{v}, \overline{v} \in \overline{A}_2$. Ali sta $\underline{w}$ in $\overline{w}$ elementa $\overline{A}_1$ ali $\overline{A}_2$, bo razvidno iz konteksta. Opazimo, da je $u \in \overline{A}_1$ natanko tedaj, ko je $\underline{u} = u = \overline{u}$ in podobno velja za $v \in \overline{A}_2$. Definiramo funkciji $\lambda, \mu\colon \mathrm{I} \longrightarrow [0,1]$ s predpisoma

$$\lambda(u) = \begin{cases} \dfrac{u - \underline{u}}{\overline{u} - \underline{u}}, & \text{če je } \underline{u} < \overline{u}, \\ 1, & \text{če je } \underline{u} = \overline{u}; \end{cases} \qquad \mu(v) = \begin{cases} \dfrac{v - \underline{v}}{\overline{v} - \underline{v}}, & \text{če je } \underline{v} < \overline{v}, \\ 1, & \text{če je } \underline{v} = \overline{v}. \end{cases}$$

Predpisa funkcij λ in μ sta v resnici različna, saj je $\lambda(u)$ izračunan glede $\underline{u}, \overline{u} \in \overline{A}_1$, medtem ko je $\mu(v)$ izračunan glede $\underline{v}, \overline{v} \in \overline{A}_2$. V teh oznakah definiramo funkcijo $C\colon \mathrm{I}^2 \longrightarrow [0,1]$ s predpisom

$$\begin{aligned} C(u,v) = (1-\lambda(u))(1-\mu(v))\, C'(\underline{u},\underline{v}) &+ (1-\lambda(u))\mu(v)\, C'(\underline{u},\overline{v}) \\ + \lambda(u)\ (1-\mu(v))\, C'(\overline{u},\underline{v}) &+ \qquad \lambda(u)\ \mu(v)\, C'(\overline{u},\overline{v}). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Če je $(u,v) \in \overline{A}_1 \times \overline{A}_2$, potem je $\lambda(u) = \mu(v) = 1$ in zato je $C(u,v) = C'(u,v)$. Funkcija C je torej razširitev funkcije C' na I^2. Ker je $0 \in \overline{A}_2$, je $\mu(0) = 1$ in zato velja $C(u,0) = (1-\lambda(u))C'(\underline{u},0) + \lambda(u)C'(\overline{u},0) = 0$ za vsak $u \in \mathrm{I}$. Podobno velja tudi $C(0,v) = 0$ in s tem je izpolnjen pogoj **(C1)** za funkcijo C. Po definiciji podkopule je tudi $1 \in \overline{A}_2$ in zato je $\mu(1) = 1$. Dobimo torej

$$\begin{aligned} C(u,1) &= (1-\lambda(u))\, C'(\underline{u},1) + \lambda(u)\, C'(\overline{u},1) = (1-\lambda(u))\underline{u} + \lambda(u)\overline{u} \\ &= \lambda(u)(\overline{u} - \underline{u}) + \underline{u} = u \end{aligned}$$

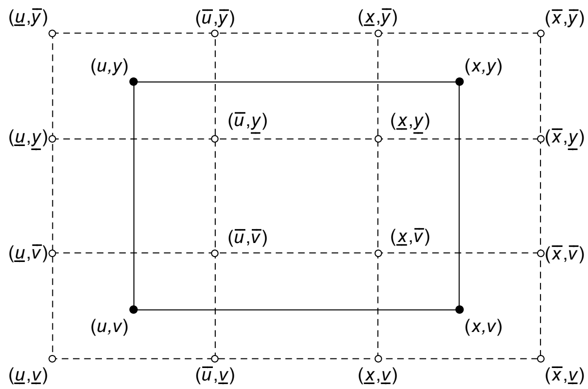
za vsak $u \in \mathrm{I}$. Analogno lahko dokažemo, da je $C(1,v) = v$, s čimer je izpolnjen pogoj **(C2)**. Pokazati moramo le še, da je C 2-naraščajoča.

Naj bosta (u,v) in (x,y) dve taki poljubni točki v I^2, da je $u \le x$ in $v \le y$. Za pravokotnik $R = (u,x] \times (v,y]$ želimo dokazati, da je izraz $V_C(R)$, ki je sestavljen iz šestnajstih členov, nenegativen. Oblika izraza je odvisna od tega, ali je v intervalu (u,x) oziroma (v,y) kakšna točka iz $\overline{A}_1$ oziroma $\overline{A}_2$. Če v intervalu (u,x) ni nobene točke iz množice $\overline{A}_1$, potem je $\underline{x} = \underline{u}$ in $\overline{x} = \overline{u}$. Ko je v intervalu vsaj ena točka iz $\overline{A}_1$, dobimo $u \leq \overline{u} \leq \underline{x} \leq x$. Podoben razmislek velja na množici $\overline{A}_2$. Dokaz bomo navedli le za najpreprostejši primer, medtem ko bomo najzahtevnejšega intuitivno pojasnili s sliko 3.4.

Denimo najprej, da med $u \notin \overline{A}_1$ in $x \notin \overline{A}_1$ ni nobene točke iz $\overline{A}_1$ ter da med $v \notin \overline{A}_2$ in $y \notin \overline{A}_2$ ni nobene točke iz $\overline{A}_2$. Potem je $\underline{x} = \underline{u}$, $\overline{x} = \overline{u}$, $\underline{y} = \underline{v}$ in $\overline{y} = \overline{v}$. Člene $V_C(R)$ lahko v tem primeru po krajšem računu preuredimo v preprosto obliko

$$V_C(R) = (\lambda(x) - \lambda(u))(\mu(y) - \mu(v))\, V_{C'}((\underline{u}, \overline{u}] \times (\underline{v}, \overline{v}]).$$

Ker je $\underline{x} = \underline{u}$ in $\overline{x} = \overline{u}$ ter je $u \leq x$, je $\lambda(u) \leq \lambda(x)$. Podobno velja tudi $\mu(v) \leq \mu(y)$ in zato je $V_C(R) \geq 0$, saj je C' 2-naraščajoča.



Slika 3.4. Grafična predstavitev najzahtevnejšega primera v dokazu izreka 3.11.

V najzahtevnejšem primeru predpostavimo, da obstaja tako med u in x kot med v in y vsaj ena točka iz $\overline{A}_1$ oziroma $\overline{A}_2$. Ta primer je grafično predstavljen na sliki 3.4. Izkaže se, da je $V_C(R)$ v tem primeru enak

$$\begin{aligned}
&(1 - \lambda(u))(1 - \mu(v))\, V_{C'}((\underline{u}, \overline{u}] \times (\underline{v}, \overline{v}]) + (1 - \mu(v))\, V_{C'}((\overline{u}, \underline{x}] \times (\underline{v}, \overline{v}]) \\
&+\lambda(x)(1 - \mu(v))\, V_{C'}((\underline{x}, \overline{x}] \times (\underline{v}, \overline{v}]) + (1 - \lambda(u)) V_{C'}\, ((\underline{u}, \overline{u}] \times (\overline{v}, \underline{y}]) \\
&+V_{C'}((\overline{u}, \underline{x}] \times (\overline{v}, \underline{y}]) + \lambda(x)\, V_{C'}((\underline{x}, \overline{x}] \times (\overline{v}, \underline{y}]) + (1 - \lambda(u))\mu(y)\, V_{C'}((\underline{u}, \overline{u}] \times (\underline{y}, \overline{y}]) \\
&+\mu(y)\, V_{C'}((\overline{u}, \underline{x}] \times (\underline{y}, \overline{y}]) + \lambda(x)\mu(y)\, V_{C'}((\underline{x}, \overline{x}] \times (\underline{y}, \overline{y}]).
\end{aligned}$$

Če to formulo primerjamo s sliko 3.4, opazimo, da je ploščina pravokotnika R s funkcijo C enaka kombinaciji devetih ploščin črtkanih pravokotnikov s podkopulo C'. Ker so koeficienti pred ploščinami s C' nenegativni in je C' 2-naraščajoča, je $V_C(R) \geq 0$. ■

Razširitev podkopule do kopule ni enolična, kar pokaže naslednji zgled.

Zgled 3.12. Naj bo C' podkopula z najmanjšo možno domeno $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$. Taka podkopula je ena sama, in sicer mora veljati $C'(0, 0) = C'(0, 1) = C'(1, 0) = 0$ in $C'(1, 1) = 1$. Razširimo C' do kopule na način, ki je opisan v dokazu zadnjega izreka. Za poljubno točko $(u, v) \in \mathrm{I}^2$ je $\underline{u} = \underline{v} = 0$ ter $\overline{u} = \overline{v} = 1$ in zato sta funkciji λ ter μ enaki identiteti. Po definiciji (3.2) je $C(u, v) = \lambda(u)\mu(v)\, C'(\overline{u}, \overline{v}) = uv$. S to konstrukcijo razširitve dobimo produktno kopulo. Po drugi strani je vsaka kopula razširitev tako definirane podkopule C'. $\square$

3.2 Sklarov izrek in verjetnostni pomen kopul

Podkopule in kopule so po definiciji funkcije dveh spremenljivk z določenimi lastnostmi. Verjetnostni pomen kopul razkrije šele Sklarov izrek [45]. Sklarov izrek dokažemo tako kot v članku [43]: razdelimo ga na dva dela, ki ju dokažemo v posameznih trditvah. Drugi del je zadnji izrek 3.11, medtem ko je prvi del formuliran v naslednji trditvi.

Trditev 3.13. *Naj bo H skupna porazdelitvena funkcija z robnima porazdelitvenima funkcijama F in G. Potem obstaja enolično določena podkopula C z domeno $\overline{\operatorname{im} F} \times \overline{\operatorname{im} G}$, za katero velja*

$$H(x,y) = C(F(x), G(y)) \quad \textit{za vse } x, y \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{3.3}$$

Dokaz. Po drugi točki trditve 2.5 velja neenakost

$$|H(x',y') - H(x,y)| \leq |F(x') - F(x)| + |G(y') - G(y)|$$

za vse $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$. Iz $F(x') = F(x)$ in $G(y') = G(y)$ zato sledi $H(x',y') = H(x,y)$. Množica

$$\Big\{ \Big(F(x), G(y), H(x,y) \Big) \,|\, x, y \in \overline{\mathbb{R}} \Big\}$$

torej predstavlja graf dobro definirane funkcije C dveh spremenljivk z definicijskim območjem $\operatorname{im} F \times \operatorname{im} G$. Očitno je za tako definirano C enakost (3.3) izpolnjena in zaradi te enakosti je taka funkcija C enolična. Dokazati moramo še, da je C podkopula.

Ker je $F(-\infty) = G(-\infty) = 0$ in $F(\infty) = G(\infty) = 1$, je $\{0,1\} \times \{0,1\} \subseteq \operatorname{dom} C$. Naj bo $u \in \operatorname{im} F$ poljuben in $x \in \overline{\mathbb{R}}$ tak, da je $u = F(x)$. Po definiciji funkcije C in lastnostih porazdelitvenih funkcij potem velja

$$\begin{aligned} C(u,0) &= C(F(x), G(-\infty)) = H(x, -\infty) = 0, \\ C(u,1) &= C(F(x), G(\infty)) = H(x, \infty) = F(x) = u. \end{aligned}$$

Analogno dokažemo še drugi dve enakosti iz pogojev **(C1)** in **(C2)**. Ker je H 2-naraščajoča, je C 2-naraščajoča. Ker je torej C podkopula, jo lahko enolično razširimo do podkopule z domeno $\overline{\operatorname{im} F} \times \overline{\operatorname{im} G}$. $\blacksquare$

Izrek 3.14. Sklarov izrek. *Naj bo H skupna porazdelitvena funkcija z robnima porazdelitvenima funkcijama F in G. Potem obstaja taka kopula C, da velja*

$$H(x,y) = C(F(x), G(y)) \quad \textit{za vse } x, y \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{3.4}$$

Če sta F in G zvezni, potem je C enolično določena, v nasprotnem primeru pa je C enolična le na $\overline{\operatorname{im} F} \times \overline{\operatorname{im} G}$.

Obratno, če je C kopula in sta F ter G porazdelitveni funkciji, potem je z enačbo (3.4) definirana skupna porazdelitvena funkcija H, katere robni porazdelitveni funkciji sta enaki F in G.

Dokaz. Naj bodo najprej H, F in G kot v prvem delu izreka. Po trditvi 3.13 obstaja enolično določena podkopula C' z domeno $\overline{\operatorname{im} F} \times \overline{\operatorname{im} G}$, za katero velja enakost (3.4). Če sta F in G zvezni, je $\operatorname{dom} C' = \mathrm{I}^2$ in je zato C' pravzaprav enolično določena kopula. V nasprotnem primeru lahko po izreku 3.11 podkopulo C' razširimo do kopule C.

Dokažimo še obrat. Naj bo torej C kopula in F ter G porazdelitveni funkciji. Za $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ definiramo $H(x,y) = C(F(x), G(y))$. Ker je $H(-\infty, y) = C(0, G(y)) = 0$ za vsak $y \in \overline{\mathbb{R}}$, $H(x, -\infty) = C(F(x), 0) = 0$ za vsak $x \in \overline{\mathbb{R}}$, $H(\infty, \infty) = C(1,1) = 1$ in za vse $x_1 \leq x_2$ ter $y_1 \leq y_2$ velja

$$V_H((x_1, x_2] \times (y_1, y_2]) = V_C((F(x_1), F(x_2)] \times (G(y_1), G(y_2)]) \geq 0,$$

je funkcija H po izreku 2.4 skupna porazdelitvena funkcija nekega slučajnega vektorja. Njeni robni porazdelitveni funkciji sta enaki $H(x, \infty) = C(F(x), 1) = F(x)$ in $H(\infty, y) = C(1, G(y)) = G(y)$. ■

Komentirajmo, da je enakost v (3.4) po lastnostih porazdelitvenih funkcij in kopule izpolnjena za vse $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ natanko tedaj, ko je izpolnjena za vse $x, y \in \mathbb{R}$. Ker bomo porazdelitvene funkcije obravnavali kot funkcije s sliko v $\mathbb{R}$, bomo uporabljali drugo različico. Iz Sklarovega izreka in definicije posplošenega obrata porazdelitvene funkcije, podane v 2.6, očitno sledi naslednja posledica.

Posledica 3.15. *Naj bodo funkcije H, F, G in C kot v trditvi* 3.13. *Potem za vsak $(u,v) \in \operatorname{dom} C$ velja*

$$C(u,v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)).$$

Če sta F in G zvezni, potem slednja posledica velja za kopule. S tem dobimo metodo za konstruiranje kopul, ki jo bomo v naslednjih poglavjih uporabili za izpeljavo eliptičnih in Marshall-Olkinovih kopul.

Preko Sklarovega izreka lahko konstruiramo večrazsežne porazdelitve v dveh preprostih korakih: najprej izberemo enorazsežni robni porazdelitvi in nato kopulo, ki ju povezuje. Če imamo na voljo parametrične družine enorazsežnih porazdelitev in kopul, lahko torej najprej poiščemo parametre enorazsežnih porazdelitev in nato parametre kopule, pri katerih se podatki prilegajo.

Naj bo C poljubna kopula. Definiramo funkcijo $H_C\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$H_C(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{za } x<0 \text{ ali } y<0,\\ C(x,y), & \text{za } x,y\in \mathrm{I},\\ x, & \text{za } x\in \mathrm{I} \text{ in } y>1,\\ y, & \text{za } x>1 \text{ in } y\in \mathrm{I},\\ 1, & \text{za } x>1 \text{ in } y>1. \end{cases} \tag{3.5}$$

Opazimo, da je tako definirana funkcija H_C skupna porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja (X,Y), kjer sta slučajni spremenljivki X in Y porazdeljeni enakomerno zvezno na intervalu $[0,1]$. Kopule so torej zožitve skupnih porazdelitvenih funkcij, katerih robni porazdelitvi sta enakomerni zvezni porazdelitvi na $[0,1]$.

Naj bo C kopula. Če za slučajni spremenljivki X in Y s porazdelitvenima funkcijama F oziroma G ter skupno porazdelitveno funkcijo H za vse $x,y\in\mathbb{R}$ velja $H(x,y)=C(F(x),G(y))$, potem C imenujemo **slučajnima spremenljivkama $\boldsymbol{X}$ in $\boldsymbol{Y}$ pripadajoča kopula** in jo standardno označimo s $C_{X,Y}$. Produktna kopula modelira neodvisni slučajni spremenljivki, medtem ko vsaka druga kopula modelira neke vrste odvisnost.

Trditev 3.16. Verjetnostni pomen $\boldsymbol{\Pi}$, $\boldsymbol{M}$ in $\boldsymbol{W}$. *Naj bosta X in Y zvezni slučajni spremenljivki.*

- *Pripadajoča kopula $C_{X,Y}$ je enaka Π natanko tedaj, ko sta X in Y neodvisni.*
- *Pripadajoča kopula $C_{X,Y}$ je enaka M natanko tedaj, ko za vsako točko $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ velja $P(X>x,Y\le y)=0$ ali $P(X\le x,Y>y)=0$, tj. Y je skoraj gotovo strogo naraščajoča funkcija slučajne spremenljivke X.*
- *Pripadajoča kopula $C_{X,Y}$ je enaka W natanko tedaj, ko za vsako točko $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ velja $P(X\le x,Y\le y)=0$ ali $P(X>x,Y>y)=0$, tj. Y je skoraj gotovo strogo padajoča funkcija slučajne spremenljivke X.*

Dokaz. Prva točka trditve je očitna. Dokažimo preostali dve. Naj bodo H, F in G porazdelitvene funkcije (X,Y), X oziroma Y.

- Za vsako točko $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ velja

  $$\begin{aligned} F(x) &= P(X\le x,Y\le y)+P(X\le x,Y>y) = H(x,y)+P(X\le x,Y>y),\\ G(y) &= P(X\le x,Y\le y)+P(X>x,Y\le y) = H(x,y)+P(X>x,Y\le y). \end{aligned}$$

  S tem je druga točka očitno dokazana.
- Za vsak $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ po enakosti (2.2) velja $F(x)+G(y)-1=H(x,y)-\overline{H}(x,y)$. Ker je $H(x,y)=P(X\le x,Y\le y)$ in $\overline{H}(x,y)=P(X>x,Y>y)$, je s tem tretja točka dokazana.

■

V prejšnjem razdelku smo definirali simetričnost kopule. Za zvezni slučajni spremenljivki X in Y velja $(X, Y) \sim (Y, X)$ natanko tedaj, ko sta X in Y enako porazdeljeni in je njuna pripadajoča kopula simetrična.

Če sta slučajni spremenljivki X in Y zvezni ter sta funkciji α in β strogo naraščajoči ali strogo padajoči, potem kopula $C_{X,Y}$ natanko določa kopulo $C_{\alpha(X),\beta(Y)}$, ki od samega predpisa funkcij α in β ni odvisna.

Trditev 3.17. *Naj bosta X in Y zvezni slučajni spremenljivki s pripadajočo kopulo $C_{X,Y}$ ter naj bosta funkciji $\alpha\colon \operatorname{im} X \longrightarrow \mathbb{R}$ in $\beta\colon \operatorname{im} Y \longrightarrow \mathbb{R}$ strogo monotoni. Potem veljajo naslednje trditve:*

(i) *Če sta α in β obe strogo naraščajoči, potem je $C_{\alpha(X),\beta(Y)} = C_{X,Y}$.*

(ii) *Če je α strogo naraščajoča in β strogo padajoča, potem za vse $u, v \in \mathrm{I}$ velja*
$$C_{\alpha(X),\beta(Y)}(u, v) = u - C_{X,Y}(u, 1 - v).$$

(iii) *Če je α strogo padajoča in β strogo naraščajoča, potem za vse $u, v \in \mathrm{I}$ velja*
$$C_{\alpha(X),\beta(Y)}(u, v) = v - C_{X,Y}(1 - u, v).$$

(iv) *Če sta α in β obe strogo padajoči, potem za vse $u, v \in \mathrm{I}$ velja*
$$C_{\alpha(X),\beta(Y)}(u, v) = u + v - 1 + C_{X,Y}(1 - u, 1 - v).$$

Dokaz. Ker sta X in Y zvezni slučajni spremenljivki, sta kopuli $C_{X,Y}$ in $C_{\alpha(X),\beta(Y)}$ enolično določeni. Za funkciji α in β definiramo posplošeni obrat kot v definiciji 2.6. Ker sta funkciji strogo monotoni, je $\alpha^{-1} \circ \alpha = \mathrm{id}$ in $\beta^{-1} \circ \beta = \mathrm{id}$. Če je α strogo naraščajoča, potem je $F_{\alpha(X)}(x) = P(\alpha(X) \leq x) = P(X \leq \alpha^{-1}(x)) = F_X(\alpha^{-1}(x))$. Za strogo padajočo funkcijo α je $F_{\alpha(X)}(x) = P(X \geq \alpha^{-1}(x)) = 1 - F_X(\alpha^{-1}(x))$, saj je $P(X = \alpha^{-1}(x)) = 0$.

(i) Ker sta funkciji α in β obe strogo naraščajoči, je
$$\begin{aligned} C_{\alpha(X),\beta(Y)}\Big(F_{\alpha(X)}(x), F_{\beta(Y)}(y)\Big) &= P(\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y) \\ &= P(X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)) \\ &= C_{X,Y}\Big(F_X(\alpha^{-1}(x)), F_Y(\beta^{-1}(y))\Big) \\ &= C_{X,Y}\Big(F_{\alpha(X)}(x), F_{\beta(Y)}(y)\Big) \end{aligned}$$
za vse $x, y \in \mathbb{R}$, iz česar sledi $C_{\alpha(X),\beta(Y)} = C_{X,Y}$.

(ii) Če je α naraščajoča in β padajoča, potem je
$$\begin{aligned} C_{\alpha(X),\beta(Y)}\Big(F_{\alpha(X)}(x), F_{\beta(Y)}(y)\Big) &= P(\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y) \\ &= P(X \leq \alpha^{-1}(x), Y \geq \beta^{-1}(y)) \\ &= P(\{X \leq \alpha^{-1}(x)\} \backslash \{X \leq \alpha^{-1}(x), Y < \beta^{-1}(y)\}) \\ &= P(X \leq \alpha^{-1}(x)) - P(X \leq \alpha^{-1}(x), Y < \beta^{-1}(y)) \\ &= F_X(\alpha^{-1}(x)) - C_{X,Y}\Big(F_X(\alpha^{-1}(x)), F_Y(\beta^{-1}(y))\Big) \\ &= F_{\alpha(X)}(x) - C_{X,Y}\Big(F_{\alpha(X)}(x), 1 - F_{\beta(Y)}(y)\Big) \end{aligned}$$

za vse $x, y \in \mathbb{R}$. Dokazali smo, da je $C_{\alpha(X),\beta(Y)}(u,v) = u - C_{X,Y}(u, 1-v)$.

(iii) Dokažemo simetrično kot prejšnjo točko.

(iv) Uporabimo najprej drugo točko za funkciji id in β ter nato tretjo točko za funkciji α in id, da izpeljemo

$$\begin{aligned} C_{\alpha(X),\beta(Y)}(u,v) &= u - C_{\alpha(X),Y}(u, 1-v) = u - (1 - v - C_{X,Y}(1-u, 1-v)) \\ &= u + v - 1 + C_{X,Y}(1-u, 1-v). \end{aligned}$$

■

Če je C kopula, potem so po zadnji trditvi funkcije $u - C(u, 1-v)$, $v - C(1-u, v)$ in $u + v - 1 + C(1-u, 1-v)$ tudi kopule. Če sta slučajni spremenljivki X in Y življenjski dobi, potem je praviloma bolje obravnavati njuni funkciji preživetja kot pa njuni porazdelitveni funkciji. Naj bo C slučajnima spremenljivkama X in Y pripadajoča kopula ter F, G in H ustrezne porazdelitvene funkcije. Po enakosti (2.2) za funkcije preživetja $\overline{F}$, $\overline{G}$ in $\overline{H}$ velja

$$\begin{aligned} \overline{H}(x,y) = 1 - F(x) - G(x) + H(x,y) &= \overline{F}(x) + \overline{G}(x) - 1 + C(F(x), G(y)) \\ &= \overline{F}(x) + \overline{G}(x) - 1 + C(1 - \overline{F}(x), 1 - \overline{G}(y)). \end{aligned}$$

Če definiramo funkcijo $\hat{C}(u,v)\colon \mathrm{I}^2 \longrightarrow \mathrm{I}$ s predpisom

$$\hat{C}(u,v) = u + v - 1 + C(1-u, 1-v), \tag{3.6}$$

dobimo

$$\overline{H}(x,y) = \hat{C}(\overline{F}(x), \overline{G}(y)). \tag{3.7}$$

Po prejšnji trditvi je $\hat{C}$ kopula.

Definicija 3.18. Naj bo $C = C_{X,Y}$ slučajnima spremenljivkama X in Y pripadajoča kopula. Slučajnima spremenljivkama X in Y pripadajoča **kopula preživetja** je funkcija, ki je podana s predpisom (3.6).

Tako kot kopula združuje robni porazdelitveni funkciji v skupno porazdelitveno funkcijo, tako kopula preživetja združi enorazsežni funkciji preživetja v skupno funkcijo preživetja (3.7). Poudarimo še, da kopula preživetja ni enaka zožitvi skupne funkcije preživetja, katere robni porazdelitvi sta enakomerni zvezni porazdelitvi na [0, 1], kar velja za kopulo in porazdelitvene funkcije. V tem primeru za vse $x, y \in \mathrm{I}$ dobimo

$$\overline{H}(x,y) = 1 - F(x) - G(y) + H(x,y) = 1 - x - y + C(x,y) = \hat{C}(1-x, 1-y).$$

Naj bosta U in V porazdeljeni enakomerno zvezno na $[0,1]$. Po četrti točki trditve 3.17 za funkciji $\alpha(t) = \beta(t) = 1 - t$ dobimo $C_{1-U,1-V} = \hat{C}_{U,V}$. Ker sta $1-U$ in $1-V$

prav tako porazdeljeni enakomerno zvezno na $[0,1]$, je kopula preživetja $\hat{C}$ skupna porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja $(1-U, 1-V)$.

Naj bo C kopula. Porazdelitveni funkciji H_C, definirani s predpisom (3.5), pripada porazdelitveni zakon $\mu_C := \mu_{H_C}$, ki je skoncentriran na I^2. Ker je H_C zvezna, μ_C nima atomov in zato po razcepu (2.3) obstajata enolično določeni meri μ_{az}^C in μ_{sz}^C, da je $\mu_C = \mu_{\mathrm{az}}^C + \mu_{\mathrm{sz}}^C$, $\mu_{\mathrm{az}}^C \ll \lambda$ in $\mu_{\mathrm{sz}}^C \perp \lambda$. Tu λ označuje Lebesgueovo mero na $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$.

Definicija 3.19. **Absolutno zvezni del** kopule C je funkcija

$$A_C(u,v) := \mu_{\mathrm{az}}^C((0,u] \times (0,v]) = \int_0^u \int_0^v \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} C(s,t)\, dt\, ds.$$

Singularni del kopule C je funkcija $S_C = C - A_C$. Če je $S_C = 0$, potem je C **absolutno zvezna kopula** z **gostoto** $\partial^2 C(u,v)/\partial u \partial v$. Če je $A_C = 0$, potem je C **singularna kopula**. **Nosilec kopule** C je nosilec mere μ_C.

Če je $\partial^2 C(u,v)/\partial u \partial v = 0$ skoraj povsod, potem je C singularna. Kopula je singularna natanko tedaj, ko je Lebesgueova mera njenega nosilca enaka nič.

Zgled 3.20. Za zgornjo mejo M velja, da je $\partial^2 M(u,v)/\partial u \partial v = 0$ za vsako točko (u,v) izven diagonale $D = \{(u,u) \mid u \in \mathrm{I}\}$. Ker je dvorazsežna Lebesgueova mera diagonale enaka nič, je M singularna kopula z nosilcem D. Porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja (U,V) je enaka H_M natanko tedaj, ko je $P(U=V)=1$.

Za spodnjo mejo W velja, da je $\partial^2 W(u,v)/\partial u \partial v = 0$ za vsako točko (u,v) izven druge diagonale $D_2 = \{(u, 1-u) \mid u \in \mathrm{I}\}$. Fréchet-Hoeffdingova spodnja meja W je torej tudi singularna, njen nosilec pa je enak D_2. Porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja (U,V) je enaka H_W natanko tedaj, ko je $P(U+V=1)=1$.

Produktna kopula Π je absolutno zvezna z gostoto $\partial^2 \Pi(u,v)/\partial u \partial v = 1$ za vse $u, v \in \mathrm{I}$, njen nosilec pa je enak I^2. □

Ta razdelek zaključimo z metodo za vzorčenje iz dvorazsežne porazdelitve na podlagi pripadajoče kopule. Dobro znana metoda za vzorčenje iz enorazsežne porazdelitve je **metoda posplošenega obrata porazdelitvene funkcije**. Denimo, da želimo generirati vzorec, ki je porazdeljen kot slučajna spremenljivka X s porazdelitveno funkcijo F. Po lemi 2.8 je $X \sim F^{-1}(U)$, kjer je $U \sim \mathrm{EZ}[0,1]$. Pri tej metodi torej najprej generiramo vzorec $u \sim \mathrm{EZ}(0,1)$ in nato z $x = F^{-1}(u)$ dobimo želeni vzorec.

Izpeljali bomo algoritem za generiranje vzorca (x,y), ki je porazdeljen kot dvorazsežni slučajni vektor (X,Y) s skupno porazdelitveno funkcijo H in robnima porazdelitvenima funkcijama F in G, za katerega poznamo pripadajočo kopulo $C = C_{X,Y}$. Po Sklarovem izreku je dovolj, da izpeljemo metodo za generiranje vzorca (u,v) iz porazdelitve slučajnega vektorja (U,V) s skupno porazdelitveno funkcijo C oziroma natančneje H_C s predpisom (3.5), kjer sta U in V porazdeljeni enakomerno zvezno na intervalu $[0,1]$. Iskani vzorec (x,y) dobimo s transformacijo $x = F^{-1}(u)$ in $y = G^{-1}(v)$.

Najbolj splošna metoda vzorčenja na podlagi kopule je **metoda pogojne porazdelitve**, pri kateri vzorčimo u iz porazdelitve $U \sim \mathrm{EZ}[0,1]$ in nato še v iz pogojne porazdelitve V pri pogoju $U = u$. Izpeljemo

$$\begin{aligned} C_u(v) &:= P(V \leq v \mid U = u) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P(U \in (u, u+\varepsilon], V \leq v)}{P(U \in (u, u+\varepsilon])} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{C(u+\varepsilon, v) - C(u,v)}{\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial u} C(u,v) \end{aligned} \tag{3.8}$$

za vsak v, pri katerem odvod obstaja. Spomnimo se, da smo v posledici 3.5 dokazali, da je funkcija $v \mapsto \frac{\partial}{\partial u} C(u,v)$ definirana in naraščajoča skoraj povsod na I. Če v točki v odvod ne obstaja, definiramo $C_u(v)$ tako, da je C_u zvezna z desne in zato obstaja njen posplošeni obrat C_u^{-1}. Algoritem je torej naslednji.

Algoritem 3.21. Metoda pogojne porazdelitve.

1. Neodvisno vzorčimo u in t iz porazdelitve $\mathrm{EZ}[0,1]$.
2. Definiramo $v = C_u^{-1}(t)$. Iskani vzorec je (u, v).

Če bi želeli vzorčiti (x, y), bi algoritmu dodali še tretjo točko:

3. Definiramo $x = F^{-1}(u)$ in $y = G^{-1}(v)$. Iskani vzorec je (x, y).

Algoritem lahko uporabimo za vzorčenje iz poljubne porazdelitve, katere pripadajočo kopulo poznamo. Ker je računanje odvoda in njegovega posplošenega obrata lahko težavno, je ta algoritem bolj primeren za kopule z enostavno analitično obliko. Poleg tega lahko v primerih, ko kopula izhaja iz nekega verjetnostnega modela, izpeljemo bolj preprost in intuitiven algoritem za vzorčenje. Primer takega algoritma bo za Marshallove in maksmin kopule podan v zadnjih dveh poglavjih.

Algoritme vzorčenja uporabimo v naslednjih poglavjih za risanje razsevnih diagramov kopul. Razsevni diagram je verjetno najboljša grafična predstavitev kopule.

3.3 Lastnosti kopul

V tem razdelku navedemo nekatere izmed mnogih lastnosti kopul, ki opišejo določen način odvisnosti med dvema slučajnima spremenljivkama. Drugače povedano, verjetnostne lastnosti slučajnih vektorjev bomo izrazili z analitičnimi lastnostmi pripadajočih kopul. Najprej vpeljemo tri številske karakteristike slučajnega vektorja, ki jih poimenujemo **mere skladnosti**: Pearsonov korelacijski koeficient, Kendallov τ in Spearmanov ρ. V drugem podrazdelku navedemo nekatere lastnosti, ki opišejo obnašanje repov in jih v petem ter šestem poglavju za Marshallove in maksmin kopule dokažemo.

3.3.1 Mere skladnosti

V tem podrazdelku izpeljemo formuli za Kendallov τ in Spearmanov ρ slučajnih spremenljivk X in Y s pripadajočo kopulo $C_{X,Y}$. Pred tem vpeljemo **Pearsonov korelacijski koeficient** slučajnih spremenljivk X in Y, ki nista skoraj gotovo konstantni:

$$\rho^{\text{Pearson}}(X,Y) \coloneqq \frac{\mathrm{K}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{D}(X)}\sqrt{\mathrm{D}(Y)}}.$$

Pearsonov korelacijski koeficient meri stopnjo linearne odvisnosti med slučajnima spremenljivkama: zavzame vrednosti iz intervala $[-1,1]$ in je po absolutni vrednosti enak 1 natanko tedaj, ko je $Y = aX + b$ za nek $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ in $b \in \mathbb{R}$. Če je $a < 0$, je $\rho^{\text{Pearson}}(X,Y) = -1$, sicer je $\rho^{\text{Pearson}}(X,Y) = 1$. Če slučajni spremenljivki „nista linearno odvisni", potem je njun korelacijski koeficient enak 0.

Navedimo najprej vzorčno različico za Kendallov τ. Naj bo zaporedje parov $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ realizacija slučajnega vzorca $(X_1,Y_1),\ldots,(X_n,Y_n)$, tj. zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih vektorjev, ki so porazdeljeni kot (X,Y). Par opazovanj (x_i,y_i) in (x_j,y_j) je **skladen**, če je $(x_i-x_j)(y_i-y_j) > 0$, tj. bodisi je $x_i < x_j$ in $y_i < y_j$ bodisi je $x_i > x_j$ in $y_i > y_j$. Par opazovanj (x_i,y_i) in (x_j,y_j) je **neskladen**, če je $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$. Naj bo c število skladnih parov in d število neskladnih parov. Število vseh parov je enako $\binom{n}{2}$. **Vzorčni Kendallov $\boldsymbol{\tau}$** je enak

$$t \coloneqq \frac{c-d}{\binom{n}{2}} = \frac{c}{\binom{n}{2}} - \frac{d}{\binom{n}{2}}.$$

Vzorčni Kendallov τ je torej enak razliki relativnih frekvenc skladnega in neskladnega para, kar vodi k definiciji za Kendallov τ slučajnega vektorja (X,Y).

Definicija 3.22. Naj bosta X in Y zvezni slučajni spremenljivki ter (X_1,Y_1) in (X_2,Y_2) neodvisna slučajna vektorja, porazdeljena kot (X,Y). **Kendallov $\boldsymbol{\tau}$** slučajnega vektorja (X,Y) je enak

$$\tau_{X,Y} \coloneqq P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0).$$

Kendallov τ zavzame vrednosti iz intervala $[-1,1]$ in s tem meri, kako dobro lahko Y predstavimo kot monotono funkcijo slučajne spremenljivke X. Kendallov $\tau_{X,Y}$ je enak 1 oziroma -1, natanko tedaj, ko je Y skoraj gotovo monotono naraščajoča oziroma padajoča funkcija slučajne spremenljivke X. Tudi Spearmanov ρ temelji na razliki verjetnosti skladnosti in neskladnosti.

Definicija 3.23. Naj bosta X in Y zvezni slučajni spremenljivki ter (X_1,Y_1), (X_2,Y_2) in (X_3,Y_3) neodvisni slučajni vektorji, porazdeljeni kot (X,Y). **Spearmanov $\boldsymbol{\rho}$** slučajnega vektorja (X,Y) je enak

$$\rho_{X,Y} \coloneqq 3\Big(P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0)\Big).$$

Primerjamo torej verjetnosti skladnosti in neskladnosti slučajnih vektorjev (X_1, Y_1) in (X_2, Y_3), ki sta neodvisna, imata enaki robni porazdelitvi, vendar različni pripadajoči kopuli $C_{X_1,Y_1} = C_{X,Y}$ in $C_{X_2,Y_3} = \Pi$. Z namenom hkratne obravnave obeh mer skladnosti definiramo količino, katere posebna primera sta $\tau_{X,Y}$ in $\rho_{X,Y}$.

Definicija 3.24. Naj bosta (X_1, Y_1) in (X_2, Y_2) neodvisna slučajna vektorja, za katera velja $X_1 \sim X_2$ ter $Y_1 \sim Y_2$ (vendar ne nujno tudi $(X_1, Y_1) \sim (X_2, Y_2)$). Definiramo količino

$$Q \coloneqq P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0).$$

V naslednjem izreku količino Q izrazimo z Lebesgueovim integralom po $dH_{C_{X_1,Y_1}}$ oziroma $dH_{C_{X_2,Y_2}}$ in dokažemo, da je odvisna zgolj od pripadajočih kopul C_{X_1,Y_1} in C_{X_2,Y_2}.

Izrek 3.25. *Naj bosta (X_1, Y_1) in (X_2, Y_2) zvezna slučajna vektorja, za katera veljajo predpostavke definicije 3.24. Naj bosta $C_1 = C_{X_1,Y_1}$ in $C_2 = C_{X_2,Y_2}$ pripadajoči kopuli. Potem je*

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \int_{\mathrm{I}^2} C_1(u, v)\, dC_2(u, v) - 1 = 4 \int_{\mathrm{I}^2} C_2(u, v)\, dC_1(u, v) - 1. \tag{3.9}$$

Če je $C_1 \preceq C_1'$ in $C_2 \preceq C_2'$, potem je $Q(C_1, C_2) \le Q(C_1', C_2')$.

Dokaz. Z F označimo porazdelitveno funkcijo X_1 in X_2 ter z G porazdelitveno funkcijo Y_1 in Y_2. Skupni porazdelitveni funkciji (X_1, Y_1) in (X_2, Y_2) označimo s H_1 oziroma H_2. Ker sta porazdelitveni funkciji F in G zvezni, je

$$\begin{aligned}
Q &= P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - \Big(1 - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0)\Big) \\
&= 2P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - 1 \\
&= 2\Big(P(X_1 < X_2, Y_1 < Y_2) + P(X_1 > X_2, Y_1 > Y_2)\Big) - 1.
\end{aligned}$$

Ti dve verjetnosti bomo izrazili z Lebesgueovim integralom po porazdelitvenem zakonu $\mu_{(X_2,Y_2)}$.

Premislimo najprej, da za poljubna neodvisna n-razsežna zvezna slučajna vektorja $\boldsymbol{Z_1}$ in $\boldsymbol{Z_2}$ velja

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{Z_1} < \boldsymbol{Z_2}) &= P((\boldsymbol{Z_1}, \boldsymbol{Z_2}) \in D \coloneqq \{(\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}) \mid \boldsymbol{z_1} < \boldsymbol{z_2}\}) = \int_D dH_{(\boldsymbol{Z_1},\boldsymbol{Z_2})}(\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{(-\infty, \boldsymbol{z_2})} dH_{\boldsymbol{Z_1}}(\boldsymbol{z_1})\, dH_{\boldsymbol{Z_2}}(\boldsymbol{z_2}) = \int_{\mathbb{R}^n} H_{\boldsymbol{Z_1}}(\boldsymbol{z_2})\, dH_{\boldsymbol{Z_2}}(\boldsymbol{z_2}).
\end{aligned}$$

Količino Q izrazimo najprej z Lebesgueovim integralom po porazdelitvenem zakonu $\mu_{(X_2,Y_2)}$ in nato z integralom po μ_{C_2}. Po slednjem premisleku velja

$$\begin{aligned}
P(X_1 < X_2, Y_1 < Y_2) &= \int_{\mathbb{R}^2} H_1(x, y)\, dH_2(x, y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} C_1(F(x), G(y))\, dC_2(F(x), G(y)) \\
&= \int_{\mathrm{I}^2} C_1(u, v)\, dC_2(u, v).
\end{aligned}$$

Podobno izrazimo še drugi člen količine Q. V izpeljavi uporabimo enakost (2.2) in vpeljemo slučajni spremenljivki $U, V \sim \mathrm{EZ}[0,1]$, s čimer dobimo

$$\begin{aligned}
P(X_1 > X_2, Y_1 > Y_2) &= \int_{\mathbb{R}^2} \overline{H}_1(x,y)\, dH_2(x,y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \Big(1 - F(x) - G(y) + C_1(F(x), G(y))\Big)\, dH_2(x,y) \\
&= \int_{\mathrm{I}^2} (1 - u - v + C_1(u,v))\, dC_2(u,v) \\
&= 1 - \mathrm{E}(U) - \mathrm{E}(V) + \int_{\mathrm{I}^2} C_1(u,v)\, dC_2(u,v) \\
&= \int_{\mathrm{I}^2} C_1(u,v)\, dC_2(u,v).
\end{aligned}$$

Če združimo zadnji dve enačbi, dobimo

$$Q = 4 \int_{\mathrm{I}^2} C_1(u,v)\, dC_2(u,v) - 1.$$

Ker lahko vlogi slučajnih vektorjev v definiciji Q zamenjamo, velja tudi druga enakost v (3.9). Drugi del izreka očitno sledi iz enakosti (3.9). ■

Posledica 3.26. *Naj bosta X in Y zvezni slučajni spremenljivki s porazdelitvenima funkcijama F oziroma G in pripadajočo kopulo C. Naj bosta $U, V \sim \mathrm{EZ}[0,1]$ s pripadajočo kopulo C. Potem je*

$$\begin{aligned}
\tau_{X,Y} = \tau_C = Q(C,C) &= 4 \int_{\mathrm{I}^2} C(u,v)\, dC(u,v) - 1 \\
&= 4\,\mathrm{E}(C(U,V)) - 1, \\
\rho_{X,Y} = \rho_C = 3Q(C,\Pi) &= 12 \iint_{\mathrm{I}^2} C(u,v)\, du\, dv - 3 = 12 \int_{\mathrm{I}^2} uv\, dC(u,v) - 3 \qquad (3.10) \\
&= 12\,\mathrm{E}(UV) - 3 \\
&= \rho^{\text{Pearson}}(U,V) = \rho^{\text{Pearson}}(F(X), G(Y)).
\end{aligned}$$

Če je $C \preceq C'$, potem je $\tau_C \leq \tau_{C'}$ in $\rho_C \leq \rho_{C'}$.

Dokaz. Po definiciji je $\tau_{X,Y}$ enak razliki verjetnosti skladnosti in neskladnosti neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih vektorjev s pripadajočo kopulo C in zato po definiciji količine Q velja $\tau_{X,Y} = Q(C,C)$. Nadaljnje formule za τ_C so direktna posledica izreka 3.25 in enakosti (2.4).

Spearmanov $\rho_{X,Y}$ je trikratnik razlike verjetnosti skladnosti in neskladnosti slučajnih vektorjev (X_1, Y_1) in (X_2, Y_3), ki sta neodvisna, imata enaki robni porazdelitvi ter pripadajoči kopuli $C_{X_1,Y_1} = C$ oziroma $C_{X_2,Y_3} = \Pi$. Od tod sledi, da je $\rho_{X,Y} = 3Q(C,\Pi) = 3Q(\Pi, C)$. Pri izračunu $Q(C,\Pi)$ uporabimo, da je Π oziroma H_Π skupna porazdelitvena funkcija neodvisnih slučajnih spremenljivk $U, V \sim \mathrm{EZ}[0,1]$ in je zato $\mu_\Pi = \mu_U \times \mu_V = \lambda_\mathrm{I} \times \lambda_\mathrm{I}$, kjer je λ_I Lebesgueova mera na intervalu I.

Izpeljavo formul za ρ_C nadaljujemo z $\int_{\mathrm{I}^2} uv\, dC(u,v) = \mathrm{E}(UV)$ po enakosti (2.4). Za konec utemeljimo še predzadnjo enakost posledice:

$$\rho^{\text{Pearson}}(U,V) = \frac{\mathrm{E}(UV) - \mathrm{E}(U)\,\mathrm{E}(V)}{\sqrt{\mathrm{D}(U)}\sqrt{\mathrm{D}(V)}} = \frac{\mathrm{E}(UV) - \frac{1}{2}\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{12}}\sqrt{\frac{1}{12}}} = 12\,\mathrm{E}(UV) - 3.$$

■

Spearmanov ρ slučajnih spremenljivk X in Y je torej enak Pearsonovemu korelacijskemu koeficientu slučajnih spremenljivk $F(X)$ in $G(Y)$. Druga interpretacija ρ_C je naslednja:

$$\rho_C = 12 \iint_{\mathrm{I}^2} \Big(C(u,v) - \Pi(u,v)\Big)\, du\, dv,$$

tj. ρ_C je normirana ploščina med grafoma kopule C in produktne kopule Π. Spearmanov ρ slučajnih spremenljivk X in Y je torej sorazmeren „povprečni razdalji med porazdelitvijo (X,Y) in neodvisnostjo“. Izračunajmo Kendallov τ in Spearmanov ρ kopul W, Π in M z uporabo izreka 3.25.

Zgled 3.27. Naj bosta $g \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I}^2, \mathcal{B}(\mathrm{I}^2), \mu_W)$ in $h \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I}^2, \mathcal{B}(\mathrm{I}^2), \mu_M)$. Ker sta nosilca W oziroma M enaka $\{(u, 1-u) \mid u \in \mathrm{I}\}$ oziroma $\{(u,u) \mid u \in \mathrm{I}\}$ in sta robni porazdelitvi kopule porazdeljeni $\mathrm{EZ}[0,1]$, je

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{I}^2} g(u,v)\, dW(u,v) &= \int_0^1 g(u, 1-u)\, du,\\
\int_{\mathrm{I}^2} h(u,v)\, dM(u,v) &= \int_0^1 h(u,u)\, du.
\end{aligned}$$

V dokazu posledice smo že premislili, da je $d\Pi(u,v) = du\, dv$. Od tod po posledici 3.26 sledijo pričakovane vrednosti za Kendallov τ kopul W, Π in M:

$$\begin{aligned}
\tau_W &= Q(W,W) = 4\int_0^1 \max\{u + (1-u) - 1, 0\}\, du - 1 = -1,\\
\tau_\Pi &= Q(\Pi,\Pi) = 4\int_0^1\int_0^1 uv\, du\, dv - 1 = 0,\\
\tau_M &= Q(M,M) = 4\int_0^1 \min\{u,u\}\, du - 1 = 1.
\end{aligned}$$

Spearmanov ρ najhitreje izračunamo po formuli $\rho_C = 3Q(C,\Pi)$. Dobimo $\rho_W = -1$, $\rho_\Pi = 0$ in $\rho_M = 1$. Za poljubno kopulo C velja $\tau_C, \rho_C \in [-1,1]$, saj je $W \preceq C \preceq M$.

□

Izračun Kendallovega τ preko integrala $Q(C,C)$ je lahko težaven za kopule s singularnim delom. Naslednji izrek poda ugodnejšo formulo za izračun τ_C v tem primeru.

Izrek 3.28. *Za poljubni kopuli C_1 in C_2 velja*

$$\int_{\mathrm{I}^2} C_1(u,v)\, dC_2(u,v) = \frac{1}{2} - \iint_{\mathrm{I}^2} \frac{\partial}{\partial u} C_1(u,v)\, \frac{\partial}{\partial v} C_2(u,v)\, du\, dv.$$

Dokaz. Naj bosta kopuli C_1 in C_2 absolutno zvezni. Kopula C_2 ima potem gostoto $\partial^2 C_2(u,v)/\partial u \partial v$ in z integracijo po delih dokažemo, da je

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathrm{I}^2} C_1(u,v)\, dC_2(u,v) = \int_{\mathrm{I}}\int_{\mathrm{I}} C_1(u,v) \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C_2(u,v)\, du\, dv \\
&= \int_0^1 \left[\left(C_1(u,v)\, \frac{\partial}{\partial v} C_2(u,v) \right)\Bigg|_{u=0}^{u=1} - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} C_1(u,v)\, \frac{\partial}{\partial v} C_2(u,v)\, du \right] dv \\
&= \int_0^1 v\, dv - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} C_1(u,v)\, \frac{\partial}{\partial v} C_2(u,v)\, du\, dv \\
&= \frac{1}{2} - \iint_{\mathrm{I}^2} \frac{\partial}{\partial u} C_1(u,v)\, \frac{\partial}{\partial v} C_2(u,v)\, du\, dv.
\end{aligned}$$

Če kopuli C_1 in C_2 nista absolutno zvezni, potem ju aproksimiramo z zaporedjema absolutno zveznih kopul. Dokaz izpustimo in bralca napotimo k članku [29]. ■

Posledica 3.29. *Naj bosta X in Y zvezni slučajni spremenljivki s pripadajočo kopulo C. Potem je*

$$\tau_C = 1 - 4 \iint_{\mathrm{I}^2} \frac{\partial}{\partial u} C(u,v)\, \frac{\partial}{\partial v} C(u,v)\, du\, dv. \tag{3.11}$$

3.3.2 Repne lastnosti

Definirali bomo tri vrste lastnosti, ki opišejo obnašanje repov in jih izrazili preko kopul. Najprej vpeljemo najbolj splošno izmed njih.

Definicija 3.30. Slučajni spremenljivki X in Y sta **pozitivno odvisni**, če je

$$P(X \leq x, Y \leq y) \geq P(X \leq x) P(Y \leq y)$$

za vse $x, y \in \mathbb{R}$ oziroma po enakosti (2.2) ekvivalentno

$$P(X > x, Y > y) \geq P(X > x) P(Y > y).$$

Slučajni spremenljivki X in Y sta **negativno odvisni**, če je

$$P(X \leq x, Y \leq y) \leq P(X \leq x) P(Y \leq y)$$

za vse $x, y \in \mathbb{R}$ oziroma ekvivalentno $P(X > x, Y > y) \leq P(X > x) P(Y > y)$.

Slučajni spremenljivki sta pozitivno odvisni, če je „verjetnost, da sta hkrati majhni, vsaj toliko velika, kot bi bila v primeru, da sta neodvisni“. Za življenjski dobi dvokomponentnega sistema je odvisnost pogosto bolj realistična predpostavka od neodvisnosti. Na sistem na primer delujejo udari, ki povzročijo prenehanje delovanja obeh komponent hkrati. Druga možnost je, da prenehanje delovanja ene komponente poveča obremenjenost druge. V obeh primerih velja, da se „majhne“ vrednosti življenjske dobe ene komponente pojavijo hkrati z „majhnimi“ vrednostmi druge oziroma da sta življenjski dobi pozitivno odvisni.

Trditev 3.31. *Naj bosta X in Y zvezni slučajni spremenljivki s pripadajočo kopulo C. Potem sta X in Y pozitivno odvisni natanko tedaj, ko je $C \succeq \Pi$ in negativno odvisni natanko tedaj, ko je $C \preceq \Pi$.*

Dokaz. Naj bodo H, F in G porazdelitvene funkcije (X,Y), X oziroma Y in naj bosta $x, y \in \mathbb{R}$ poljubna. Neenakost iz definicije pozitivne odvisnosti je očitno ekvivalentna neenakosti $C(F(x), G(y)) \geq \Pi(F(x), G(y))$. Ker je $\overline{\operatorname{im} F} \times \overline{\operatorname{im} G} = \mathrm{I}^2$, je slednja neenakost ekvivalentna neenakosti $C(u,v) \geq \Pi(u,v)$ za vse $u, v \in \mathrm{I}$. Podobno dokažemo tudi drugi del trditve. ■

Za pozitivno odvisni slučajni spremenljivki X in Y s pripadajočo kopulo C velja $\rho_C \geq \rho_\Pi = 0$. Čeprav je pozitivna oziroma negativna odvisnost globalna lastnost, lahko nanjo gledamo tudi lokalno. Točka (u,v) je „lokalno pozitivno oziroma negativno odvisna“, če je $C(u,v) \geq \Pi(u,v)$ oziroma $C(u,v) \leq \Pi(u,v)$. Ker je $\rho_C = 12 \iint_{\mathrm{I}^2} (C(u,v) - \Pi(u,v))\, du\, dv$, lahko Spearmanov ρ interpretiramo tudi kot „povprečno odvisnost“, pozitivno in negativno hkrati.

Pozitivno odvisnost slučajnih spremenljivk X in Y lahko zapišemo tudi kot

$$P(Y \leq y \,|\, X \leq x) \geq P(Y \leq y \,|\, X \leq \infty) \tag{3.12}$$

za vse $x, y \in \mathbb{R}$. Strožji pogoj je, da $P(Y \leq y \,|\, X \leq x)$ pada v spremenljivki x za vsak $y \in \mathbb{R}$. Interpretacija te lastnosti za življenjski dobi X in Y komponent A oziroma B je naslednja: ko se življenjska doba komponente A povečuje, verjetnost „kratke“ življenjske dobe komponente B pada. Podobno lahko razmišljamo o neenakosti (3.12) v različici s funkcijami preživetja, kar je motivacija za definiciji naslednjih lastnosti.

Definicija 3.32. Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki.

- Slučajna spremenljivka **Y je v levih repih padajoča v X**, LRP$(Y|X)$, če je za vsak $y \in \mathbb{R}$ funkcija $P(Y \leq y \,|\, X \leq x)$ padajoča v spremenljivki x.
- Slučajna spremenljivka **Y je v desnih repih naraščajoča v X**, DRN$(Y|X)$, če je za vsak $y \in \mathbb{R}$ funkcija $P(Y > y \,|\, X > x)$ naraščajoča v spremenljivki x.

Iz katerekoli izmed lastnosti LRP$(Y|X)$, LRP$(X|Y)$, DRN$(Y|X)$ in DRN$(X|Y)$ očitno sledi pozitivna odvisnost. Definiramo lahko tudi lastnosti LRN in DRP tako, da v slednji definiciji zamenjamo pojma ‚naraščajoča‘ in ‚padajoča‘. Iz lastnosti LRN in DRP sledi negativna odvisnost, ki pa ni smiselna predpostavka za verjetnostni model življenjskih dob dvokomponentnega sistema iz osrednjega dela disertacije in zato teh lastnosti ne bomo obravnavali. V naslednji trditvi lastnosti LRP$(Y|X)$, LRP$(X|Y)$, DRN$(Y|X)$ in DRN$(X|Y)$ opišemo s slučajnima spremenljivkama X in Y pripadajočo kopulo.

Trditev 3.33. *Naj bosta X in Y zvezni slučajni spremenljivki s pripadajočo kopulo C. Potem je*

(i) $\mathrm{LRP}(Y|X)$ *natanko tedaj, ko je za vsak* $v \in \mathrm{I}$ *funkcija* $C(u,v)/u$ *padajoča v spremenljivki* u*,*
$\mathrm{LRP}(X|Y)$ *natanko tedaj, ko je za vsak* $u \in \mathrm{I}$ *funkcija* $C(u,v)/v$ *padajoča v spremenljivki* v*,*

(ii) $\mathrm{DRN}(Y|X)$ *natanko tedaj, ko je za vsak* $v \in \mathrm{I}$ *funkcija*

$$\frac{1-u-v+C(u,v)}{1-u} \quad \textit{naraščajoča v spremenljivki } u,$$

oziroma ekvivalentno funkcija $(v - C(u,v))/(1-u)$ *padajoča v spremenljivki* u*,*
$\mathrm{DRN}(X|Y)$ *natanko tedaj, ko je za vsak* $u \in \mathrm{I}$ *funkcija*

$$\frac{1-u-v+C(u,v)}{1-v} \quad \textit{naraščajoča v spremenljivki } v,$$

oziroma ekvivalentno funkcija $(u - C(u,v))/(1-v)$ *padajoča v spremenljivki* v*.*

(iii) $\mathrm{LRP}(Y|X)$ *natanko tedaj, ko za vsak* $v \in \mathrm{I}$ *velja* $\partial C(u,v)/\partial u \leq C(u,v)/u$ *za skoraj vsak* u*,*
$\mathrm{LRP}(X|Y)$ *natanko tedaj, ko za vsak* $u \in \mathrm{I}$ *velja* $\partial C(u,v)/\partial v \leq C(u,v)/v$ *za skoraj vsak* v*,*

(iv) $\mathrm{DRN}(Y|X)$ *natanko tedaj, ko za vsak* $v \in \mathrm{I}$ *velja*

$$\frac{\partial}{\partial u} C(u,v) \geq \frac{v - C(u,v)}{1-u} \quad \textit{za skoraj vsak } u,$$

$\mathrm{DRN}(X|Y)$ *natanko tedaj, ko za vsak* $u \in \mathrm{I}$ *velja*

$$\frac{\partial}{\partial v} C(u,v) \geq \frac{u - C(u,v)}{1-v} \quad \textit{za skoraj vsak } v.$$

Dokaz. Naj bodo H, F in G porazdelitvene funkcije (X,Y), X oziroma Y. V dokazu upoštevamo, da je kopula C je enolično definirana na $\overline{\mathrm{im}\, F} \times \overline{\mathrm{im}\, G} = \mathrm{I}^2$.

(i) Za vsak $y \in \mathbb{R}$ je funkcija

$$P(Y \leq y \,|\, X \leq x) = \frac{P(X \leq x, Y \leq y)}{P(X \leq x)} = \frac{C(F(x), G(y))}{F(x)}$$

padajoča v spremenljivki x natanko tedaj, ko je za vsak $v \in \mathrm{I}$ funkcija $C(u,v)/u$ padajoča v spremenljivki u, saj sta F in G naraščajoči. Simetrično dokažemo drugo trditev te točke.

(ii) Za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ po enakosti (2.2) velja

$$P(Y > y \,|\, X > x) = \frac{P(X > x, Y > y)}{P(X > x)} = \frac{1 - F(x) - G(y) + C(F(x), G(y))}{1 - F(x)}.$$

Za vsak $y \in \mathbb{R}$ je torej funkcija $P(Y > y \,|\, X > x)$ naraščajoča v spremenljivki x natanko tedaj, ko je za vsak $v \in \mathrm{I}$ funkcija $(1-u-v+C(u,v))/(1-u)$ naraščajoča v spremenljivki u. To je očitno ekvivalentno dejstvu, da je $(v - C(u,v))/(1-u)$ padajoča v u. Podobno dokažemo tudi drugi del te točke.

(iii) Naj bosta $u, v \in \mathbb{R}$ poljubna. Po posledici 3.5 vemo, da obstaja $\partial C(u,v)/\partial u$ za skoraj vsak u in $\partial C(u,v)/\partial v$ za skoraj vsak v. Ker je odvod padajoče funkcije nepozitiven in smo dokazali (i), je dokaz te točke končan po kratkem računu.

(iv) Dokažemo podobno, kot smo dokazali prejšnjo točko.

■

Definiramo še naslednjo repno lastnost, iz katere v primeru zveznih slučajnih spremenljivk sledita lastnosti LRP in DRN. V trditvi za definicijo dokažemo, kako se ta lastnost izraža preko kopule.

Definicija 3.34. Slučajna spremenljivka **$\boldsymbol{Y}$ je stohastično naraščajoča v $\boldsymbol{X}$**, SN$(Y|X)$, če je za vsak $y \in \mathbb{R}$ funkcija $P(Y > y \,|\, X = x)$ naraščajoča v spremenljivki x.

Trditev 3.35. *Naj bosta X in Y zvezni slučajni spremenljivki s pripadajočo kopulo C. Potem je*

(i) SN$(Y|X)$ *natanko tedaj, ko je za vsak $v \in \mathrm{I}$ funkcija $\partial C(u,v)/\partial u$ padajoča v spremenljivki u za skoraj vsak u, oziroma ekvivalentno, ko je za vsak $v \in \mathrm{I}$ funkcija $C(u,v)$ konkavna v u,*

(ii) SN$(X|Y)$ *natanko tedaj, ko je za vsak $u \in \mathrm{I}$ funkcija $\partial C(u,v)/\partial v$ padajoča v spremenljivki v za skoraj vsak v, oziroma ekvivalentno, ko je za vsak $u \in \mathrm{I}$ funkcija $C(u,v)$ konveksna v v.*

Dokaz. Naj bodo H, F in G porazdelitvene funkcije (X,Y), X oziroma Y. Funkcija $P(Y \le y \,|\, X = x) = 1 - P(Y > y \,|\, X = x)$ je za vsak $y \in \mathbb{R}$ padajoča v spremenljivki x natanko tedaj, ko je za vsak $v \in \mathrm{I}$ funkcija $P(G(Y) \le v \,|\, F(X) = u)$ padajoča v spremenljivki u. Slučajni spremenljivki $U = F(X)$ in $V = G(Y)$ sta po lemi 2.8 porazdeljeni enakomerno zvezno na intervalu $[0,1]$, njuna pripadajoča kopula pa je enaka C. V izpeljavi (3.8) smo dokazali, da je $P(V \le v \,|\, U = u) = \partial C(u,v)/\partial u$ za skoraj vsak u, s čimer je dokaz prve točke končan. Podobno dokažemo tudi drugo točko. ■

Kot zadnjo izmed lastnosti, ki jih opazujemo pri kopulah, navedimo repna koeficienta. Interpretiramo ju kot verjetnosti, da je ena slučajna spremenljivka „velika“ oziroma „majhna“, če je druga „velika“ oziroma „majhna“. Tudi ta dva koeficienta sta odvisna le od pripadajoče kopule, kar pokaže naslednja trditev.

Definicija 3.36. Naj bosta X in Y zvezni slučajni spremenljivki s porazdelitvenima funkcijama F in G. **Spodnji repni koeficient** je enak

$$\lambda_L = \lim_{t \downarrow 0} P(Y \le G^{-1}(t) \,|\, X \le F^{-1}(t)),$$

če limita obstaja. **Zgornji repni koeficient**, če obstaja, je enak

$$\lambda_U = \lim_{t \uparrow 1} P(Y > G^{-1}(t) \,|\, X > F^{-1}(t)).$$

Trditev 3.37. *Naj bosta X in Y zvezni slučajni spremenljivki s pripadajočo kopulo C. Če limiti v definiciji repnih koeficientov obstajata, potem je*

$$\lambda_L = \lim_{t\downarrow 0} \frac{C(t,t)}{t} = \delta_C'(0+),$$
$$\lambda_U = 2 - \lim_{t\uparrow 1} \frac{1-C(t,t)}{1-t} = 2 - \delta_C'(1-).$$

Dokaz. Naj bosta F in G porazdelitveni funkciji slučajnih spremenljivk X oziroma Y. Ker sta F in G zvezni, je $F(F^{-1}(t)) = G(G^{-1}(t)) = t$ za vsak $t \in \mathbb{R}$ in slučajni spremenljivki $U = F(X)$ ter $V = G(Y)$ sta porazdeljeni enakomerno zvezno na intervalu $[0,1]$. Od tod sledi, da je

$$\lambda_L = \lim_{t\downarrow 0} P(V \le t \,|\, U \le t) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{P(U \le t, V \le t)}{P(U \le t)} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{C(t,t)}{t},$$
$$\lambda_U = \lim_{t\uparrow 1} P(V > t \,|\, U > t) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1 - F_U(t) - F_V(t) + C(t,t)}{1 - F_U(t)} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1 - 2t + C(t,t)}{1-t}$$
$$= 2 - \lim_{t\downarrow 0} \frac{1 - C(t,t)}{1-t}.$$

Druga izraza za λ_L in λ_U dobimo z uporabo L'Hôpitalovega pravila. ■

Repna koeficienta zavzameta vrednosti v intervalu $[0,1]$. Kopuli Π in W imata ničelna oba repna koeficienta, medtem ko sta repna koeficienta kopule M enaka ena. Neničeln spodnji oziroma zgornji repni koeficient se na razsevnih diagramih kaže kot „konica" opazovanj ob točkah $(0,0)$ oziroma $(1,1)$. Bližje kot je repni koeficient vrednosti ena, bolj „koničast" je razsevni diagram pri točkah $(0,0)$ oziroma $(1,1)$.

Če je $C_1 \preceq C_2$, potem je spodnji oziroma zgornji repni koeficient kopule C_1 manjši ali enak spodnjemu oziroma zgornjemu repnemu koeficientu C_2.

3.4 Večrazsežne kopule

V tem razdelku definiramo večrazsežno kopulo in navedemo Sklarov izrek v n razsežnostih. Dokaze trditev tega razdelka opišemo le idejno ali pa jih v celoti izpustimo, saj so tehnično zahtevni in poleg tega obravnavamo v osrednjem delu disertacije družino dvorazsežnih kopul.

Definicija 3.38. Funkcija $C\colon A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \longrightarrow [0,1]$, $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \mathrm{I}$, $n \ge 2$, je ***n*-razsežna podkopula**, ali na kratko ***n*-podkopula**, če sta $0, 1 \in A_j$ za vsak j in so izpolnjeni naslednji pogoji:

- $C(\boldsymbol{u}) = 0$ za vsak $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \operatorname{dom} C$, pri katerem je $u_i = 0$ za vsaj en i,
- $C(1, \ldots, 1, u, 1, \ldots, 1) = u$ za vsak $u \in A_i$ in za vsak i,
- C je n-naraščajoča.

Podkopula z domeno I^n je ***n*-razsežna kopula**, ali na kratko ***n*-kopula**.

Če v n-razsežni kopuli postavimo $n-k$ komponent na 1, $k \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$, dobimo funkcijo z domeno I^k, ki je k-kopula in jo poimenujemo ***k*-robna kopula**. Podobno kot v razdelku 3.1 dokažemo, da je n-podkopula naraščajoča v vsaki spremenljivki posebej in Lipschitzeva z Lipschitzevo konstanto 1, iz česar sledi enakomerna zveznost. Za dokaz bralca napotimo k članku [43].

Za $n \geq 2$ definiramo ***n*-razsežno Fréchet-Hoeffdingovo spodnjo mejo** W_n, ***n*-razsežno Fréchet-Hoeffdingovo zgornjo mejo** M_n in ***n*-razsežno produktno kopulo** Π_n z naslednjimi predpisi:

$$\begin{aligned}
W_n(\boldsymbol{u}) &= \max\{u_1 + u_2 + \ldots + u_n - n + 1, 0\}, \\
M_n(\boldsymbol{u}) &= \min\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \\
\Pi_n(\boldsymbol{u}) &= u_1 u_2 \ldots u_n.
\end{aligned}$$

Funkciji M_n in Π_n sta kopuli za vsak $n \geq 2$, medtem ko je W_n kopula le za $n = 2$, saj za $n > 2$ velja $V_{W_n}((\mathbf{1/2}, \mathbf{1}]) = 1 - n/2 < 0$. Dejstvo, da je W_n kopula natanko za $n = 2$, je iz verjetnostne interpretacije W_n intuitivno jasno. Kopula W_2 je pripadajoča kopula enakomerno zvezno porazdeljenih slučajnih spremenljivk U_1 in U_2 natanko tedaj, ko je $U_2 = 1 - U_1$ skoraj gotovo, tj. slučajni spremenljivki sta si „nasprotni“. Problem je, da v razsežnosti $n \geq 3$ ni jasno, kako bi „nasprotnost“ n slučajnih spremenljivk sploh definirali.

Za poljuben $n \geq 2$ in vsako n-kopulo C velja $W_n(\boldsymbol{u}) \leq C(\boldsymbol{u}) \leq M_n(\boldsymbol{u})$ za vsak $\boldsymbol{u} \in \mathrm{I}^n$. Kljub temu, da za $n > 2$ funkcija W_n ni n-kopula, je ocena $C(\boldsymbol{u}) \geq W_n(\boldsymbol{u})$ najboljša možna v smislu naslednje trditve.

Trditev 3.39. *Naj bo $n > 3$ in $\boldsymbol{u} \in \mathrm{I}^n$. Potem obstaja taka n-kopula C, odvisna od $\boldsymbol{u}$, da je $C(\boldsymbol{u}) = W_n(\boldsymbol{u})$.*

Dokaz, ki ga je moč najti v knjigi [36], *Theorem 2.10.13*, izpustimo. Sklarov izrek 3.14 lahko posplošimo na poljubno razsežnost n.

Izrek 3.40. Sklarov izrek v *n* razsežnostih. *Naj bo H n-razsežna porazdelitvena funkcija z robnimi porazdelitvenimi funkcijami $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Potem obstaja taka n-kopula C, da velja*

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_n(x_n)) \quad \text{za vsak } \boldsymbol{x} \in \overline{\mathbb{R}}^n. \tag{3.13}$$

Če so funkcije $F_1, F_2, \ldots, F_n$ zvezne, potem je C enolično določena, v nasprotnem primeru pa je C enolična le na $\overline{\operatorname{im} F_1} \times \overline{\operatorname{im} F_2} \times \ldots \times \overline{\operatorname{im} F_n}$.

Obratno, če je C n-kopula in so $F_1, F_2, \ldots, F_n$ enorazsežne porazdelitvene funkcije, potem je z enačbo (3.13) *definirana n-razsežna porazdelitvena funkcija H, katere robne porazdelitvene funkcije so enake $F_1, F_2, \ldots, F_n$.*

Navedimo le idejo dokaza, ki je enaka tisti iz razdelka 3.2. Najprej dokažemo, da lahko vsako n-podkopulo razširimo do n-kopule. Ideja je enaka kot v primeru $n = 2$ (izrek 3.11), in sicer razširimo podkopulo do kopule preko „multilinearne interpolacije“, podobno kot v (3.2). Dokaz, ki ga lahko najdemo v članku [47], je bolj kompleksne in tehnično zahtevne narave, zato ga izpustimo. Nadalje velja, da za poljubno n-razsežno porazdelitveno funkcijo H z robnimi porazdelitvenimi funkcijami $F_1, F_2, \ldots, F_n$, obstaja enolično določena n-podkopula C z domeno $\overline{\operatorname{im} F_1} \times \overline{\operatorname{im} F_2} \times \ldots \times \overline{\operatorname{im} F_n}$, za katero velja enakost (3.13). Dokaz je direktna posplošitev dokaza trditve 3.13. Za konec le še združimo pravkar navedeni trditvi in dokažemo obrat, zopet analogno kot v razdelku 3.2. Navedimo še posledico Sklarovega izreka, s katero dobimo metodo za konstruiranje n-kopul.

Posledica 3.41. *Naj bodo H, $F_1, F_2, \ldots, F_n$ in C kot v izreku* 3.40. *Potem za vsak $\boldsymbol{u} \in \mathrm{I}^n$ velja*

$$C(u_1, u_2, \ldots, u_n) = H(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \ldots, F_n^{-1}(u_n)).$$

Na n-kopule lahko gledamo kot na zožitve n-razsežnih porazdelitvenih funkcij, katerih robne porazdelitve so enakomerno zvezne porazdelitve na $[0, 1]$. Če za slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$ s porazdelitvenimi funkcijami $F_1, F_2, \ldots, F_n$ in skupno n-razsežno porazdelitveno funkcijo H velja (3.13), potem C imenujemo **slučajnim spremenljivkam $\boldsymbol{X_1, X_2, \ldots, X_n}$ pripadajoča $\boldsymbol{n}$-kopula** in jo standardno označimo s $C_{X_1, X_2, \ldots, X_n} = C_{\boldsymbol{X}}$. Dokaz naslednje trditve je podoben dokazu trditve 3.16.

Trditev 3.42. Verjetnostni pomen $\boldsymbol{\Pi_n}$ in $\boldsymbol{M_n}$. *Naj bo $n \geq 2$ in $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ slučajni vektor, kjer so $X_1, \ldots, X_n$ zvezne slučajne spremenljivke.*

- *Slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$ so neodvisne natanko tedaj, ko je $C_{\boldsymbol{X}} = \Pi_n$.*
- *Za vsak i je slučajna spremenljivka X_i skoraj gotovo strogo naraščajoča funkcija ene izmed slučajnih spremenljivk $X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n$ natanko tedaj, ko je $C_{\boldsymbol{X}} = M_n$.*

Konstrukcija n-kopul je mnogo zahtevnejša od konstrukcije dvorazsežnih kopul. Naivni pristop bi bila kompozicija 2-kopul. Funkciji

$$C(u, v, w) = \Pi(M(u, v), w) \quad \text{in} \quad C(u, v, w) = W(M(u, v), w)$$

sta na primer 3-kopuli. Žal s tem pristopom velikokrat dobimo funkcije, ki niso n-kopule. Funkcija $C(u, v, w) = W(W(u, v), w) = W_3(u, v, w)$ ni 3-kopula.

Po Sklarovem izreku velja, da je $C(F(x), G(y))$ dvorazsežna porazdelitvena funkcija za vsako 2-kopulo C in poljubni enorazsežni porazdelitveni funkciji F ter G. Porodi se naravno vprašanje, ali lahko ta postopek posplošimo tako, da za F in G vzamemo večrazsežni porazdelitveni funkciji. Negativen odgovor poda naslednja trditev iz članka [16].

Izrek 3.43. *Naj bosta m in n taki naravni števili, da je $m+n \geq 3$. Naj bo C taka 2-kopula, da je funkcija $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = C(F(\boldsymbol{x}),G(\boldsymbol{y}))$ $(m+n)$-razsežna porazdelitvena funkcija, za katero velja $H(\boldsymbol{x},\infty) = F(\boldsymbol{x})$ in $H(\infty,\boldsymbol{y}) = G(\boldsymbol{y})$ za vsako m-razsežno porazdelitveno funkcijo F ter n-razsežno porazdelitveno funkcijo G. Potem je $C = \Pi$.*

V več razsežnostih se pojavi tako imenovani *problem združljivosti.* Iz vsake n-kopule dobimo $\binom{n}{k}$ k-kopul ($n-k$ komponent postavimo na 1), medtem ko za izbor $\binom{n}{k}$ k-kopul velikokrat velja, da niso hkrati k-robne kopule nobene n-kopule.

Poglavje 4

Pregled metod konstrukcij kopul

V tem poglavju predstavimo nekaj metod za konstruiranje kopul in nekatere pomembne družine kopul, ki izhajajo iz teh metod. V prvem razdelku opišemo metode, preko katerih z uporabo ustreznih transformacij dobimo iz že obstoječih kopul nove kopule. Drugi razdelek je namenjen tako imenovanim geometrijskim metodam. S temi metodami izpeljemo kopule, ki zadoščajo neki želeni analitični lastnosti. V tretjem in četrtem razdelku naredimo pregled Arhimedovih ter eliptičnih kopul. Ta dva razreda zajemata veliko družin kopul z raznovrstnimi odvisnostnimi lastnostmi, zaradi česar so ravno te vrste kopul pogosto uporabljene za modeliranje slučajnih spremenljivk. Za bolj podroben študij različnih družin kopul bralca napotimo h knjigama [36, 32]. Pregled uporabe kopul, še posebej v finančni matematiki, najdemo v knjigah [3, 22].

Prav tako pomembni družini Marshall-Olkinovih in Marshallovih kopul sta podrobno predstavljeni v naslednjem poglavju.

4.1 Transformacije kopul

V tem razdelku opišemo metode, preko katerih z uporabo primerne transformacije dobimo nove kopule iz že obstoječih.

4.1.1 Konveksne kombinacije kopul

Hitro se lahko prepričamo, da je poljubna končna konveksna kombinacija kopul prav tako kopula. Ta sklep lahko posplošimo na poljubno (lahko tudi neštevno neskončno) konveksno kombinacijo kopul na naslednji način.

Definicija 4.1. Naj bo $\{C_\theta\}_\theta$ neka družina kopul. Parameter θ naj bo realizacija slučajne spremenljivke Θ s porazdelitvenim zakonom μ_Θ. **Konveksna vsota kopul $\{C_\theta\}_\theta$ glede na μ_Θ** je funkcija

$$C(u,v) = \int_{\mathbb{R}} C_\theta(u,v)\, d\mu_\Theta(\theta).$$

Trditev 4.2. *Konveksna vsota vsake družine kopul $\{C_\theta\}_\theta$ glede na poljubno porazdelitev μ_Θ je kopula.*

Dokaz. Pogoj **(C1)** je očitno izpolnjen. Ker je

$$C(u,1) = \int_{\mathbb{R}} u\, d\mu_\Theta(\theta) = u \int_{\mathbb{R}} d\mu_\Theta(\theta) = u$$

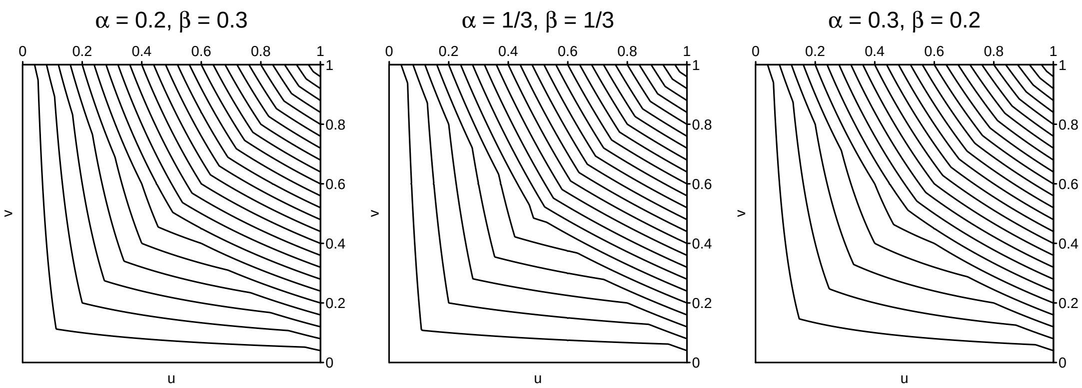
in podobno $C(1,v) = v$, velja pogoj **(C2)**. Funkcija je C je 2-naraščajoča, saj za poljuben pravokotnik R velja $V_C(R) = \int_{\mathbb{R}} V_{C_\theta}(R)\, d\mu_\Theta(\theta) \geq 0$. ■

Porazdelitev Θ je lahko odvisna od nekega parametra α. Konveksna vsota je torej zopet družina kopul, podana s $C_\alpha(u,v) = \int_{\mathbb{R}} C_\theta(u,v)\, d\mu_{\Theta_\alpha}(\theta)$. Če je Θ porazdeljena diskretno na končni množici točk, potem je C iz definicije 4.1 končna konveksna kombinacija kopul. Primer take kopule je Fréchetova kopula.

Zgled 4.3. Fréchetova družina kopul.
Naj bosta $\alpha, \beta \in [0,1]$ taka, da je $\alpha + \beta \leq 1$. Dvoparametrična *Fréchetova družina kopul* je podana s

$$C_{\alpha,\beta}(u,v) = \alpha W(u,v) + (1-\alpha-\beta)\Pi(u,v) + \beta M(u,v).$$

Ker so W, Π in M po lemi 3.10 kopule, je po zadnji trditvi $C_{\alpha,\beta}$ kopula. Družina kopul je **celovita**, če vsebuje W, Π in M. Fréchetova družina kopul je tipičen primer celovite družine kopul. Oba repna koeficienta sta enaka β. Na sliki 4.1 so prikazani grafi nivojnic Fréchetove kopule pri različnih vrednostih parametrov α in β.



Slika 4.1. Grafi nivojnic Fréchetove družine kopul pri različnih vrednostih parametrov.

□

4.1.2 Kopule ekstremnih vrednosti

Iz naslednje trditve izhaja preprosta metoda transformacije kopul, ki jo v nadaljevanju posplošimo.

Trditev 4.4. *Naj bodo* $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$ *neodvisni enako porazdeljeni slučajni vektorji s skupno porazdelitveno funkcijo* H*, robnima porazdelitvenima funkcijama* F *in* G *ter pripadajočo kopulo* C*. Naj bo* $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ *in* $Y_{(n)} = \max\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$*. Z* $F_{(n)}$*,* $G_{(n)}$ *in* $H_{(n)}$ *označimo porazdelitvene funkcije* $X_{(n)}$*,* $Y_{(n)}$ *oziroma* $(X_{(n)}, Y_{(n)})$*. Naj bo* $H_{(n)} = C_{(n)}(F_{(n)}, G_{(n)})$*. Potem velja* $F_{(n)} = F^n$*,* $G_{(n)} = G^n$*,* $H_{(n)} = H^n$ *in za vse* $u, v \in \mathrm{I}$ *je*

$$C_{(n)}(u, v) = C^n(u^{1/n}, v^{1/n}). \tag{4.1}$$

Za poljubno kopulo C *in* $n \in \mathbb{N}$ *je torej funkcija* $C_{(n)}(u, v) \coloneqq C^n(u^{1/n}, v^{1/n})$ *prav tako kopula.*

Dokaz. Ker so $X_1, X_2, \ldots, X_n$ neodvisne in enako porazdeljene, je

$$F_{(n)}(x) = P(X_1 \le x, X_2 \le x, \ldots, X_n \le x) = F(x)^n$$

za vsak $x \in \mathbb{R}$. Podobno je $G_{(n)} = G^n$. Zaradi neodvisnosti in enake porazdeljenosti slučajnih vektorjev je

$$\begin{aligned} H_{(n)}(x, y) &= P(X_1 \le x, X_2 \le x, \ldots, X_n \le x,\ Y_1 \le y, Y_2 \le y, \ldots, Y_n \le y) \\ &= P\Big((X_1, Y_1) \le (x, y), (X_2, Y_2) \le (x, y), \ldots, (X_n, Y_n) \le (x, y)\Big) \\ &= H(x, y)^n. \end{aligned}$$

Ta račun lahko zapišemo naprej kot

$$H_{(n)}(x, y) = H(x, y)^n = C(F(x), G(y))^n = C\Big((F_{(n)}(x))^{1/n}, (G_{(n)}(y))^{1/n}\Big)^n,$$

zaradi česar je $C_{(n)}(u, v) = C^n(u^{1/n}, v^{1/n})$. ■

Transformacija kopule $C_{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, je poseben primer splošnejše transformacije iz člankov [17, 27]. Naj bo $\gamma : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ zvezna strogo naraščajoča funkcija, za katero je $\gamma(0) = 0$ in $\gamma(1) = 1$. Funkcija γ je torej obrnljiva. Naj bo γ^{-1} njen obrat. Za poljubno kopulo C je funkcija

$$C_\gamma(u, v) = \gamma^{-1}\Big(C(\gamma(u), \gamma(v))\Big) \tag{4.2}$$

kopula natanko tedaj, ko je γ konkavna (ali ekvivalentno: γ^{-1} konveksna). V članku [9] je dokazana še nadaljnja posplošitev: trditev drži tudi, če predpostavko $\gamma(0) = 0$ izpustimo in je $\gamma^{-1} \colon [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ posplošeni obrat funkcije γ. Primer te transformacije kopul so tudi Arhimedove kopule, ki jih bomo podrobneje obravnavali v razdelku 4.3.

Za vsak $r \in (0, \infty)$ in funkcijo $\gamma_r(t) = t^{1/r}$ označimo $C_{(r)} \coloneqq C_{\gamma_r}$. Za vsak $r \in (0, \infty)$ velja torej $\Pi_{(r)} = \Pi$ in $M_{(r)} = M$.

Definicija 4.5. Kopula C je **maksimalno stabilna**, če je $C_{(r)} = C$ za vsak $r \in (0, \infty)$. Kopula C_* je **kopula ekstremnih vrednosti**, če obstaja taka kopula C, da za vsak $u, v \in \mathrm{I}$ obstaja limita, za katero je

$$C_*(u, v) = \lim_{n \to \infty} C_{(n)}(u, v).$$

Če kopula ekstremnih vrednosti obstaja, potem je očitno res kopula. Kopula je maksimalno stabilna natanko tedaj, ko je kopula ekstremnih vrednosti. Kopula W ni maksimalno stabilna.

Metoda konstrukcije kopul ekstremnih vrednosti oziroma ekvivalentno maksimalno stabilnih kopul je opisana v članku [38]. Naj bo C poljubna maksimalno stabilna kopula. Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki, ki sta porazdeljeni eksponentno s parametrom ena in je C njuna pripadajoča kopula preživetja. Skupna funkcija preživetja je torej podana s $\overline{H}(x, y) = C(e^{-x}, e^{-y})$, $x, y > 0$ oziroma $C(u, v) = \overline{H}(-\ln u, -\ln v)$, $u, v \in \mathrm{I}$. Ker je C maksimalno stabilna, je za vsak $x, y > 0$ in poljuben $r > 0$

$$\overline{H}(rx, ry) = C^r(e^{-x}, e^{-y}) = \overline{H}^r(x, y). \tag{4.3}$$

Vpeljemo novi spremenljivki $r > 0$ in $t \in (0, 1)$ s predpisom $(x, y) = (r(1 - t), rt)$ oziroma $(r, t) = (x + y, y/(x + y))$. Upoštevamo še enakost (4.3) in dobimo, da je

$$\overline{H}(x, y) = \overline{H}(r(1 - t), rt) = \overline{H}^r(1 - t, t) = C^r(e^{-(1-t)}, e^{-t}).$$

Definiramo funkcijo $A : [0, 1] \longrightarrow [1/2, 1]$ s predpisom $A(t) = -\ln C(e^{-(1-t)}, e^{-t})$ oziroma ekvivalentno $C(e^{-(1-t)}, e^{-t}) = e^{-A(t)}$. Nadaljujemo izpeljavo s

$$\overline{H}(x, y) = e^{-rA(t)} = e^{-(x+y)A(y/(x+y))}.$$

Če vstavimo še $(x, y) = (-\ln u, -\ln v)$, pokažemo, da je za primerno izbrano funkcijo $A\colon [0, 1] \longrightarrow [1/2, 1]$ poljubna maksimalno stabilna kopula oblike

$$C(u, v) = C_A(u, v) = \exp\left(\ln(uv) A\left(\frac{\ln v}{\ln(uv)}\right)\right). \tag{4.4}$$

Izkaže se, da je s predpisom (4.4) res definirana kopula, če je $A : [0, 1] \longrightarrow [1/2, 1]$ konveksna funkcija, za katero velja $A(0) = A(1) = 1$ in $\max\{t, 1 - t\} \le A(t) \le 1$ (knjiga [23]).

V primeru, ko je $A(t) = 1$, je $C_A(u, v) = \Pi$. Za $A(t) = \max\{t, 1 - t\}$ dobimo $C_A = M$. Če je $A(1/2) > 1/2$, je spodnji repni koeficient enak nič, sicer pa je enak ena. Zgornji repni koeficient je enak $2(1 - A(1/2))$. Ob tem poudarimo, da je $A(1/2) = 1/2$ natanko tedaj, ko je $C_A = M$.

4.2 Geometrijske metode

V tem razdelku izpeljemo družine kopul, ki zadoščajo določenim geometrijskim lastnostim. Poiščemo lahko na primer singularne kopule z določeno obliko nosilca, ali pa kopule, katerih odseki pripadajo neki družini funkcij.

4.2.1 Preureditve Fréchet-Hoeffdingove zgornje meje

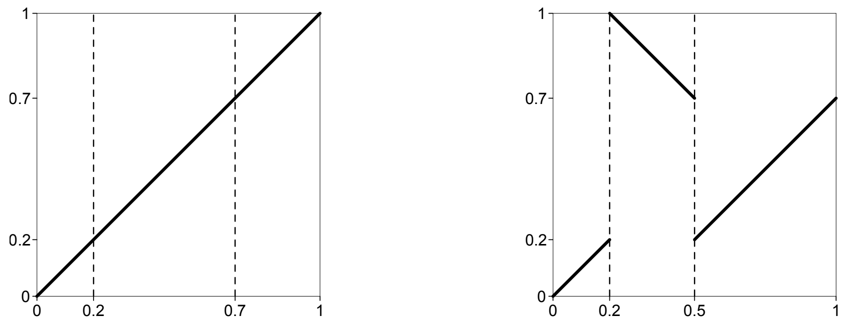
Preureditve Fréchet-Hoeffdingove zgornje meje M, angleško *shuffles of M*, so singularne kopule, ki jih dobimo na naslednji način: „Kvadrat I^2, opremljen s porazdelitvenim zakonom μ_M, navpično razrežemo na končno mnogo trakov, ki jih nato med seboj premešamo oziroma preuredimo in nekatere izmed njih obrnemo okoli svoje navpične simetrijske osi.“

Podajmo še bolj formalno definicijo. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in $\mathscr{J} = \{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$ delitev intervala I na n zaprtih podintervalov, tj. $\bigcup_i J_i = \mathrm{I}$, $J_i = [a_i, b_i]$ za vsak i in $J_i \cap J_k$ vsebuje kvečjemu eno točko za vse i, k. Naj bo π permutacija množice {1,2,. . . ,n} in $f : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{-1, 1\}$ neka funkcija. **Preureditev Fréchet--Hoeffdingove zgornje meje M** je singularna kopula, katere pripadajoči slučajni vektor je porazdeljen enakomerno zvezno na uniji daljic, dobljeni na naslednji način: kvadrat I^2 opremimo z diagonalo $\{(u, u) \,|\, u \in \mathrm{I}\}$, trakove $\{J_i \times \mathrm{I}\}_{i=1}^n$ preuredimo glede na permutacijo π in nato trak $J_i \times \mathrm{I}$ prezrcalimo čez daljico $\{a_i + (b_i - a_i)/2\} \times \mathrm{I}$ za vsak i, za katerega je $f(i) = -1$. Dobljeno kopulo označimo z $M(n, \mathscr{J}, \pi, f)$, kjer permutacijo π predstavimo z vektorjem njenih slik $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$.

Kot primer predstavimo nosilec preureditve

$$M(3, \{[0, 0.2], [0.2, 0.7], [0.7, 1]\}, (1, 3, 2), f), \tag{4.5}$$

kjer je $f(1) = f(2) = 1$ in $f(3) = -1$. Na levi strani slike 4.2 je predstavljen nosilec zgornje meje M z „razrezom na trakove“, na desni pa je nosilec preureditve (4.5). Poudarimo še, da je graf vsake preureditve M sestavljen iz ploskev.



Slika 4.2. Na levi: nosilec M z „razrezom na trakove“. Na desni: nosilec preureditve (4.5).

Slučajni spremenljivki X in Y sta **medsebojno popolno odvisni**, če obstaja taka injektivna funkcija $g\colon \operatorname{im} X \longrightarrow \operatorname{im} Y$, da je $Y = g(X)$ skoraj gotovo, tj. vsaka izmed slučajnih spremenljivk X in Y je deterministično določena z drugo. Relacijo medsebojne popolne odvisnosti lahko interpretiramo kot „nasprotje neodvisnosti“. Ker je nosilec vsake preureditve M graf injektivne funkcije, sta slučajni spremenljivki X in Y, katerih pripadajoča kopula je preureditev M, medsebojno popolno odvisni.

V člankih [26, 35] je dokazano, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja taka preureditev M, ki jo označimo s C_ε, da je

$$\sup_{u,v \in \mathrm{I}} |C_\varepsilon(u, v) - \Pi(u, v)| < \varepsilon. \tag{4.6}$$

V supremum normi je torej lahko limita kopul, ki pripadajo medsebojno popolno odvisnim slučajnim spremenljivkam, enaka produktni kopuli – kopuli neodvisnosti. Ta rezultat lahko posplošimo tako, da produktno kopulo Π zamenjamo s poljubno kopulo [35]. Od tod sledi, da so glede na supremum normo preureditve kopule M goste v množici kopul.

Zaporedje slučajnih vektorjev $\{\boldsymbol{X}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ s porazdelitvenimi funkcijami $\{H_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ **konvergira po zakonu** proti slučajnemu vektorju $\boldsymbol{X}$ s porazdelitveno funkcijo H, če velja $H_m(\boldsymbol{x}) \xrightarrow{m\to\infty} H(\boldsymbol{x})$ za vsak $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, pri katerem je H zvezna. Naslednja trditev je posledica definicije konvergence po zakonu in (4.6).

Trditev 4.6. *Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki z zveznima porazdelitvenima funkcijama F oziroma G. Potem obstaja zaporedje slučajnih vektorjev $\{(X_n, Y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, za katere je pripadajoča kopula (X_n, Y_n) neka preureditev M, $X_n \sim F$ in $Y_n \sim G$ za vsak $n\in\mathbb{N}$ ter (X_n, Y_n) konvergira po zakonu proti (X, Y).*

Konvergenca po zakonu je torej prešibka za razlikovanje med zveznimi porazdelitvami slučajnih vektorjev. Če sta po drugi strani X in Y diskretni slučajni spremenljivki, ki nista medsebojno popolno odvisni, potem ne obstaja zaporedje slučajnih vektorjev, katerih pripadajoče kopule so preureditve M, ki konvergira po zakonu k (X, Y) (članek [48]).

4.2.2 Kopule s predpisanimi odseki

V tem podrazdelku predstavimo kopule, ki jih dobimo tako, da na njenih odsekih (vodoravnih, navpičnih, diagonalnih, itn.) predpišemo določeno obliko funkcije. Odseki imajo tudi verjetnostno interpretacijo. Naj bosta $U, V \sim \mathrm{EZ}[0,1]$ slučajni spremenljivki s pripadajočo kopulo C. Ker za vsak $u_0\in(0,1]$ velja

$$P(V \leq v \,|\, U \leq u_0) = \frac{C(u_0, v)}{u_0},$$

je vsak navpični odsek $C(u_0, \cdot)$ sorazmeren porazdelitveni funkciji V pri pogoju $U \leq u_0$. Za diagonalni odsek kopule velja

$$\delta_C(t) = P(U \leq t, V \leq t) = P(\max\{U, V\} \leq t) = F_{\max\{U,V\}}(t).$$

Kopule z linearnimi vodoravnimi (navpičnimi) odseki

Poiščimo najprej vse kopule, katerih vodoravni odseki so linearne funkcije, tj.

$$C(u, v) = a(v)u + b(v)$$

za vse $u, v \in \mathrm{I}$ za neki funkciji $a, b : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$. Iz robnih pogojev kopule sledi, da je $0 = C(0, v) = b(v)$ in $v = C(1, v) = a(v)$ za vsak $v \in \mathrm{I}$. Taka je torej natanko ena kopula, in sicer produktna kopula. Enako dobimo, če predpostavimo, da so navpični odseki linearne funkcije.

Kopule s kvadratnimi vodoravnimi (navpičnimi) odseki

Netrivialen rezultat dobimo, če za vodoravne odseke vzamemo kvadratne funkcije. Naj bo torej $C(u,v) = a(v)u^2 + b(v)u + c(v)$, $u, v \in \mathrm{I}$, za neke funkcije $a, b, c \colon \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$. Za $v \in \mathrm{I}$ je potem $C(0,v) = 0$ natanko tedaj, ko je $c(v) = 0$. Ker mora veljati $C(1,v) = v$, je $b(v) = v - a(v)$. Vpeljemo funkcijo $\psi \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $\psi(v) = -a(v)$. V tej notaciji je

$$C(u,v) = uv + \psi(v)u(1-u). \tag{4.7}$$

Funkcija C izpolnjuje pogoja **(C1)** in **(C2)** natanko tedaj, ko je $\psi(0) = \psi(1) = 0$. Izkaže se, da je C kopula natanko tedaj, ko je $\psi(0) = \psi(1) = 0$ in je ψ 1-Lipschitzeva. Ob tem velja, da je C absolutno zvezna. Za dokaz bralca napotimo k članku [39].

Simetričen rezultat velja, če zahtevamo, da so navpični odseki kopule kvadratne funkcije. Najpomembnejši zgled kopul s kvadratnimi odseki so Farlie-Gumbel-Morgensternove kopule.

Zgled 4.7. Družina kopul Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM).
Farlie-Gumbel-Morgensternove kopule, na kratko FGM kopule, so natanko simetrične kopule, katerih vodoravni odseki so kvadratne funkcije. Če za kopulo (4.7) predpostavimo še simetričnost, mora veljati $\psi(v)u(1-u) = \psi(u)v(1-v)$, iz česar sledi $\psi(v) = \psi_\theta(v) = \theta v(1-v)$ za nek parameter θ. S krajšim računom se prepričamo, da je (4.7) kopula natanko tedaj, ko je $\theta \in [-1,1]$. Dobimo torej družino kopul

$$C_\theta(u,v) = uv + \theta uv(1-u)(1-v), \qquad \theta \in [-1,1].$$

Za FGM kopulo C velja $\hat{C} = C$.

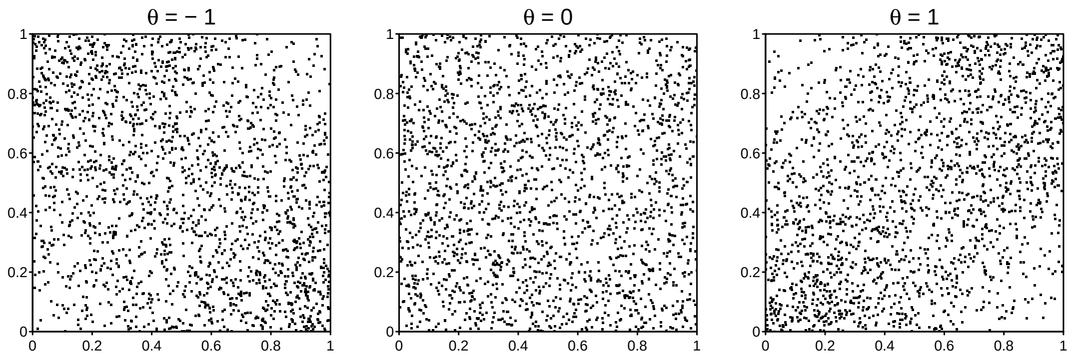
Opazimo, da je poljubna FGM kopula konveksna kombinacija dveh FGM kopul s parametroma $\theta = -1$ in $\theta = 1$. Na sliki 4.3 sta predstavljena razsevna diagrama pri robnih vrednostih parametra $\theta = -1$ in $\theta = 1$ za 2000 opažanj. Za primerjavo je podan še razsevni diagram $C_0 = \Pi$, tj. 2000 naključnih točk v I^2. Opazimo, da FGM kopule modelirajo zelo šibko odvisnost – pri $\theta = -1$ so nekoliko manj verjetne le vrednosti blizu $(0,0)$ in $(1,1)$, medtem ko so pri $\theta = 1$ nekoliko manj verjetne vrednosti blizu $(0,1)$ in $(1,0)$. Za vsak $\theta \in [-1,1]$ velja $\tau_\theta = 2\theta/9 \in [-2/9, 2/9]$ in $\rho_\theta = \theta/3 \in [-1/3, 1/3]$.

Razsevni diagrami FGM kopul so dobljeni preko naslednjega algoritma za generiranje realizacije (u,v) slučajnega vektorja (U,V) s skupno porazdelitveno funkcijo C_θ (knjiga [24]).

Algoritem 4.8. Vzorčenje iz FGM kopule.

1. Neodvisno vzorčimo u in t iz porazdelitve EZ[0,1].
2. Definiramo $a = 1 + \theta(1-2u)$ in $b = \sqrt{a^2 - 4(a-1)t}$.
3. Definiramo $v = 2t/(a+b)$. Iskani par je (u,v).

□



Slika 4.3. Razsevni diagrami FGM kopul s parametri -1, 0 in 1 (z leve proti desni).

Ena izmed možnih razširitev kopule (4.7), obravnavana v članku [42], je

$$C(u,v) = uv + f(u)g(v)$$

za primeren izbor funkcij $f, g\colon \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$. Izkaže se, da je C kopula natanko tedaj, ko sta f in g absolutno zvezni funkciji, za kateri velja $f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = 0$ in $\min\{\alpha\delta, \beta\gamma\} \geq -1$, kjer je

$$\alpha = \inf\{f'(u) \mid u \in \mathrm{I}, f'(u) \text{ obstaja}\} < 0, \quad \beta = \sup\{f'(u) \mid u \in \mathrm{I}, f'(u) \text{ obstaja}\} > 0,$$
$$\gamma = \inf\{g'(v) \mid v \in \mathrm{I}, g'(v) \text{ obstaja}\} < 0, \quad \delta = \sup\{g'(v) \mid v \in \mathrm{I}, g'(v) \text{ obstaja}\} > 0.$$

V tem primeru je C absolutno zvezna. Slučajni spremenljivki s pripadajočo kopulo C sta pozitivno oziroma negativno odvisni natanko tedaj, ko je $f{\cdot}g \geq 0$ oziroma $f{\cdot}g \leq 0$. V članku [42] so obravnavane še druge repne lastnosti in mere skladnosti te družine kopul.

Kopule s predpisanim diagonalnim odsekom

Naj bo $\delta\colon \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ neka funkcija. Želimo definirati kopulo C, katere diagonalni odsek δ_C je enak δ. Da bo to možno, mora δ zadoščati določenim lastnostim, ki veljajo za diagonalni odsek kopule. Iz robnih pogojev kopule sledi $\delta_C(0) = 0$ in $\delta_C(1) = 1$. Ker je C naraščajoča v vsaki spremenljivki posebej, je tudi δ_C naraščajoča in zanjo velja $\delta_C(t) \leq C(1,t) = t$. Poleg tega je δ_C 2-Lipschitzeva, saj je C 1-Lipschitzeva.

Definicija 4.9. Funkcija $\delta\colon \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ je **diagonala**, če je naraščajoča in 2-Lipschitzeva in zanjo velja $\delta(0) = 0$, $\delta(1) = 1$ ter $\delta \leq \mathrm{id}$. Družino vseh diagonal označimo z $\mathscr{D}$.

Naj bo $\delta \in \mathscr{D}$ diagonala. **Diagonalna kopula** je funkcija

$$C_\delta(u,v) = \min\left\{u, v, \frac{\delta(u) + \delta(v)}{2}\right\}.$$

Diagonalna kopula je res kopula, katere diagonalni odsek je enak δ. Dokaz je preprost, vendar tehnično zahteven in ga je moč najti v članku [12]. Opazimo, da je $C_{\mathrm{id}} = M$. Dokažemo lahko naslednjo trditev.

Trditev 4.10. *Če je C kopula z diagonalnim odsekom* id*, potem je $C = M$.*

Dokaz. Očitno je $\mathrm{id} \in \mathscr{D}$ in $\delta_M = \mathrm{id}$. Za $u \leq v$ velja $C(u,v) \geq C(u,u) = \delta_C(u) = u$. Ker je po drugi strani $C(u,v) \leq C(u,1) = u$, velja $C(u,v) = u$. Podobno sklepamo, da je $C(u,v) = v$ za $v \leq u$ in je zato $C = M$. ■

V splošnem seveda diagonalna kopula C_δ ni edina kopula, katere diagonalni odsek je enak δ. Če je na primer δ enaka diagonalnemu odseku produktne kopule $\delta_\Pi(t) = t^2$, potem je diagonalna kopula C_δ različna od produktne kopule. Za diagonalo spodnje meje $\delta_W(t) = \max\{2t-1, 0\}$ je C_{δ_W} enaka preureditvi Fréchet-Hoeffdingove zgornje meje M, in sicer dobimo $M(2, \{[0,1/2],[1/2,1]\}, (2,1), 1)$. Diagonalne kopule so pozitivno odvisne, vendar ne zadoščajo nobeni izmed lastnosti $\mathrm{LRP}(Y|X)$, $\mathrm{LRP}(X|Y)$, $\mathrm{DRN}(Y|X)$ in $\mathrm{DRN}(X|Y)$, definirane v 3.32. Naslednja trditev iz članka [13] poda karakterizacijo diagonalnih kopul.

Trditev 4.11. *Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki z zveznima porazdelitvenima funkcijama F oziroma G, skupno porazdelitveno funkcijo H in pripadajočo kopulo C. Kopula, ki pripada slučajnima spremenljivkama* $\max\{X,Y\}$ *in* $\min\{X,Y\}$ *je enaka Fréchet-Hoeffdingovi zgornji meji natanko tedaj, ko je C diagonalna kopula.*

Navedimo še eno družino kopul z vnaprej predpisanim diagonalnim odsekom. Naj bo $\delta \in \mathscr{D}$ diagonala. **Bertinova kopula** je podana s predpisom

$$B_\delta(u,v) = \min\{u,v\} - \min\{t - \delta(t) \mid t \in [\min\{u,v\}, \max\{u,v\}]\}.$$

Bertinova kopula je kopula z diagonalnim odsekom δ. Za poljubno kopulo C z diagonalnim odsekom δ velja $B_\delta \preceq C$. Več o Bertinovih kopulah lahko najdemo v člankih [1, 14].

Semilinearne kopule

V članku [8] so vpeljane tako imenovane semilinearne kopule. Kopula C je **spodnje semilinearna**, če sta za vsak $x \in (0,1]$ funkciji

$$\begin{aligned} h_x &\colon [0,x] \longrightarrow [0,1], \quad h_x(t) = C(t,x), \\ v_x &\colon [0,x] \longrightarrow [0,1], \quad v_x(t) = C(x,t), \end{aligned}$$

linearni. Podobno je kopula C **zgornje semilinearna**, če sta za vsak $x \in [0,1)$ funkciji

$$\begin{aligned} h_x &\colon [x,1] \longrightarrow [0,1], \quad h_x(t) = C(t,x), \\ v_x &\colon [x,1] \longrightarrow [0,1], \quad v_x(t) = C(x,t), \end{aligned}$$

linearni. Kopula je torej spodnje semilinearna, če je linearna na odsekih, ki povezujejo poljubno točko na diagonali in njeno projekcijo na spodnji ali levi rob I^2.

Naj bo C neka kopula in δ_C njen diagonalni odsek. Potem je C spodnje semilinearna natanko tedaj, ko je

$$C(u,v) = \begin{cases} v\,\dfrac{\delta_C(u)}{u}, & \text{za } v \le u, \\ u\,\dfrac{\delta_C(v)}{v}, & \text{za } u < v, \end{cases} \tag{4.8}$$

kjer privzamemo, da je $0/0 \coloneqq 0$. Kopula C je zgornje semilinearna natanko tedaj, ko je

$$C(u,v) = \begin{cases} (v-1)\dfrac{u-\delta_C(u)}{1-u} + u, & \text{za } u \le v, \\ (u-1)\dfrac{v-\delta_C(v)}{1-v} + v, & \text{za } v < u, \end{cases}$$

kjer sedaj privzamemo, da je $0/0 \coloneqq 1$. Zgornje in spodnje semilinearne kopule so med seboj povezane na naslednji način. Naj bo C_Z^δ zgornje semilinearna kopula z diagonalnim odsekom δ. Definiramo $\hat{\delta}(t) = 2t - 1 + \delta(1-t)$ in naj bo $C_S^{\hat{\delta}}$ spodnje semilinearna kopula z diagonalnim odsekom $\hat{\delta}$. Potem velja

$$C_Z^\delta(u,v) = u + v - 1 + C_S^{\hat{\delta}}(1-u, 1-v),$$

tj. C_Z^δ je kopula preživetja kopule $C_S^{\hat{\delta}}$. Od sedaj naprej bomo zato navedli le rezultate za spodnje semilinearne kopule, ki jih bomo preimenovali v **semilinearne kopule**. Zanimajo nas potrebni in zadostni pogoji za funkcijo δ_C, pod katerimi je s predpisom (4.8) podana semilinearna kopula.

Izrek 4.12. *Naj bo $\delta \in \mathscr{D}$ diagonala in funkcija $S_\delta \colon \mathrm{I}^2 \longrightarrow \mathrm{I}$ definirana s predpisom*

$$S_\delta(u,v) = \begin{cases} v\,\dfrac{\delta(u)}{u}, & \text{za } v \le u, \\ u\,\dfrac{\delta(v)}{v}, & \text{za } u < v, \end{cases} \tag{4.9}$$

kjer je po dogovoru $0/0 \coloneqq 0$. Naj bosta funkciji $\varphi_\delta, \eta_\delta \colon (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ podani s predpisoma

$$\varphi_\delta(t) = \frac{\delta(t)}{t}, \quad \eta_\delta(t) = \frac{\delta(t)}{t^2}.$$

Naj bo $\mathscr{D}_S$ družina vseh diagonal δ, za katere je φ_δ naraščajoča in η_δ padajoča funkcija. Potem je S_δ semilinearna kopula natanko tedaj, ko je $\delta \in \mathscr{D}_S$.

Ker je vsaka diagonala odvedljiva za skoraj vsak t, je $\delta \in \mathscr{D}_S$ natanko tedaj, ko za vsak tak t velja

$$\frac{\delta(t)}{t} \le \delta'(t) \le 2\frac{\delta(t)}{t}.$$

Naj bo $\delta \in \mathscr{D}_S$. Za skoraj vsak s je torej $\delta'(s)/\delta(s) \leq 2/s$ in zato za vsak $t \in (0,1)$ velja

$$\begin{aligned} \int_t^1 \delta'(s)/\delta(s)\, ds &\leq \int_t^1 2/s\, ds \\ -\ln \delta(t) &\leq -\ln t^2 \\ \delta(t) &\geq t^2. \end{aligned}$$

Funkcija $t \mapsto t^2$, diagonala produktne kopule, je tudi element družine $\mathscr{D}_S$ in zato je δ_Π najmanjši element te družine. Velja še $\delta_M \in \mathscr{D}_S$. Za vsako semilinearno kopulo S_δ torej velja $\Pi \preceq S_\delta \preceq M$.

Verjetnostno interpretacijo semilinearnih kopul, ki je povezana z Marshallovimi kopulami, bomo podali v naslednjem poglavju. Tu izpostavimo le, da lahko po izreku 4.12 vsako semilinearno kopulo z diagonalo δ zapišemo kot

$$S_\delta(u,v) = uv \min\left\{\frac{\delta(u)}{u}, \frac{\delta(v)}{v}\right\}. \tag{4.10}$$

Družini diagonal $\delta_\theta(t) = t^{2-\theta}$ in $\widetilde{\delta}_\theta(t) = \theta t^2 + (1-\theta)t$ za $\theta \in [0,1]$ pripadata $\mathscr{D}_S$ in zato so pripadajoče kopule (4.9) semilinearne. Kopula $S_{\tilde{\delta}_\theta}$ je za $\alpha = 0$ in $\beta = 1-\theta$ poseben primer Fréchetove kopule iz zgleda 4.3. Družina $\{S_{\delta_\theta}\}_{\theta\in[0,1]}$ je bolj znana kot *Cuadras-Augéjeva družina kopul* [4], ki je poseben primer Marshall-Olkinovih kopul iz naslednjega poglavja.

4.3 Arhimedove kopule

Po eni strani Arhimedove kopule izhajajo iz algebraične predpostavke za zvezo med skupno porazdelitveno funkcijo in njenima robnima porazdelitvenima funkcijama. Naj bosta $X \sim F$ in $Y \sim G$ zvezni slučajni spremenljivki s skupno porazdelitveno funkcijo H in pripadajočo kopulo C. Če sta X in Y neodvisni, je $H(x,y) = F(x)G(y)$ za vse $x, y \in \mathbb{R}$. Želimo najti tako pripadajočo družino kopul, da bo veljalo

$$\lambda(H(x,y)) = \lambda(F(x))\lambda(G(y))$$

za vse $x, y \in \mathbb{R}$, kjer je funkcija $\lambda : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ pozitivna na intervalu $(0,1)$. Če vpeljemo $\varphi(t) = -\ln \lambda(t)$, dobimo $\varphi(H(x,y)) = \varphi(F(x)) + \varphi(G(y))$ za $x, y \in \mathbb{R}$ oziroma ekvivalentno $\varphi(C(u,v)) = \varphi(u) + \varphi(v)$ za $u, v \in \mathrm{I}$. Od tod bi torej radi izrazili kopulo kot $C(u,v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$ za primerno definiran obrat $\varphi^{[-1]}$.

Po drugi strani imajo nekatere Arhimedove kopule tudi naslednjo verjetnostno interpretacijo. Naj bosta E_1 in E_2 neodvisni slučajni spremenljivki, porazdeljeni eksponentno s parametrom 1, in R od njiju neodvisna pozitivna slučajna spremenljivka. Definiramo

$$(X,Y) = (E_1/R, E_2/R). \tag{4.11}$$

Pri pogoju R sta torej X in Y neodvisni in enako porazdeljeni. **Laplaceova transformacija** slučajne spremenljivke R je funkcija $\psi(s) = \mathrm{E}(e^{-sR})$, kjer ima $s \in \mathbb{C}$ pozitivni realni del. Laplaceova transformacija natanko določa porazdelitev nenegativne slučajne spremenljivke. Izpeljimo robno funkcijo preživetja $\overline{F}$ slučajne spremenljivke X. Ker sta X in Y enako porazdeljeni, sta njuni funkciji preživetja enaki. Če je $x \leq 0$, je $\overline{F}(x) = 1$, saj je $X > 0$ skoraj gotovo. Za $x > 0$ dobimo z uporabo lastnosti pogojnega matematičnega upanja

$$\overline{F}(x) = P(E_1 > xR) = \mathrm{E}(\mathbb{1}_{\{E_1 > xR\}}) = \mathrm{E}\Big(\mathrm{E}(\mathbb{1}_{\{E_1 > xR\}} | R)\Big) = \mathrm{E}(e^{-xR}) = \psi(x).$$

Skupna funkcija preživetja slučajnega vektorja (X, Y) je za $x, y > 0$ enaka

$$\begin{aligned}\overline{H}(x,y) &= P(E_1 > xR, E_2 > yR) = \mathrm{E}(\mathbb{1}_{\{E_1 > xR\}} \mathbb{1}_{\{E_2 > yR\}}) \\ &= \mathrm{E}\Big(\mathrm{E}(\mathbb{1}_{\{E_1 > xR\}} \mathbb{1}_{\{E_2 > yR\}} | R)\Big) = \mathrm{E}(e^{-(x+y)R}) = \psi(x+y).\end{aligned}$$

Po Sklarovem izreku v različici s funkcijami preživetja (3.7) torej obstaja taka kopula preživetja C, da je $\psi(x+y) = C(\psi(x), \psi(y))$ za $x, y > 0$ oziroma

$$C(u,v) = \psi(\psi^{-1}(u) + \psi^{-1}(v)), \quad u, v \in [0,1]. \tag{4.12}$$

Glede na prvotno definicijo je tu vloga φ zamenjana s ψ^{-1}. Funkcija (4.12) je kopula za večji razred funkcij kot so Laplaceove transformacije. Navedimo formalno definicijo Arhimedove kopule.

Definicija 4.13. Naj bo $\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$ zvezna strogo padajoča funkcija, za katero je $\varphi(1) = 0$. **Psevdoobrat** funkcije φ je funkcija $\varphi^{[-1]} : [0,\infty] \longrightarrow [0,1]$, podana s predpisom

$$\varphi^{[-1]} = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & \text{za } t \in [0, \varphi(0)], \\ 0, & \text{za } t \in [\varphi(0), \infty]. \end{cases}$$

Arhimedova kopula je funkcija $C \colon \mathrm{I}^2 \longrightarrow \mathrm{I}$, podana s predpisom

$$C(u,v) = \varphi^{[-1]}\Big(\varphi(u) + \varphi(v)\Big).$$

Funkcija $\varphi^{[-1]}$ je zvezna in padajoča. Na intervalu $[0, \varphi(0)]$ je strogo padajoča. Za vsak $u \in \mathrm{I}$ je $\varphi^{[-1]}\Big(\varphi(u)\Big) = u$, medtem ko je za vsak $t \in [0,\infty]$

$$\begin{aligned}\varphi\Big(\varphi^{[-1]}(t)\Big) &= \begin{cases} t, & \text{za } t \in [0, \varphi(0)], \\ \varphi(0), & \text{za } t \in [\varphi(0), \infty], \end{cases} \\ &= \min\{t, \varphi(0)\}.\end{aligned}$$

Pogoja **(C1)** in **(C2)** sta za Arhimedovo kopulo torej izpolnjena. Izkaže se, da je Arhimedova kopula res kopula natanko tedaj, ko je φ konveksna. Funkcijo φ imenujemo **generator**. Če je $\varphi(0) = \infty$, potem je φ **strogi generator**. Generator Arhimedove kopule je strog natanko tedaj, ko je $C(u,v) > 0$ za vse $u,v\in(0,1]$. Če je φ generator C in je $c>0$ konstanta, potem je tudi $c\varphi$ generator C.

Zgled 4.14. Fréchet-Hoeffdingova spodnja meja in produktna kopula pripadata družini Arhimedovih kopul. Arhimedova kopula z generatorjem $\varphi_\Pi(t) = -\ln t$, $t\in[0,1]$, je očitno enaka produktni kopuli Π.

Za generator $\varphi_W(t) = 1-t$, $t\in\mathrm{I}$, velja $\varphi_W^{[-1]}(t) = 1-t$ za $t\in[0,1]$ in $\varphi_W^{[-1]}(t) = 0$ za $t>1$, od koder sledi $\varphi_W^{[-1]}(t) = \max\{1-t, 0\}$ za vsak $t\in[0,\infty]$. Arhimedova kopula z generatorjem φ_W je torej enaka spodnji meji W. □

Če je C Arhimedova kopula in $u\in(0,1)$, potem je

$$\delta_C(u) = \varphi^{[-1]}(2\varphi(u)) < \varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u.$$

Kopula M torej ni Arhimedova. Kopula C je **asociativna**, če je

$$C(C(u,v),w) = C(u,C(v,w)) \quad \text{za vse } u,v,w\in\mathrm{I}.$$

Vsaka Arhimedova kopula je simetrična in asociativna. Če je po drugi strani C asociativna kopula, za katero je $\delta_C(t) < t$ za vsak $t\in(0,1)$, potem je C Arhimedova, kar je dokazano v članku [31]. Nobena Farlie-Gumbel-Morgensternova kopula razen produktne ni Arhimedova, saj za $\theta \neq 0$ te kopule niso asociativne.

Če je C Arhimedova kopula, potem je Arhimedova tudi kopula C_γ, definirana s (4.2). Po drugi strani je Arhimedova kopula z generatorjem φ poseben primer transformacije kopule (4.2), kjer vzamemo za kopulo C produktno kopulo in za funkcijo γ na začetku tega razdelka vpeljano funkcijo $\lambda = e^{-\varphi}$.

Utemeljimo ime Arhimedovih kopul. **Arhimedov aksiom** na $[0,\infty)$ se glasi: če sta $a,b>0$, potem obstaja tak $n\in\mathbb{N}$, da je $na > b$. Arhimedova kopula C je binarna operacija $\mathrm{I}\times\mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{I}$, $(u,v)\mapsto C(u,v)$, ki je asociativna, komutativna in ohranja urejenost, tj. za $u_1 \le u_2$ in $v_1 \le v_2$ velja $C(u_1,v_1) \le C(u_2,v_2)$. Par (I,C) je torej urejena Abelova polgrupa. Za $u\in\mathrm{I}$ definiramo zaporedje ***C*-potenc** $\{u_C^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, kjer je $u_C^1 = u$ in $u_C^{n+1} = C(u,u_C^n)$ za vsak $n\ge 1$. Arhimedov aksiom za (I,C) se glasi: za poljubna $u,v\in(0,1)$ obstaja tako naravno število n, da je $u_C^n < v$. Če je C Arhimedova kopula, potem (I,C) zadošča Arhimedovemu aksiomu.

Nivojnice Arhimedovih kopul so konveksne. Razredu Arhimedovih kopul pripada veliko družin kopul z raznovrstnimi lastnostmi. Arhimedova kopula ima lahko nosilec različen od I^2. Tako njen absolutno zvezni kot singularni del sta lahko netrivialna. Obstajajo družine Arhimedovih kopul, ki imajo oba repna koeficienta enaka nič, oba od nič različna, ali pa je od nič različen le eden izmed njiju. Tu navedemo in na kratko opišemo le pet najbolj znanih družin Arhimedovih kopul, ki so odvisne od enega parametra. Za podrobnejši študij teh družin in Arhimedovih kopul v splošnem bralca napotimo h knjigam [36, 32].

Enoparametrična družina kopul $\{C_\theta\}_\theta$ je **pozitivno** oziroma **negativno urejena**, če za $\theta_1 \le \theta_2$ velja $C_{\theta_1} \preceq C_{\theta_2}$ oziroma $C_{\theta_1} \succeq C_{\theta_2}$. Če sta C_1 in C_2 Arhimedovi kopuli z generatorjema φ_1 oziroma φ_2, potem je $C_1 \preceq C_2$ natanko tedaj, ko je funkcija $g = \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$ *subaditivna*, tj. $g(t+t') \leq g(t) + g(t')$ za vse t_1, t_2. Vse v nadaljevanju predstavljene parametrične družine Arhimedovih kopul so pozitivno urejene.

Claytonova kopula je Arhimedova kopula

$$C_\theta(u,v) = \max\{u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0\}^{-1/\theta}$$

z generatorjem $\varphi_\theta(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$, kjer je $\theta \in [-1,\infty)\backslash\{0\}$. Ker v limiti dobimo $C_0 = \Pi$ in $C_\infty = M$, razširimo prostor parametrov na $[-1,\infty]$. Ker velja še $C_{-1} = W$, je Claytonova družina celovita. Za $\theta \in [-1,0]$ je Claytonova kopula absolutno zvezna. Zgornji repni koeficient je za $\theta < \infty$ enak nič, medtem ko je spodnji enak $2^{-1/\theta}$ za $\theta \in (0,\infty]$ in nič sicer.

Za $\theta \in (0,\infty)$ imajo Claytonove kopule interpretacijo v verjetnostnem modelu (4.11): slučajna spremenljivka R je porazdeljena kot $\Gamma(1/\theta, 1)$. Prav tako za vsak $\theta \in (0,\infty)$ velja, da je Claytonova kopula C_θ kopula preživetja, ki pripada slučajnemu vektorju (X,Y) z dvorazsežno Pareto porazdelitvijo s parametrom θ, tj. skupna funkcija preživetja (X,Y) je enaka

$$\overline{F}_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} (1+x+y)^{-\theta}, & \text{za } x \geq 0, y \geq 0, \\ (1+x)^{-\theta}, & \text{za } x \geq 0, y < 0, \\ (1+y)^{-\theta}, & \text{za } x < 0, y \geq 0, \\ 1, & \text{za } x < 0, y < 0. \end{cases}$$

Claytonova kopula ima tudi za $\theta \in [-1,0)$ dve verjetnostni interpretaciji. Kopula $W_{(n)}$ iz definicije (4.1) je enaka $C_{-1/n}$. Navedimo še drugo interpretacijo. Naj bodo $X_1, X_2, \ldots, X_n$ neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke z zvezno porazdelitveno funkcijo F, za katere standardno označimo $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ in $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Za vsak $x, y \in \mathbb{R}$ velja

$$F_{-X_{(1)}}(x) = P(X_{(1)} \geq -x) = P(X_1 \geq -x)^n = (1 - F(-x))^n, \quad F_{X_{(n)}}(y) = F(y)^n \quad \text{in}$$

$$\begin{aligned} F_{-X_{(1)},X_{(n)}}(x,y) &= P(X_{(1)} \geq -x, X_{(n)} \leq y) = P(-x \leq X_k \leq y \text{ za vse } k \in \{1,\ldots,n\}) \\ &= \max\{(F(y) - F(-x))^n, 0\} \\ &= \max\left\{(F_{X_{(n)}}(y))^{1/n} - \left(1 - (F_{-X_{(1)}}(x))^{1/n}\right), 0\right\}^n \\ &= C_{-1/n}(F_{-X_{(1)}}(x), F_{X_{(n)}}(y)). \end{aligned}$$

Po tretji točki trditve 3.17 je slučajnemu vektorju $(X_{(1)}, X_{(n)})$ pripadajoča kopula enaka $v - C_{-1/n}(1-u, v)$. Ko pošljemo n v neskončnost, dobimo

$$v - C_0(1-u,v) = v - \Pi(1-u,v) = \Pi(u,v).$$

Slučajni spremenljivki $X_{(1)}$ in $X_{(n)}$ sta torej asimptotično neodvisni.

Gumbelova kopula je Arhimedova kopula

$$C_\theta(u,v) = \exp\left[-\left((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right)^{1/\theta}\right],$$

katere generator je za $\theta \in [1,\infty)$ enak $\varphi_\theta(t) = (-\ln t)^\theta$. Dobimo $C_1 = \Pi$ in v limiti je $C_\infty = M$. Spodnji repni koeficient je za $\theta < \infty$ enak nič, medtem ko je zgornji enak $2 - 2^{1/\theta}$. Obrat generatorja vsake Gumbelove kopule je Laplaceova transformacija slučajne spremenljivke z *$1/\theta$-stabilno Lévyjevo porazdelitvijo*, za definicijo katere bralca napotimo h knjigi [32]. Gumbelova kopula je edina Arhimedova kopula, ki je kopula ekstremnih vrednosti oziroma ekvivalentno maksimalno stabilna. Dobimo jo lahko tudi preko konstrukcije (4.4), kjer vzamemo $A(t) = (t^\theta + (1-t)^\theta)^{1/\theta}$.

Joejeva kopula je Arhimedova kopula

$$C_\theta(u,v) = 1 - \left((1-u)^\theta + (1-v)^\theta - (1-u)^\theta(1-v)^\theta\right)^{1/\theta}$$

z generatorjem $\varphi_\theta(t) = -\ln(1-(1-t)^\theta)$, kjer je $\theta \in [1,\infty)$. Dobimo $C_1 = \Pi$, medtem ko je v limiti $C_\infty = M$. Tako kot pri Gumbelovih kopulah, je spodnji repni koeficient za $\theta < \infty$ enak nič, medtem ko je zgornji enak $2 - 2^{1/\theta}$. Pri tej družini ima slučajna spremenljivka R iz modela (4.11) tako imenovano *Sibuya porazdelitev*: $P(R = k) = (-1)^{k+1}\binom{1/\theta}{k}$ za $k \in \mathbb{N}$.

Frankova kopula je Arhimedova kopula

$$C_\theta(u,v) = -\frac{1}{\theta}\ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{e^{-\theta}-1}\right)$$

z generatorjem $\varphi_\theta(t) = -\ln\frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}$, kjer je $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Ker v limiti dobimo $C_{-\infty} = W$, $C_0 = \Pi$ in $C_\infty = M$, razširimo prostor parametrov na $\overline{\mathbb{R}}$. Claytonova in Frankova družina sta edini celoviti družini Arhimedovih kopul z razširjenim območjem parametrov. Oba repna koeficienta sta za $\theta < \infty$ enaka nič. Za $\theta \in (0,\infty)$ imajo Frankove kopule interpretacijo v verjetnostnem modelu (4.11): slučajna spremenljivka R je *porazdeljena logaritemsko* s parametrom $p = 1 - e^{-\theta}$, tj. $P(R = k) = (1-e^{-\theta})^k/(\theta k)$ za $k \in \mathbb{N}$. Kopule C iz Frankove družine so edine Arhimedove kopule, za katere je $\hat{C} = C$.

Ali-Mikhail-Haqova kopula je Arhimedova kopula

$$C_\theta(u,v) = \frac{uv}{1-\theta(1-u)(1-v)},$$

katere generator je za $\theta \in [-1,1)$ enak $\varphi_\theta(t) = \ln\frac{1-\theta(1-t)}{t}$. Za $\theta \in [0,1)$ imajo Ali-Mikhail-Haqove kopule interpretacijo v verjetnostnem modelu (4.11): R je *porazdeljena geometrijsko* s parametrom $p = 1-\theta$, tj. $P(R = k) = \theta^{k-1}(1-\theta)$ za $k \in \mathbb{N}$. Funkcija, ki pripada $\theta = 1$, je tudi kopula, vendar ni Arhimedova. Ta kopula pripada slučajnemu vektorju z Gumbelovo dvorazsežno logistično porazdelitvijo, katerega porazdelitvena funkcija je enaka $H(x,y) = (1 + e^{-x} + e^{-y})^{-1}$. Vsaka Ali-Mikhail-Haqova kopula je absolutno zvezna in modelira slučajne spremenljivke s „šibko odvisnostjo“, saj sta repna koeficienta za $\theta \neq 1$ enaka nič in za Kendallov τ in Spearmanov ρ velja $\tau_\theta \in [(5-8\ln 2)/3, 1/3] \approx [-0.18, 1/3]$ oziroma $\rho_\theta \in [33-48\ln 2, 4\pi^2-39] \approx [-0.27, 0.48]$. Pri $\theta = 0$ dobimo produktno kopulo.

Na slikah 4.4, 4.5, 4.6 in 4.7 so prikazani razsevni diagrami opisanih družin Arhimedovih kopul. Vsak diagram je narisan na podlagi 2000 vzorčenj. Algoritmi vzorčenja iz Arhimedovih kopul so podrobno opisani v knjigi [32]. V programu R uporabimo za vzorčenje vgrajene funkcije iz paketa *copula* z dokumentacijo [21].

Opazimo, da imata lahko repna koeficienta v limitnih primerih skok. Spodnji repni koeficient Ali-Mikhail-Haqove kopule pri $\theta = 1$ je enak $1/2$, medtem ko je za vsak $\theta \neq 1$ enak nič. Pozitiven spodnji oziroma zgornji repni koeficient je viden kot konica ob točkah $(0,0)$ oziroma $(1,1)$.

Arhimedove kopule lahko posplošimo na več razsežnosti. Naj bo φ strogi generator. Funkcija

$$C(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2) + \ldots + \varphi(u_n)), \quad u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathrm{I},$$

je ***n*-razsežna Arhimedova kopula** za vsak $n \geq 2$ natanko tedaj, ko na $[0,\infty)$ obstajajo odvodi vseh redov funkcije φ^{-1} in za vsak $k \in \mathbb{N}$ velja $(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} g(t) \geq 0$, $t \in [0,\infty)$. Funkcije φ^{-1}, ki zadoščajo tem predpostavkam, so natanko Laplaceove transformacije strogo pozitivnih slučajnih spremenljivk. Za take kopule velja $C \succeq \Pi$. Izkaže se, da lahko Claytonove, Gumbelove, Joejeve, Frankove in Ali-Mikhail-Haqove kopule C_θ posplošimo na n-razsežni primer za vse θ, za katere je $C \succeq \Pi$. Na ta način enostavno dobimo n-kopulo, katere pomanjkljivost je, da so za vsak $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ vse njene k-robne kopule med seboj enake.

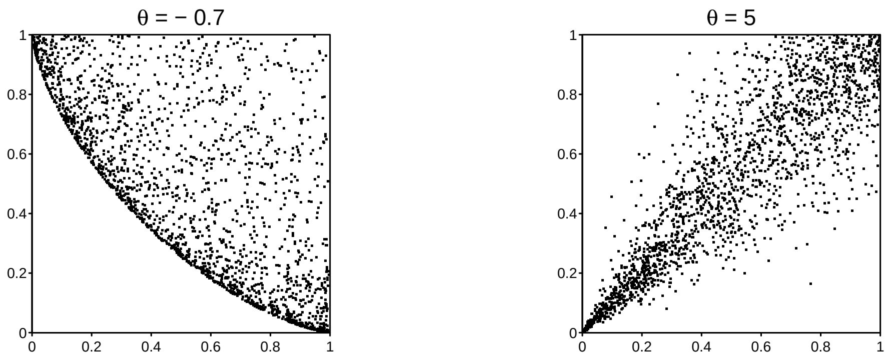
4.4 Eliptične kopule

Eliptične kopule so konstruirane z uporabo posledice Sklarovega izreka 3.41 za slučajni vektor z eliptično porazdelitvijo. Predstavimo zato najprej družino eliptičnih porazdelitev.

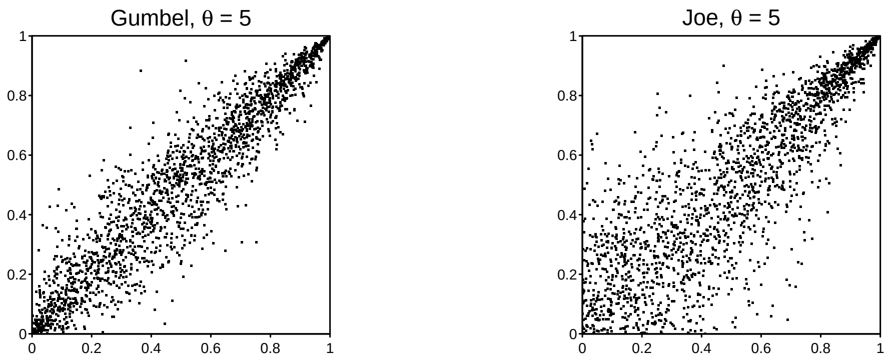
Z $\mathbb{R}^{m\times n}$ označimo prostor $m \times n$ matrik in za matriko $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ z A^T označimo transponirano matriko matrike A. V tem razdelku je slučajni vektor predstavljen kot stolpec z vrednostmi v $\mathbb{R}^{n\times 1} = \mathbb{R}^n$. Karakteristična funkcija n-razsežnega slučajnega vektorja $\boldsymbol{X}$ je funkcija $\varphi_{\boldsymbol{X}} \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, podana s predpisom $\varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = \mathrm{E}(e^{i\boldsymbol{t}^\mathrm{T}\boldsymbol{X}})$, $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n$.

Slučajni vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^\mathrm{T}$ je **porazdeljen sferično**, če je izpolnjena ena izmed naslednjih ekvivalentnih trditev:

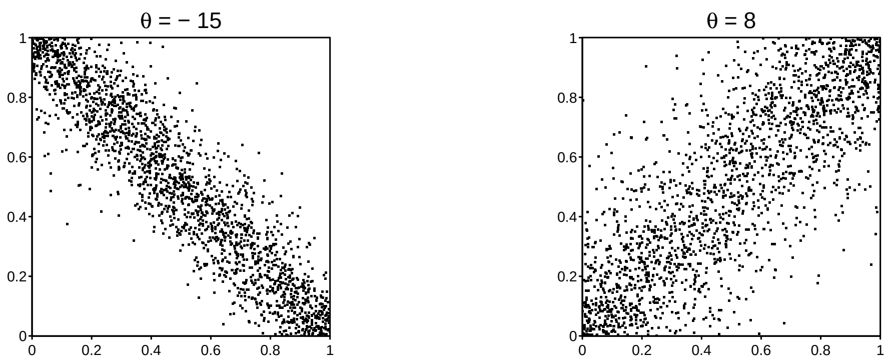
- Za vsako ortogonalno matriko $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ velja $Q\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{X}$.
- Obstaja taka nenegativna slučajna spremenljivka R in od nje neodvisni slučajni vektor $\boldsymbol{S}$, ki je porazdeljen enakomerno zvezno na enotski sferi v $\mathbb{R}^n$, da je $\boldsymbol{X} \sim R\boldsymbol{S}$.
- Obstaja taka funkcija $\phi \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, da za karakteristično funkcijo slučajnega vektorja $\boldsymbol{X}$ velja $\varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = \phi(t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2)$ za vsak $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)^\mathrm{T} \in \mathbb{R}^n$.



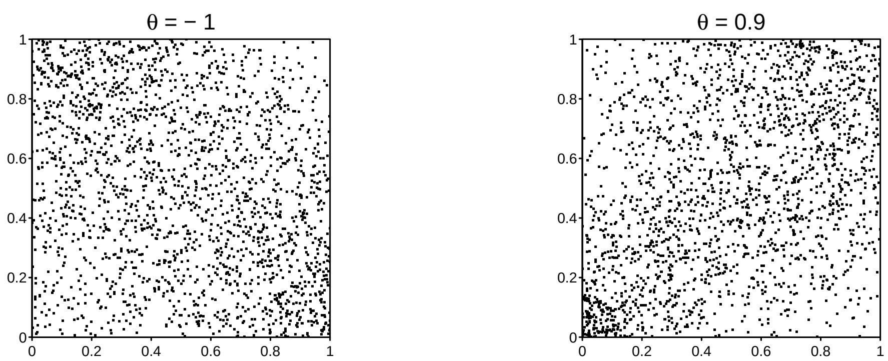
Slika 4.4. Razsevna diagrama Claytonove kopule pri $\theta < 0$ (levo) in $\theta > 0$ (desno).



Slika 4.5. Razsevna diagrama Gumbelove (levo) in Joejeve kopula (desno).



Slika 4.6. Razsevna diagrama Frankove kopule pri $\theta < 0$ (levo) in $\theta > 0$ (desno).



Slika 4.7. Razsevna diagrama Ali-Mikhail-Haqove kopule pri $\theta < 0$ (levo) in $\theta > 0$ (desno).

Slučajni vektor $\boldsymbol{S}$ interpretiramo kot smer, slučajno spremenljivko R pa kot radij. Vsaka smer je torej enako verjetna, radij pa je od smeri neodvisen. Sferična porazdelitev je po tretji ekvivalentni definiciji natanko določena s funkcijo ϕ. Najbolj znan primer sferične porazdelitve je n-razsežna normalna porazdelitev z enako porazdeljenimi neodvisnimi komponentami z upanjem nič.

Slučajni vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^{\mathrm{T}}$ je **porazdeljen eliptično**, če je

$$\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{\mu} + A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}, \tag{4.13}$$

kjer je $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{Y}$ porazdeljen sferično na $\mathbb{R}^k$ s pripadajočo funkcijo ϕ in $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$ taka matrika, da je rang matrike $\Sigma := A^{\mathrm{T}}A$ enak $k \leq n$. V kolikor matriko A zamenjamo z matriko B, za katero velja $B^{\mathrm{T}}B = \Sigma$, se porazdelitev ne spremeni. Za porazdelitev (4.13) zato uporabimo oznako $E_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \phi)$. Vektor $\boldsymbol{\mu}$ je s porazdelitvijo enolično določen, medtem ko Σ in ϕ nista. Za vsak $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je $X_i \sim E_1(\mu_i, \Sigma_{ii}, \phi)$. Če je eliptična porazdelitev absolutno zvezna, potem so nivojnice njene gostote elipse. Primera eliptične porazdelitve sta večrazsežna normalna porazdelitev in večrazsežna nestandardizirana Studentova porazdelitev.

Eliptična kopula je kopula

$$C(u_1, u_2, \ldots, u_n) = H(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \ldots, F_n^{-1}(u_n)),$$

kjer je H porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja $\boldsymbol{X} \sim E_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \phi)$ z robnimi porazdelitvenimi funkcijami $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Ker so po točki (i) trditve 3.17 kopule invariantne glede na strogo naraščajoče transformacije pripadajočih slučajnih spremenljivk, se eliptična kopula ne spremeni, če postavimo $\boldsymbol{\mu} = 0$ in zamenjamo Σ z matriko $P = [P_{ij}]_{i,j} = \left[\Sigma_{ij}/\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}\,\right]_{i,j}$. Eliptično kopulo, ki pripada porazdelitvi $E_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \phi)$, zato označimo s $C_{P,\phi}$.

Za razliko od kopul iz prejšnjih razdelkov, eliptičnih kopul praviloma ne moremo izraziti eksplicitno. Za eliptično kopulo C velja $\hat{C} = C$, od koder sledi, da sta repna koeficienta med seboj enaka. Repna koeficienta sta odvisna od radialnega dela R sferično porazdeljenega $\boldsymbol{Y}$. Težji kot so repi R, bližje sta repna koeficienta vrednosti ena. Najbolj znani družini eliptičnih kopul sta družini Gaussovih in Studentovih kopul.

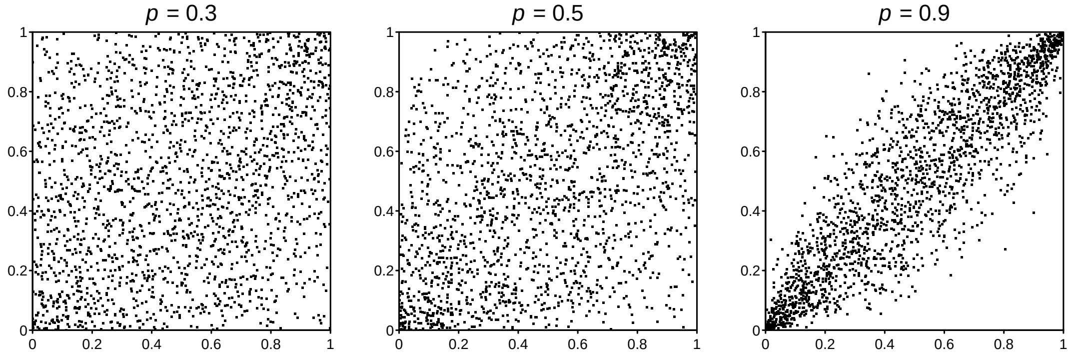
Zgled 4.15. Gaussova in Studentova kopula.
Gaussova (ali normalna) kopula C_P^{Gauss} je eliptična kopula $C_{P,\phi}$, ki pripada slučajnemu vektorju $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ z n-razsežno normalno porazdelitvijo z upanjem $\mathbf{0}$ in korelacijsko matriko P, tj. $P_{ij} = \rho^{\mathrm{Pearson}}(X_i, X_j)$. V družini Gaussovih kopul je torej $\phi(x) = e^{-x/2}$. Za vsak $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je X_i porazdeljena standardno normalno $\mathrm{N}(0, 1)$.

Studentova $\boldsymbol{t}$-kopula je eliptična kopula, ki pripada n-razsežni Studentovi t-porazdelitvi s stopnjo prostosti ν, necentralnim parametrom $\mathbf{0}$ in korelacijsko matriko P. Za vsak i je X_i porazdeljena Studentovo s stopnjo prostosti ν in necentralnim parametrom 0, kar označimo s t_ν.

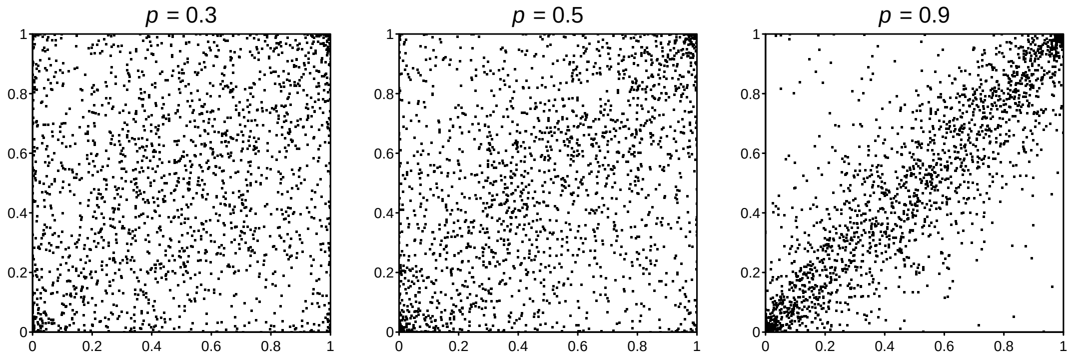
Dvorazsežna Gaussova kopula je odvisna le od parametra $p := \rho^{\text{Pearson}}(X_1, X_2)$, medtem ko Studentova dvorazsežna kopula poleg parametra p vsebuje še parameter ν. Če je $p \in (-1, 1)$, sta oba repna koeficienta Gaussove kopule enaka nič. Za Studentovo kopulo s parametroma ν in $p \in (-1, 1)$ velja

$$\lambda_L = \lambda_U = 2F_{t_{\nu+1}}\left(-\sqrt{\frac{(\nu+1)(1-p)}{1+p}}\right).$$

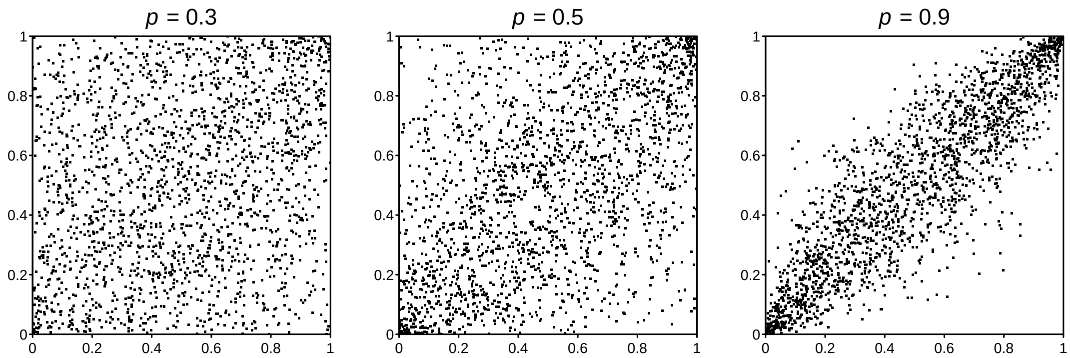
Na sliki 4.8 so predstavljeni razsevni diagrami dvorazsežne Gaussove kopule pri različnih vrednostih p, na slikah 4.9 in 4.10 pa razsevni diagrami Studentove kopule s stopnjama prostosti 2 oziroma 10. Vsak diagram je narisan na podlagi 2000 vzorčenj. Neničelna repna koeficienta sta vidna kot konici ob točkah $(0, 0)$ in $(1, 1)$. Ob vzorčenju uporabimo vgrajene funkcije v programu R za generiranje vzorca $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ iz večrazsežne normalne oziroma Studentove porazdelitve. Vzorec iz kopule dobimo kot $(F(x_1), F(x_2), \ldots, F(x_n))$, kjer je $F = F_{\mathrm{N}(0,1)}$ ali $F = F_{t_\nu}$. Za natančen opis algoritmov vzorčenja iz eliptičnih kopul oziroma porazdelitev bralca napotimo h knjigi [32]. $\square$



Slika 4.8. Razsevni diagrami Gaussove kopule pri različnih vrednostih parametra p.



Slika 4.9. Razsevni diagrami Studentove t-kopule pri stopnji prostosti $\nu = 2$ in različnih vrednostih parametra p.



Slika 4.10. Razsevni diagrami Studentove t-kopule pri stopnji prostosti $\nu = 10$ in različnih vrednostih parametra p.

Poglavje 5

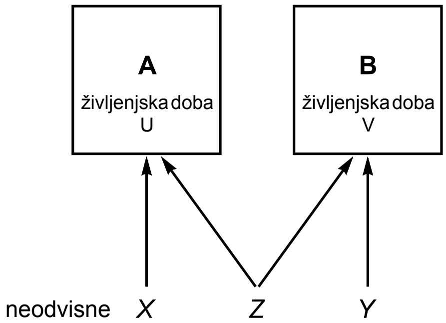
Marshallove kopule

V tem poglavju podrobno obravnavamo Marshallove kopule [33], ki jih lahko karakteriziramo z verjetnostnim modelom. Modifikacija tega modela je podlaga za definicijo in preučevanje maksmin kopul, ki predstavljajo osrednji del doktorske disertacije. Poseben primer Marshallovih kopul so Marshall-Olkinove kopule [34], ki so bile zgodovinsko gledano prve. Ker lahko slednje izpeljemo neposredno iz verjetnostnega modela, jih obravnavamo v prvem razdelku in šele v drugem razdelku definiramo splošno Marshallovo kopulo. Tam dokažemo dva izreka, ki karakterizirata Marshallove kopule in popravita ter izboljšata karakterizacijo iz članka [33]. Na koncu razdelka obravnavamo lastnosti, ki smo jih vpeljali v razdelku 3.3. Tretji razdelek je namenjen večrazsežnim posplošitvam Marshallovih in Marshall-Olkinovih kopul.

5.1 Verjetnostni model in Marshall-Olkinove kopule

Navedimo najprej verjetnostni model, iz katerega izhajajo Marshall-Olkinove in tudi Marshallove kopule. Naj na sistem s komponentama A in B delujejo udari treh vrst. Prva vrsta udara vpliva le na komponento A, druga vrsta le na komponento B, tretja vrsta udara pa deluje na obe komponenti hkrati. Čase udarov zaporedoma označimo s slučajnimi spremenljivkami X, Y in Z ter za njih predpostavimo, da so med seboj neodvisne. Življenjski dobi komponent A in B označimo z U oziroma z V. Ker vsaka izmed komponent preneha delovati ob prvem udaru nanjo, velja $U = \min\{X, Z\}$ in $V = \min\{Y, Z\}$. Poiskati želimo slučajnima spremenljivkama U in V pripadajočo kopulo. Grafična predstavitev tega modela je podana na sliki 5.1.

Primer uporabe tega modela je namizni računalnik s centralnim procesorjem kot komponento A in koprocesorjem kot komponento B. Čas udara prve in druge vrste je čas, ko se pokvari centralni procesor oziroma koprocesor. Tretja vrsta udara je električni udar, ki uniči oba procesorja hkrati. Podoben primer lahko prav tako najdemo na področju ekonomije. Denimo, da opazujemo majhen trg, ki je primarno odvisen le



Slika 5.1. Verjetnostni model Marshallovih kopul.

od dveh podjetij – podjetja A, ki pripada živilsko predelovalni industriji, in podjetja B, ki proizvaja avtomobilske dele. Naj bosta X in Y časa zloma živilsko predelovalne industrije oziroma trga avtomobilskih delov, medtem ko naj bo Z čas zloma celotnega domačega trga.

Marshall-Olkinove kopule bomo izpeljali s tako imenovano **obratno metodo**. Iz slučajnih spremenljivk X in Y s porazdelitvenima funkcijama F oziroma G ter njune skupne porazdelitvene funkcije H lahko preko posledice Sklarovega izreka 3.15 pripadajočo kopulo C izpeljemo kot

$$C(u,v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)).$$

Če standardno označimo pripadajoče funkcije preživetja in kopulo preživetja $\hat{C}$, iz različice Sklarovega izreka (3.7) dobimo

$$\hat{C}(u,v) = \overline{H}(\overline{F}^{-1}(u), \overline{G}^{-1}(v)).$$

Ker je vsaka kopula preživetja kopula, je s slednjo enačbo podana metoda konstrukcije kopul.

Ker modeliramo življenjske dobe in čase prihodov, bomo namesto porazdelitvenih funkcij raje obravnavali funkcije preživetja in poiskali slučajnima spremenljivkama U in V pripadajočo kopulo preživetja $\hat{C}$. Naj bodo v opisanem verjetnostnem modelu F, G in H porazdelitvene funkcije U, V oziroma (U,V). Porazdelitvene funkcije slučajnih spremenljivk X, Y in Z označimo z F_X, F_Y oziroma F_Z. Pripadajoče funkcije preživetja označimo običajno. Ker so slučajne spremenljivke X, Y in Z neodvisne, je $\overline{F}(x) = \overline{F}_X(x)\overline{F}_Z(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$ in

$$\begin{aligned}
\overline{H}(x,y) &= P(\min\{X,Z\} > x, \min\{Y,Z\} > y) = P(X > x, Y > y, Z > x, Z > y) \\
&= P(X > x)P(Y > y)P(Z > \max\{x,y\}) \\
&= \overline{F}_X(x)\overline{F}_Y(y)\overline{F}_Z(\max\{x,y\})
\end{aligned}$$

za vse $x, y \in \mathbb{R}$. Funkcijo $\overline{H}(x,y)$ želimo zapisati kot funkcijo spremenljivk $\overline{F}(x)$ in $\overline{G}(y)$.

Pri konstrukciji Marshall-Olkinovih kopul dodamo predpostavko o porazdelitvah slučajnih spremenljivk X, Y in Z – predpostavimo, da so porazdeljene eksponentno. Eksponentna porazdelitev je smiselna porazdelitev časa udara, saj ima t. i. **lastnost nepomnjenja**: $P(X > x + y \,|\, X > y) = P(X > x)$ za vse $x, y > 0$. Naj bodo λ_1, λ_2 in λ_{12} parametri eksponentnih porazdelitev slučajnih spremenljivk X, Y oziroma Z. Naj bosta $x, y > 0$. Potem je $\overline{F}(x) = e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})x}$ in $\overline{G}(y) = e^{-(\lambda_2+\lambda_{12})y}$. Slučajni spremenljivki U in V sta torej porazdeljeni eksponentno s parametroma $\lambda_1 + \lambda_{12}$ oziroma $\lambda_2 + \lambda_{12}$. S temi predpostavkami nadaljujemo izpeljavo funkcije $\overline{H}$. Če upoštevamo, da je $\max\{x, y\} = x + y - \min\{x, y\}$, dobimo

$$\begin{aligned} \overline{H}(x,y) &= \exp\left(-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_{12}\max\{x,y\}\right) \qquad (5.1)\\ &= \exp\left(-(\lambda_1+\lambda_{12})x - (\lambda_2+\lambda_{12})y + \lambda_{12}\min\{x,y\}\right)\\ &= \overline{F}(x)\overline{G}(y)\min\{e^{\lambda_{12}x}, e^{\lambda_{12}y}\}. \end{aligned}$$

Postavimo $u = \overline{F}(x)$ in $v = \overline{G}(y)$ ter z namenom poenostavitve definiramo nova parametra

$$\alpha = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1 + \lambda_{12}} \quad \text{in} \quad \beta = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_2 + \lambda_{12}}. \qquad (5.2)$$

V teh oznakah je $e^{\lambda_{12}x} = u^{-\alpha}$ in $e^{\lambda_{12}y} = v^{-\beta}$, iz česar sledi

$$\overline{H}(x,y) = \hat{C}(u,v) = uv\min\{u^{-\alpha}, v^{-\beta}\} = \min\{u^{1-\alpha}v, uv^{1-\beta}\}.$$

Ker so $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12} > 0$, sta $\alpha, \beta \in (0,1)$. Opazimo, da je $\hat{C}$ kopula celo za vse $\alpha, \beta \in [0,1]$. Če je eden izmed α ali β enak nič ali ena, potem je vsaj eden izmed parametrov eksponentnih porazdelitev enak nič. V tem primeru $X \sim \mathrm{E}(0)$ interpretiramo kot $P(X = \infty) = 1$, kar pomeni, da model ne vsebuje prve vrste udara.

Definicija 5.1. Naj bosta $\alpha, \beta \in [0,1]$. **Marshall-Olkinova kopula** je podana s predpisom

$$C_{\alpha,\beta}(u,v) = \min\{u^{1-\alpha}v, uv^{1-\beta}\}.$$

Če je $\alpha = \beta$, tj. časa udarov na posamezno komponento sta enako porazdeljena, potem dobimo tako imenovano **Cuadras-Augéjevo družino kopul** [4]. Če velja $\alpha_1 \leq \alpha_2$ in $\beta_1 \leq \beta_2$, potem je $C_{\alpha_1,\beta_1} \preceq C_{\alpha_2,\beta_2}$. Nadalje je $C_{\alpha,0} = C_{0,\beta} = \Pi$ za vse $\alpha, \beta \in [0,1]$, medtem ko je $C_{1,1} = M$. Za vsako Marshall-Olkinovo kopulo $C_{\alpha,\beta}$ torej velja $\Pi \preceq C_{\alpha,\beta} \preceq M$, kjer sta meji Π in M doseženi.

Naj bosta $\alpha, \beta \in (0,1)$. Nosilec Marshall-Olkinove kopule $C_{\alpha,\beta}$ je enak I^2 in oba dela, absolutno zvezni ter singularni, sta netrivialna. Nosilec singularnega dela je krivulja $\Gamma_{\alpha,\beta} = \{(u,v) \in \mathrm{I}^2 \,|\, u^\alpha = v^\beta\}$. To sledi iz

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C_{\alpha,\beta}(u,v) = \begin{cases} (1-\alpha)u^{-\alpha}, & \text{za } u^\alpha > v^\beta, \\ (1-\beta)v^{-\beta}, & \text{za } u^\alpha < v^\beta. \end{cases}$$

Izračunamo še absolutno zvezni in singularni del

$$A_{\alpha,\beta}(u,v) = C_{\alpha,\beta}(u,v) - \frac{\alpha\beta}{\alpha-\alpha\beta+\beta}\min\{u^\alpha, v^\beta\}^{\frac{\alpha-\alpha\beta+\beta}{\alpha\beta}},$$
$$S_{\alpha,\beta}(u,v) = \frac{\alpha\beta}{\alpha-\alpha\beta+\beta}\min\{u^\alpha, v^\beta\}^{\frac{\alpha-\alpha\beta+\beta}{\alpha\beta}}.$$

Za slučajni spremenljivki $U, V \sim \mathrm{EZ}[0,1]$ s pripadajočo kopulo $C_{\alpha,\beta}$ torej velja

$$P(U^\alpha = V^\beta) = S_{\alpha,\beta}(1,1) = \frac{\alpha\beta}{\alpha-\alpha\beta+\beta}.$$

Če je $\beta = 1$, je nosilec Marshall-Olkinove kopule enak krivulji $\Gamma_{\alpha,\beta}$ in območju pod njo. To je intuitivno jasno tudi iz pripadajočega verjetnostnega modela, saj iz $\beta = 1$ sledi $\lambda_{12} = 0$, kar pomeni $Z = \infty$ skoraj gotovo. V tem primeru je torej življenjska doba prve komponente manjša ali enaka od življenjske dobe druge, tj. $U^\alpha \leq V^\beta$ skoraj gotovo. Podobno velja $U^\alpha \geq V^\beta$ skoraj gotovo, ko je $\alpha = 1$.

Na zgornjem delu slike 5.2 so pri različnih vrednostih parametrov α in β predstavljeni grafi nivojnic Marshall-Olkinovih kopul, skupaj s krivuljo $\Gamma_{\alpha,\beta}$.

Iz verjetnostnega modela in izpeljave Marshall-Olkinovih kopul dobimo preprost intuitiven algoritem za generiranje realizacije (u,v) slučajnega vektorja (U,V) s skupno porazdelitveno funkcijo $C_{\alpha,\beta}$. Najprej generiramo tri neodvisne vzorce $x \sim X$, $y \sim Y$ in $z \sim Z$, ki so porazdeljeni eksponentno s parametri λ_1, λ_2 oziroma λ_{12}. Parametra λ_1 in λ_2 izrazimo iz enačb (5.2), kjer je $\lambda_{12} > 0$ poljuben in ga tipično postavimo na $\lambda_{12} = 1$. Te tri vzorce generiramo z metodo posplošenega obrata porazdelitvene funkcije – če je $r \sim \mathrm{EZ}[0,1]$, potem je $-\ln(1-r)/\lambda \sim -\ln(r)/\lambda \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, saj je $r \sim 1-r$. Nato sledimo izpeljavi Marshall-Olkinovih kopul in dobimo naslednji algoritem.

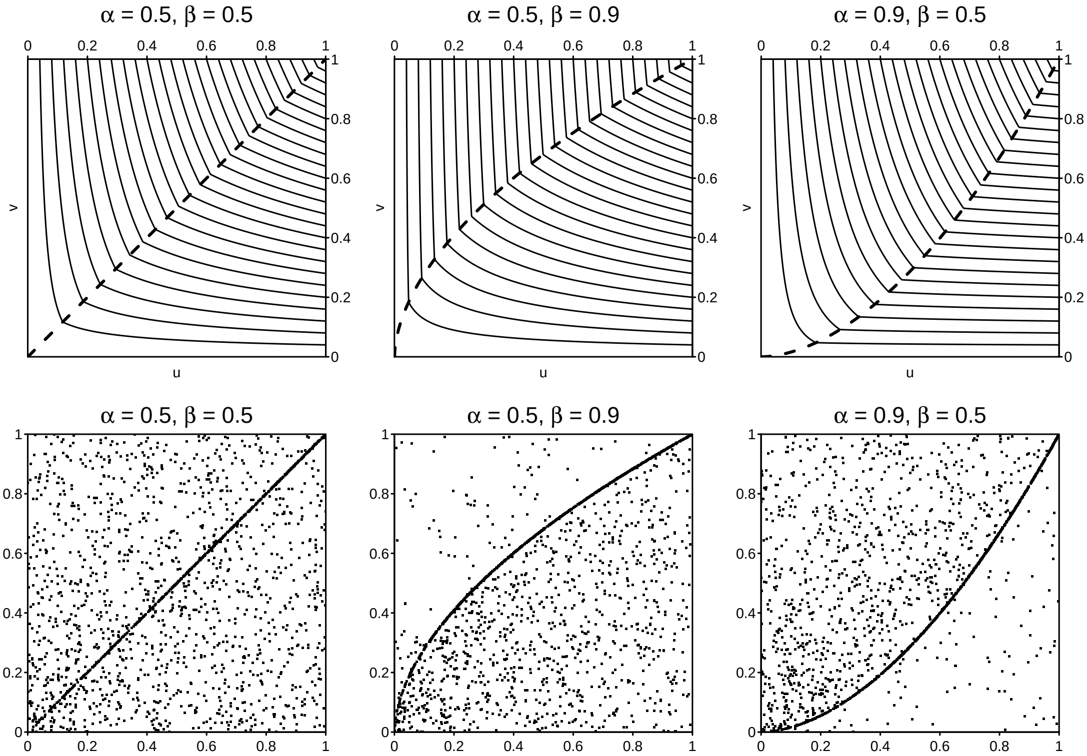
Algoritem 5.2. Vzorčenje iz Marshall-Olkinove kopule.

1. Neodvisno vzorčimo r, s in t iz porazdelitve $\mathrm{EZ}[0,1]$. Izberemo poljuben $\lambda_{12} > 0$ in postavimo $\lambda_1 = \lambda_{12}(1-\alpha)/\alpha$ ter $\lambda_2 = \lambda_{12}(1-\beta)/\beta$.
2. Definiramo $x = -\ln r/\lambda_1$, $y = -\ln s/\lambda_2$ in $z = -\ln t/\lambda_{12}$.
3. Definiramo $u' = \min\{x,z\}$ in $v' = \min\{y,z\}$.
4. Definiramo $u = e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})x}$ in $v = e^{-(\lambda_2+\lambda_{12})y}$. Iskani par je (u,v).

Na spodnjem delu slike 5.2 so pri različnih vrednostih parametrov α in β predstavljeni razsevni diagrami Marshall-Olkinovih kopul, dobljeni s tem algoritmom. Vsak diagram je narisan na podlagi 2000 vzorčenj. Singularna komponenta je dobro vidna.

Če Marshall-Olkinova kopula pripada slučajnima spremenljivkama X in Y, potem velja $\mathrm{SN}(Y|X)$, definirano v 3.34. Naj bosta $\alpha, \beta \in [0,1]$ poljubna. Kendallov τ in Spearmanov ρ izračunamo po formulah (3.11) oziroma (3.10) in dobimo

$$\tau_{\alpha,\beta} = \frac{\alpha\beta}{\alpha-\alpha\beta+\beta} \quad \text{in} \quad \rho_{\alpha,\beta} = \frac{3\alpha\beta}{2\alpha-\alpha\beta+2\beta}.$$



Slika 5.2. Grafi nivojnic s krivuljo $\Gamma_{\alpha,\beta}$ (zgoraj) in pripadajoči razsevni diagrami (spodaj) Marshall-Olkinovih kopul pri različnih vrednostih parametrov α in β.

Repna koeficienta Marshall-Olkinove kopule sta po trditvi 3.37 enaka $\lambda_L = 0$ in $\lambda_U = \min\{\alpha, \beta\}$. Z metodo konstrukcije kopul ekstremnih vrednosti (4.4) dobimo za $A(t) = 1 - \min\{\beta t, \alpha(1-t)\}$ Marshall-Olkinovo kopulo $C_{\alpha,\beta}$. Marshall-Olkinove kopule so torej maksimalno stabilne.

5.2 Marshallove kopule

Družino Marshall-Olkinovih kopul lahko razširimo do družine Marshallovih kopul tako, da v osnovnem verjetnostnem modelu izpustimo predpostavko o eksponentno porazdeljenih časih udarov X, Y in Z. Ker so v tem primeru $\overline{F}_X$, $\overline{F}_Y$ in $\overline{F}_Z$ poljubne funkcije preživetja, kopule preživetja za življenjski dobi komponent ne moremo izpeljati neposredno iz modela. Najprej torej definiramo kopulo, za katero kasneje dokažemo karakterizacijo z verjetnostnim modelom. Pred definicijo Marshallovih kopul vpeljimo še nekaj oznak, ki jih bomo uporabljali tudi v naslednjem poglavju.

Naj bo $\phi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ neka funkcija. Funkcija $\phi^* : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ je podana s predpisom

$$\phi^*(u) = \frac{\phi(u)}{u}.$$

Poimenujemo naslednje lastnosti funkcije ϕ:

(F1) $\phi(0) = 0$ in $\phi(1) = 1$;

(F2) ϕ je naraščajoča funkcija;

(F3*) $u_1\phi(u_2) \leq u_2\phi(u_1)$ za vse $u_1 \leq u_2$ iz I oziroma ekvivalentno, pripadajoča funkcija ϕ^* je padajoča.

Definicija 5.3. Naj bosta $\phi, \psi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funkciji, ki zadoščata pogojem **(F1)**, **(F2)** in **(F3*)**. **Marshallova kopula** je funkcija, definirana s predpisom

$$C(u, v) = C_{\phi,\psi}(u, v) = \min\{\phi(u)v, u\psi(v)\} \quad \text{za } u, v \in \mathrm{I}. \tag{5.3}$$

Za $u, v \in (0, 1]$ lahko Marshallovo kopulo zapišemo tudi kot

$$C(u, v) = uv \min\{\phi^*(u), \psi^*(v)\}.$$

Če je eden izmed u ali v enak nič, potem je $C(u, v) = 0$. Preden dokažemo, da je Marshallova kopula res kopula, izpeljimo še nekaj lastnosti, ki sledijo iz pogojev **(F1)**, **(F2)** in **(F3*)** ter jih označimo na podoben način.

Lema 5.4. *Če funkcija ϕ: $[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ zadošča pogojem* **(F1)**, **(F2)** *in* **(F3*)**, *potem veljajo naslednje trditve:*

(Fa*) $u \leq \phi(u)$ *za vse* $u \in \mathrm{I}$,

(Fb*) *če je* $\phi(u) = u$ *za nek* $u \in (0, 1]$, *potem je* ϕ *na intervalu* $[u, 1]$ *enaka identični funkciji,*

(Fc*) $\dfrac{\phi(u_2) - \phi(u_1)}{u_2 - u_1} \leq \phi^*(u_2) \leq \phi^*(u_1)$ *za vse* $0 < u_1 < u_2 \leq 1$,

- $\phi'(u)$ *obstaja za skoraj vsak* u *(glede na Lebesgueovo mero) in za vsak tak* u *je* $\phi'(u) \leq \phi^*(u)$,
- ϕ *je zvezna na intervalu* $(0, 1]$.

Dokaz. Zaporedoma dokažimo vse točke leme.

(Fa*) V pogoju **(F3*)** vzamemo $u_2 = 1$ in nato uporabimo **(F1)**.

(Fb*) Predpostavimo, da obstaja tak $u_1 \in (0, 1]$, da je $\phi(u_1) = u_1$. Po **(F3*)** potem velja $\phi(u_2) \leq u_2$ za vsak $u_2 \geq u_1$. Če upoštevamo še **(Fa*)**, smo to točko dokazali.

(Fc*) Zlahka preverimo, da je tudi prva neenakost ekvivalentna **(F3*)**.

- Ker je ϕ monotona omejena funkcija na intervalu $[0, 1]$, je odvedljiva skoraj povsod glede na Lebesgueovo mero. Po **(F3*)** je

$$0 \geq \frac{d\phi^*(u)}{du} = \frac{\phi'(u)u - \phi(u)}{u^2}$$

za vsak u, v katerem je ϕ odvedljiva, iz česar sledi $\phi'(u) \leq \phi^*(u)$.

- Zveznost na intervalu $(0,1]$ očitno sledi iz **(Fc*)**.

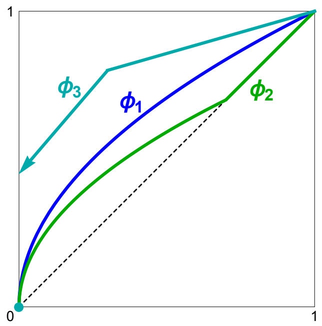
■

Funkcija ϕ je lahko v točki 0 nezvezna, saj postane neenakost iz **(F3*)** trivialna, če vstavimo $u_1 = 0$. Taka funkcija je na primer $\phi(u) = ((u+1)/2) \cdot \mathbb{1}_{(0,1]}(u)$. Na sliki 5.3 so skicirani različni primeri funkcij, ki izpolnjujejo pogoje **(F1)**, **(F2)** in **(F3*)** ter grafično predstavijo trditve iz zadnje leme.

Ker je ϕ^* padajoča, obstaja limita $\phi^*(0+) \geq 1$, ki pa je lahko končna ali neskončna. Za funkcijo $\phi(u) = \sqrt{u}$ je $\phi^*(0+) = \infty$, medtem ko za funkcijo

$$\phi(u) = 2u \cdot \mathbb{1}_{[0,1/4]}(u) + (2u/3 + 1/3) \cdot \mathbb{1}_{(1/4,1]}(u)$$

velja $\phi^*(0+) = 2$. Funkcijo ϕ^* lahko razširimo na interval $[0,1]$, kjer dopuščamo vrednost $\phi^*(0) = \infty$.



Slika 5.3. Primeri funkcij ϕ_1, ϕ_2 in ϕ_3, ki zadoščajo pogojem **(F1)**, **(F2)** ter **(F3*)**.

Trditev 5.5. *Marshallova kopula je kopula.*

Dokaz. Naj bo $C_{\phi,\psi} = C$ Marshallova kopula. Funkcija C očitno zadošča pogoju **(C1)**. Po **(F1)** in **(Fa*)** je $C(u,1) = \min\{\phi(u), u\} = u$ za vsak $u \in \mathrm{I}$. Podobno je $C(1,v) = v$ za vsak $v \in \mathrm{I}$. Izberimo poljubne $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathrm{I}$, za katere je $u_1 \leq u_2$ in $v_1 \leq v_2$. Dokazati želimo, da je ploščina pripadajočega pravokotnika glede na C nenegativna. V ta namen ločimo primere glede na urejenost vrednosti $\phi^*(u_1)$, $\phi^*(u_2)$, $\psi^*(v_1)$ in $\psi^*(v_2)$. Ko upoštevamo pogoj **(F3*)**, preostane šest različnih primerov. Vsakega izmed njih obravnavamo posebej. V dokazu bomo uporabljali zapis Marshallove kopule (5.3).

(i) Če je $\psi^*(v_2) \leq \psi^*(v_1) \leq \phi^*(u_2) \leq \phi^*(u_1)$, potem je

$$\begin{aligned} V_C((u_1,u_2] \times (v_1,v_2]) &= u_2\psi(v_2) - u_2\psi(v_1) - u_1\psi(v_2) + u_1\psi(v_1) \\ &= (u_2 - u_1)(\psi(v_2) - \psi(v_1)) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

saj je ψ naraščajoča.

(ii) Naj bo sedaj $\psi^*(v_2) \leq \phi^*(u_2) \leq \psi^*(v_1) \leq \phi^*(u_1)$. Ker velja $\phi^*(u_2) \leq \psi^*(v_1)$ in je ψ naraščajoča, dokažemo

$$\begin{aligned} V_C((u_1,u_2]\times(v_1,v_2]) &= u_2\psi(v_2) - \phi(u_2)v_1 - u_1\psi(v_2) + u_1\psi(v_1) \\ &\geq u_2\psi(v_2) - u_2\psi(v_1) - u_1\psi(v_2) + u_1\psi(v_1) \\ &= (u_2 - u_1)(\psi(v_2) - \psi(v_1)) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

(iii) Ko je $\psi^*(v_2) \leq \phi^*(u_2) \leq \phi^*(u_1) \leq \psi^*(v_1)$, najprej ocenimo $\psi(v_2) \geq \psi(v_1)$ in nato za funkcijo ϕ^* uporabimo **(Fc*)**, s čimer izpeljemo

$$\begin{aligned} V_C((u_1,u_2]\times(v_1,v_2]) &= u_2\psi(v_2) - \phi(u_2)v_1 - u_1\psi(v_2) + \phi(u_1)v_1 \\ &= \psi(v_2)(u_2 - u_1) - v_1(\phi(u_2) - \phi(u_1)) \\ &\geq \psi(v_1)(u_2 - u_1) - v_1(\phi(u_2) - \phi(u_1)) \\ &= (u_2 - u_1)v_1\left(\psi^*(v_1) - \frac{\phi(u_2) - \phi(u_1)}{u_2 - u_1}\right) \\ &\geq (u_2 - u_1)v_1(\psi^*(v_1) - \phi^*(u_2)) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Preostale tri primere dokažemo simetrično – zamenjamo vlogi spremenljivk u in v ter funkcij ϕ in ψ. Vsi sklepi so veljavni, saj funkciji ϕ in ψ zadoščata istim predpostavkam. ■

Marshall-Olkinova kopula $C_{\alpha,\beta}$ je Marshallova kopula $C_{\phi,\psi}$ za funkciji $\phi(u) = u^{1-\alpha}$ in $\psi(v) = v^{1-\beta}$, če sta $\alpha, \beta \in [0,1)$. V primeru, ko je $\alpha = 1$, je ustrezna funkcija enaka $\phi = \mathbb{1}_{(0,1]}$. Podobno je $\psi = \mathbb{1}_{(0,1]}$, če je $\beta = 1$. Vse funkcije zadoščajo pogojem **(F1)**, **(F2)** in **(F3*)**. Na poti k izrekoma, ki karakterizirata Marshallove kopule, dokažimo naslednjo verjetnostno lemo.

Lema 5.6. *Naj bosta U in V slučajni spremenljivki s porazdelitvenima funkcijama F oziroma G ter naj bo H njuna skupna porazdelitvena funkcija. Potem sta naslednji trditvi ekvivalentni:*

(i) *Obstajajo take neodvisne slučajne spremenljivke X, Y in Z, da je $U = \max\{X, Z\}$ in $V = \max\{Y, Z\}$.*

(ii) *Skupno porazdelitveno funkcijo H lahko s porazdelitvenimi funkcijami F_X, F_Y in F_Z izrazimo kot*

$$H(x,y) = F_X(x)F_Y(y)\min\{F_Z(x), F_Z(y)\}. \tag{5.4}$$

Če velja katerakoli izmed trditev (i) *ali* (ii), *potem je $F = F_X \cdot F_Z$, $F \leq F_X$ in $F \leq F_Z$.*

Dokaz. Naj velja (i) in naj bodo F_X, F_Y ter F_Z porazdelitvene funkcije X, Y oziroma Z. Upoštevamo neodvisnost X, Y in Z ter izrazimo H kot

$$\begin{aligned} H(x,y) &= P(\max\{X,Z\} \leq x, \max\{Y,Z\} \leq y) = P(X \leq x, Z \leq x, Y \leq y, Z \leq y) \\ &= P(X \leq x)P(Y \leq y)P(Z \leq \min\{x,y\}) = F_X(x)F_Y(y)\min\{F_Z(x), F_Z(y)\}. \end{aligned}$$

Obratno, naj sedaj velja (ii). Skupno porazdelitveno funkcijo H lahko torej napišemo kot (5.4), kjer so F_X, F_Y in F_Z neke porazdelitvene funkcije. Naj bodo X, Y in Z neodvisne slučajne spremenljivke s porazdelitvenimi funkcijami F_X, F_Y oziroma F_Z. Ker je slučajni vektor s svojo porazdelitveno funkcijo enolično določen, je $U = \max\{X,Z\}$ in $V = \max\{Y,Z\}$. ■

Marshall v članku [33] navede in dokaže naslednji izrek, ki karakterizira to družino kopul.

Izrek 5.7. Marshallov izrek. *Naj bo $C_{\phi,\psi}$ Marshallova kopula in $H = C_{\phi,\psi}(F,G)$, kjer sta F in G porazdelitveni funkciji ter H skupna porazdelitvena funkcija. Potem sta naslednji trditvi ekvivalentni:*

(i) *Obstajajo take slučajne spremenljivke X, Y in Z, da je H porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja* $(\max\{X,Z\}, \max\{Y,Z\})$.

(ii) $\phi^* \circ F = \psi^* \circ G$.

V implikaciji iz (i) v (ii) predhodno predpostavimo, da obstajata taki funkciji ϕ in ψ, za kateri je slučajnima spremenljivkama $\max\{X,Z\}$ in $\max\{Y,Z\}$ pripadajoča kopula enaka Marshallovi kopuli $C_{\phi,\psi}$. Namesto te implikacije dokažimo raje njeno močnejšo različico, ki zgolj pod predpostavko (i) zagotavlja obstoj takih funkcij ϕ in ψ, da pripadajoča Marshallova kopula $C_{\phi,\psi}$ povezuje porazdelitvi slučajnih spremenljivk $\max\{X,Z\}$ in $\max\{Y,Z\}$.

Izrek 5.8. *Naj bo $U = \max\{X,Z\}$ in $V = \max\{Y,Z\}$, kjer so X, Y in Z neke neodvisne slučajne spremenljivke. Naj bosta F in G porazdelitveni funkciji slučajnih spremenljivk U oziroma V ter naj bo H skupna porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja (U,V). Potem obstajata taki funkciji ϕ in ψ, ki zadoščata pogojem* **(F1)**, **(F2)** *in* **(F3*)**, *da za pripadajočo Marshallovo kopulo $C_{\phi,\psi}$ velja*

$$H(x,y) = C_{\phi,\psi}(F(x), G(y)) \tag{5.5}$$

za vse $x, y \in \mathbb{R}$.

Preden nadaljujemo z dokazom, se spomnimo definicije posplošenega obrata porazdelitvene funkcije, podane v 2.6, in lastnosti obrata iz leme 2.7. Na strani 12 smo za $w \notin \operatorname{im} F \cup \{0,1\}$ označili $\overline{w} = F(F^{-1}(w))$ in $\underline{w} = F(F^{-1}(w)-)$. Ponovimo, da je $\overline{w} \in \operatorname{im} F$, medtem ko je $\underline{w}$ ali vsebovan v $\operatorname{im} F$ ali pa ni vsebovan v $\operatorname{im} F$, vendar je $\underline{w} - \varepsilon \in \operatorname{im} F$ za vsak dovolj majhen $\varepsilon > 0$.

Dokaz. Označimo porazdelitvene funkcije slučajnih spremenljivk X, Y in Z z F_X, F_Y oziroma F_Z. Po lemi 5.6 velja za porazdelitvene funkcije zveza (5.4) in enakosti $F = F_X \cdot F_Z$ ter $G = F_Y \cdot F_Z$. Dokaz razdelimo na tri korake. V prvem in drugem koraku definiramo funkciji ϕ oziroma ψ, za kateri dokažemo, da izpolnjujeta pogoje **(F1)**, **(F2)** in **(F3*)**. V tretjem koraku dokažemo, da za pripadajočo Marshallovo kopulo velja želena enakost. Dokaz sledi korakom dokaza izreka *Theorem 9* iz članka [37].

1. korak. Definiramo funkcijo $\phi\colon \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{I}$ s predpisom

$$\phi(u) = \begin{cases} 0, & \text{za } u = 0, \\ F_X(F^{-1}(u)), & \text{za } u \in \operatorname{im} F \backslash \{0,1\}, \\ 1, & \text{za } u = 1, \\ \dfrac{\phi(\overline{u}) - \phi(\underline{u}-)}{\overline{u} - \underline{u}}(u - \underline{u}) + \phi(\underline{u}-), & \text{za } u \notin \operatorname{im} F \cup \{0,1\} \text{ in } \underline{u} \notin \operatorname{im} F \cup \{0\}, \\ \dfrac{\phi(\overline{u}) - \phi(\underline{u})}{\overline{u} - \underline{u}}(u - \underline{u}) + \phi(\underline{u}), & \text{za } u \notin \operatorname{im} F \cup \{0,1\} \text{ in } \underline{u} \in \operatorname{im} F \backslash \{0\}, \\ \dfrac{\phi(\overline{u})}{\overline{u} - \underline{u}}(u - \underline{u}), & \text{za } u \notin \operatorname{im} F \cup \{0,1\} \text{ in } \underline{u} = 0. \end{cases} \tag{5.6}$$

Izmed vseh šestih predpisov je za izpolnjenost enakosti (5.5) bistvena le definicija ϕ na $\operatorname{im} F$, medtem ko je izven $\operatorname{im} F$ funkcija definirana tako, da zadošča pogojem **(F1)**, **(F2)** in **(F3*)**. Izven $\operatorname{im} F$ smo jo zato definirali preprosto kot linearno interpolacijo med točkama, v katerih sta vrednosti funkcije ϕ po predpisu na $\operatorname{im} F$ že definirani. Za slednjo definicijo je potrebno ločiti tri primere glede na vsebovanost $\underline{u}$ v $\operatorname{im} F \cup \{0,1\}$. Preden dokažemo, da funkcija ϕ izpolnjuje pogoja **(F2)** in **(F3*)** (pogoj **(F1)** je očitno izpolnjen), dokažimo, da velja

$$\phi(F(x)) = F_X(x) \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}, \text{ za katerega je } F(x) > 0. \tag{5.7}$$

Izberimo tak x. Uporabimo točko (vi) leme 2.7 in dobimo, da je

$$F_X(x)F_Z(x) = F(x) = F\Big(F^{-1}(F(x))\Big) = F_X\Big(F^{-1}(F(x))\Big)F_Z\Big(F^{-1}(F(x))\Big). \tag{5.8}$$

Ker sta funkciji F_X in F_Z naraščajoči, po točki (v) leme 2.7 velja tudi

$$F_X\Big(F^{-1}(F(x))\Big) \leq F_X(x) \quad \text{in} \quad F_Z\Big(F^{-1}(F(x))\Big) \leq F_Z(x). \tag{5.9}$$

Opazimo, da iz $F(x) > 0$ sledi $F_X(x) > 0$ in $F_Z(x) > 0$. Iz enakosti (5.8) in neenakosti (5.9) lahko torej sklepamo, da je $F_X(x) = F_X\Big(F^{-1}(F(x))\Big) = \phi(F(x))$.

Sedaj dokažimo, da je ϕ naraščajoča. Vzemimo $0 < u < v < 1$ in predpostavimo, da sta $u, v \in \operatorname{im} F$. Obstajata torej taka $x, y \in \mathbb{R}$, da je $u = F(x)$ in $v = F(y)$. Ker je $u < v$ in je F naraščajoča, je tudi $x < y$. Iz enačbe (5.7) torej sledi, da je

$$\phi(u) = \phi(F(x)) = F_X(x) \leq F_X(y) = \phi(F(y)) = \phi(v).$$

Ker je ϕ odsekoma linearna na $\mathrm{I}\backslash\operatorname{im} F$, je ϕ torej naraščajoča na I.

Dokazati moramo le še, da je ϕ^* padajoča. Na $\operatorname{im} F\backslash\{0\}$ po točki (iv) leme 2.7 velja $F\circ F^{-1} = \mathrm{id}$ in zato lahko na tem območju iz enačbe (5.7) sklepamo

$$\phi^* = \phi^*\circ F\circ F^{-1} = \frac{\phi\circ F\circ F^{-1}}{F\circ F^{-1}} = \frac{F_X\circ F^{-1}}{(F_X\cdot F_Z)\circ F^{-1}} = \frac{1}{F_Z\circ F^{-1}}.$$

Ker sta funkciji F^{-1} in F_Z naraščajoči, je torej ϕ^* na $\operatorname{im} F\backslash\{0\}$ padajoča. Naj bo sedaj $u \notin \operatorname{im} F\cup\{0,1\}$ tak, da je $\underline{u} > 0$. Po že dokazanem za poljuben $t\in\operatorname{im} F$, $t < \overline{u}$, velja $\phi(t)/t \geq \phi(\overline{u})/\overline{u}$ in zato je

$$\frac{\phi(\underline{u})}{\underline{u}} = \frac{\phi(\underline{u}-)}{\underline{u}} \geq \frac{\phi(\overline{u})}{\overline{u}}.$$

Iz linearnosti funkcije ϕ na $[\underline{u},\overline{u}]$ sledi, da je na tem območju $\phi(t)/t = \alpha/t+\beta$ za neki konstanti α in β. Izračunamo, da je po prejšnji neenakosti

$$\alpha = \phi(\underline{u}) - \underline{u}\,\frac{\phi(\overline{u})-\phi(\underline{u})}{\overline{u}-\underline{u}} = \frac{\overline{u}\,\underline{u}}{\overline{u}-\underline{u}}\left(\frac{\phi(\underline{u})}{\underline{u}} - \frac{\phi(\overline{u})}{\overline{u}}\right) \geq 0.$$

Funkcija ϕ^* je na $[\underline{u},\overline{u}]$ torej padajoča. Ker ta sklep velja za vsak $u \notin \operatorname{im} F\cup\{0,1\}$, je dokaz veljavnosti **(F3*)** končan.

2. korak. V tem koraku definiramo funkcijo $\psi\colon \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{I}$ z analognim predpisom kot ϕ, v katerem zamenjamo le funkciji F in F_X s funkcijama G oziroma F_Y. Prav tako velja, da je

$$\psi(G(y)) = F_Y(y) \quad \text{za vsak } y\in\mathbb{R}\text{, za katerega je } G(y) > 0. \tag{5.10}$$

3. korak. Ker funkciji zadoščata zahtevanim lastnostim, je s predpisom (5.3) definirana Marshallova kopula. Dokaz bo končan, ko preverimo veljavnost enakosti (5.5). Če je $F(x) = 0$ ali $G(y) = 0$, potem je $H(x,y) = 0 = C_{\phi,\psi}(F(x),G(y))$. Naj bosta $x,y\in\mathbb{R}$ torej taka, da je $F(x) > 0$ in $G(y) > 0$. Zaporedoma uporabimo definicijo Marshallove kopule (5.3), enakosti (5.7) in (5.10) ter (5.4), da dobimo

$$\begin{aligned} C_{\phi,\psi}(F(x),G(y)) &= \min\{F(x)\psi(G(y))\,,\,\phi(F(x))G(y)\} \\ &= \min\{F(x)F_Y(y), F_X(x)G(y)\} \\ &= H(x,y). \end{aligned}$$

■

Iz dokaza opazimo, da za funkciji ϕ in ψ iz dokaza velja

$$\phi^*\circ F = 1/F_Z = \psi^*\circ G$$

v vseh točkah, v katerih sta F in G pozitivni. Za tako definirani funkciji ϕ in ψ torej velja točka (ii) Marshallovega izreka 5.7, zaradi česar smo implikacijo iz (i) v (ii) Marshallovega izreka posplošili. Oglejmo si še obratno implikacijo.

Dokaz Marshallovega izreka, implikacija iz (ii) v (i), glede na članek [33]. Definirati moramo porazdelitvene funkcije F_X, F_Y in F_Z, ki zadoščajo enakosti (5.4). Marshall v svojem članku postavi

$$F_X = \phi\circ F, \quad F_Y = \psi\circ G \quad \text{in} \quad F_Z = \frac{F}{\phi\circ F} = \frac{1}{\phi^*\circ F} = \frac{1}{\psi^*\circ G}.$$

Ob tako definiranih funkcijah se brez dodatnih predpostavk na funkciji ϕ in ψ ali F in G pojavi problem: funkcije F_X, F_Y in F_Z niso nujno porazdelitvene funkcije. Če je $F > 0$ in ϕ v 0 ni zvezna, tj. $\phi(0+) = c \in (0,1]$, potem je $F_X(-\infty) = c > 0$ in zato F_X ni porazdelitvena funkcija. Enako velja za F_Y, če ψ ni zvezna v 0 in je $G > 0$. Če je $\phi^*(0+) = d \in [1,\infty)$ in $F > 0$, je potem $F_Z(-\infty) = 1/d > 0$ in zato F_Z ni porazdelitvena funkcija.

Marshallov izrek zato opremimo še z nekaj dodatnimi tehničnimi predpostavkami in ga nato dokažemo. Ideja dokaza ostaja enaka.

Izrek 5.9. *Naj bo $C_{\phi,\psi}$ Marshallova kopula s pripadajočima funkcijama ϕ in ψ ter naj bosta F in G porazdelitveni funkciji, za katere predpostavimo naslednje:*

- *Če za $x\in\mathbb{R}$ velja $F(x) > 0$ in $G(x) > 0$, potem je $(\phi^*\circ F)(x) = (\psi^*\circ G)(x)$.*
- *Funkcija ϕ je zvezna v točki 0, ali pa je $x_F := \inf\{x\in\mathbb{R} \mid F(x)>0\} > -\infty$ in ima F v x_F skok. Funkcija ψ je zvezna v točki 0, ali pa je $x_G := \inf\{x\in\mathbb{R} \mid G(x)>0\} > -\infty$ in ima G v x_G skok.*
- *Za funkcijo ϕ velja $\phi^*(0+) = \infty$, ali pa obstaja tak $x \in \mathbb{R}$, da je $F(x) = 0$. Za funkcijo ψ velja $\psi^*(0+) = \infty$, ali pa obstaja tak $x\in\mathbb{R}$, da je $G(x) = 0$.*

Definiramo $H(x,y) = C_{\phi,\psi}(F(x),G(y))$ za vsak $x,y\in\mathbb{R}$. Potem obstajajo take neodvisne slučajne spremenljivke X, Y in Z, da je H skupna porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja $(\max\{X,Z\},\max\{Y,Z\})$.

Dokaz. Tudi ta dokaz razdelimo na tri korake. V prvem definiramo funkciji F_X in F_Y, za kateri dokažemo, da sta porazdelitveni funkciji. Tu potrebujemo drugo točko predpostavk izreka. Enako naredimo v drugem koraku za funkcijo F_Z, kjer uporabimo prvo in tretjo točko predpostavk. V tretjem koraku dokažemo, da je porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja $(\max\{X,Z\},\max\{Y,Z\})$ res enaka H. Dokaz sledi korakom dokaza izreka *Theorem 10* iz članka [37].

1. korak. Definiramo funkcijo F_X s predpisom

$$F_X(x) = \phi(F(x)) \quad \text{za vsak } x\in\mathbb{R}.$$

Ker sta funkciji ϕ in F naraščajoči, je F_X naraščajoča. Funkcija F je zvezna z desne. Naj bo ϕ zvezna. Funkcija F_X je potem zvezna z desne in

$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = \phi\left(\lim_{x\to-\infty} F(x)\right) = \phi(0) = 0.$$

Denimo, da ϕ ni zvezna. Po drugi točki predpostavk izreka je $x_F > -\infty$ in $F(x_F) > 0$. Ker je ϕ po lemi 5.4 zvezna na $(0, 1]$, je F_X zvezna z desne. Za vsak $x < x_F$ je $F_X(x) = \phi(0) = 0$ in zato je $F_X(-\infty) = 0$.

Za dokaz $F_X(\infty) = 1$ ne potrebujemo dodatnih predpostavk izreka, saj je ϕ zvezna v 1. Po izreku 2.2 je torej F_X porazdelitvena funkcija.

Po analognem razmisleku (zamenjamo ϕ s ψ in F z G) lahko definiramo tudi porazdelitveno funkcijo F_Y s predpisom

$$F_Y(x) = \psi(G(x)) \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}.$$

2. korak. Če je $F > 0$, potem je $x_F = -\infty$. V nasprotnem primeru je lahko $F(x_F) > 0$, če ima F v x_F skok, ali pa je $F(x_F) = 0$, če je F v x_F zvezna. Podobno velja za funkcijo G in x_G. Če je $F > 0$ ali ima F v x_F skok, in če je $G > 0$ ali ima G v x_G skok, potem za vsak $x \in \mathbb{R}$ definiramo

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0, & \text{če je } F(x) = G(x) = 0, \\ \dfrac{G(x)}{\psi(G(x))}, & \text{če je } F(x) = 0 \text{ in } G(x) > 0, \\ \dfrac{F(x)}{\phi(F(x))}, & \text{če je } F(x) > 0 \text{ in } G(x) = 0, \\ \dfrac{F(x)}{\phi(F(x))} \left(= \dfrac{G(x)}{\psi(G(x))} \right), & \text{če je } F(x) > 0 \text{ in } G(x) > 0, \end{cases}$$

kjer enakost v zadnjem predpisu velja po predpostavki. Vsi predpisi so dobro definirani, saj po lastnosti **(Fa*)** velja $\phi(u) = 0$ oziroma $\psi(u) = 0$ natanko tedaj, ko je $u = 0$. Če je F zvezna v x_F ali G zvezna v x_G, potem v teh dveh točkah na novo definiramo

$$F_Z(x_F) = \frac{1}{\phi^*(0+)} \quad \text{oziroma} \quad F_Z(x_G) = \frac{1}{\psi^*(0+)}. \tag{5.11}$$

Funkcija F_Z je v slednjem primeru dobro definirana, saj v primeru $x_F = x_G$ iz prve točke predpostavk sledi $\phi^*(0+) = \psi^*(0+)$. Zaradi dodatnega predpisa (5.11) je funkcija F_Z zvezna z desne tudi v primeru, ko je $\phi^*(0+) < \infty$ ali $\psi^*(0+) < \infty$. Očitno je F_Z naraščajoča, saj sta funkciji F in G naraščajoči ter ϕ^* in ψ^* padajoči. Prav tako brez uporabe dodatnih predpostavk velja $F_Z(\infty) = F(\infty)/\phi(F(\infty)) = 1$.

Dokažimo še, da je $F_Z(-\infty) = 0$. Če obstaja tak $x \in \mathbb{R}$, da je $F(x) = G(x) = 0$, potem je po definiciji F_Z seveda $F_Z(-\infty) = 0$. Naj bo $F > 0$. Po tretji točki predpostavk potem velja $\phi^*(0+) = \infty$ in zato je

$$\lim_{x \to -\infty} F_Z(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\phi^*(F(x))} = \frac{1}{\phi^*(0+)} = 0.$$

Podobno velja v primeru, ko je $G > 0$, saj je tedaj $\psi^*(0+) = \infty$.

Definirali smo torej porazdelitveno funkcijo F_Z, za katero po prvem koraku velja

$$\begin{aligned} F_X(x)F_Z(x) &= \phi(F(x))F_Z(x) = F(x) \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}, \\ F_Y(x)F_Z(x) &= \psi(G(x))F_Z(x) = G(x) \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Če je $F(x) > 0$ oziroma $G(x) > 0$, zadnji dve enačbi sledita iz definicije F_Z. Če je x tak, da je $F(x) = 0$ oziroma $G(x) = 0$, potem je tudi $F_X(x) = \phi(0) = 0$ oziroma $F_Y(x) = \psi(0) = 0$ in zato enačbi veljata za vsak $x \in \mathbb{R}$.

3. korak. Zaporedoma upoštevamo definicije funkcije H, Marshallove kopule $C_{\phi,\psi}$, porazdelitvenih funkcij F_X in F_Y ter enakosti (5.12), da izpeljemo

$$\begin{aligned}H(x,y) &= C_{\phi,\psi}(F(x),G(y)) = \min\{F(x)\psi(G(y))\,,\,\phi(F(x))G(y)\}\\ &= \min\{F(x)F_Y(y)\,,\,F_X(x)G(y)\}\\ &= \min\{F_X(x)F_Z(x)F_Y(y)\,,\,F_X(x)F_Y(y)F_Z(y)\}\,.\end{aligned}$$

Funkcijo H lahko torej zapišemo kot (5.4). Naj bodo sedaj X, Y in Z take neodvisne slučajne spremenljivke, da so v prejšnjih korakih definirane funkcije F_X, F_Y oziroma F_Z njihove porazdelitvene funkcije. Druga izmed ekvivalentnih trditev leme 5.6 je s tem izpolnjena in dokaz končan. ■

Oglejmo si poseben primer Marshallovih kopul, ki ga dobimo tako, da v verjetnostnemu modelu iz razdelka 5.1 dodatno privzamemo, da so časi udarov enako porazdeljeni.

Zgled 5.10. Marshallova kopula za enako porazdeljene čase udarov. Naj veljajo predpostavke izreka 5.8 in ob tem dodatno predpostavimo, da so slučajne spremenljivke X, Y in Z enako porazdeljene. Če z F_X označimo njihovo porazdelitveno funkcijo, potem je $F = G = F_X^2$. Želimo najti taki funkciji ϕ in ψ, da bo funkcija

$$H(x,y) = \min\left\{F_X^2(x)F_X(y), F_X(x)F_X^2(y)\right\}$$

za vsak $x, y \in \mathbb{R}$ enaka funkciji

$$C_{\phi,\psi}(F(x),G(y)) = \min\left\{\phi\left(F_X^2(x)\right)F_X^2(y), F_X^2(x)\,\psi\left(F_X^2(y)\right)\right\}.$$

Ob primerjavi obeh izrazov ugotovimo, da funkcijama $\phi(t) = \psi(t) = \sqrt{t}$, $t \in \mathrm{I}$, pripadajoča kopula $C_{\phi,\psi}$ ustreza enakosti. Kljub temu da je porazdelitvena funkcija F_X poljubna, je ustrezna kopula torej kar Marshall-Olkinova kopula s parametroma $\alpha = \beta = 1/2$.

Opazimo, da lahko funkciji ϕ in ψ na komplementu $\overline{\operatorname{im} F}$ oziroma $\overline{\operatorname{im} G}$ definiramo bolj naravno ter preprosto kot v dokazu izreka 5.8, kjer smo ju na teh območjih definirali kot linearno interpolacijo. Dejstvo, da funkcij in s tem Marshallovih kopul izven $\overline{\operatorname{im} F} \times \overline{\operatorname{im} G}$ ni mogoče definirati enolično, sledi že iz Sklarovega izreka 3.14. □

Izpeljimo algoritem za generiranje realizacije (u, v) slučajnega vektorja (U, V) s skupno porazdelitveno funkcijo $C_{\phi,\psi}$ za neki funkciji ϕ in ψ, ki zadoščata predpostavkam **(F1)**, **(F2)** in **(F3*)**. Obstajata dva načina, na katera določimo funkciji ϕ in ψ. Prva možnost je, da smo v verjetnostnem modelu določili porazdelitve časov udarov

X, Y in Z ter nato preko dokaza izreka 5.8 izračunali funkciji ϕ in ψ, za kateri je $C_{\phi,\psi}$ pripadajoča kopula slučajnega vektorja $(\max\{X,Z\},\max\{Y,Z\})$. Porazdelitveni funkciji $\max\{X,Z\}$ in $\max\{Y,Z\}$ označimo standardno z F oziroma z G. Denimo, da so X, Y in Z zvezne. Z uporabo leme 2.8 izpeljemo naslednji algoritem.

Algoritem 5.11. Vzorčenje iz Marshallove kopule.

1. Neodvisno vzorčimo r, s, t iz porazdelitve $\text{EZ}[0,1]$.
2. Definiramo $x = F_X^{-1}(r)$, $y = F_Y^{-1}(s)$ in $z = F_z^{-1}(t)$.
3. Definiramo $u' = \max\{x, z\}$ in $v' = \max\{y, z\}$.
4. Definiramo $u = F(u')$ in $v = G(v')$. Iskani par je (u, v).

Druga možnost je, da smo brez interpretacije v verjetnostnem modelu definirali neki dve funkciji ϕ in ψ, ki zadoščata pogojem **(F1)**, **(F2)** in **(F3*)**. V tem primeru algoritem temelji na izreku 5.9. Najprej poiščemo taki porazdelitveni funkciji F in G, za kateri velja $\phi^* \circ F = \psi^* \circ G$. Preverimo še, ali so izpolnjene preostale predpostavke izreka 5.9. Če so predpostavke izpolnjene, definiramo porazdelitvene funkcije F_X, F_Y in F_Z tako kot v dokazu izreka 5.9. Denimo, da so F_X, F_Y in F_Z zvezne. Zopet lahko vzorčimo na podlagi algoritma 5.11.

Marshallove kopule so urejene na način, ki je opisan v naslednji trditvi.

Trditev 5.12. Urejenost Marshallovih kopul. *Naj bosta $C_{\phi,\psi}$ in $C_{\zeta,\eta}$ Marshallovi kopuli s pripadajočima funkcijama ϕ in ψ oziroma ζ in η. Potem veljata naslednji trditvi:*

(i) *Za vsako Marshallovo kopulo velja $\Pi \preceq C_{\phi,\psi} \preceq M$, kjer Π in M prav tako pripadata družini Marshallovih kopul. Če je ena izmed funkcij ϕ ali ψ enaka identični funkciji, potem je pripadajoča Marshallova kopula enaka produktni. Za $\phi_M = \psi_M = \mathbb{1}_{(0,1]}$ dobimo za Marshallovo kopulo Fréchet-Hoeffdingovo zgornjo mejo M.*

(ii) *Če je $\phi \le \zeta$ in $\psi \le \eta$, potem je $C_{\phi,\psi} \preceq C_{\zeta,\eta}$.*

Dokaz. Ker za funkciji ϕ in ψ velja lastnost **(Fa*)**, je $C_{\phi,\psi}(u,v) \ge uv = \Pi(u,v)$. Po **(Fa*)** velja tudi $C_{\text{id},\psi}(u,v) = \min\{uv, u\psi(v)\} = uv$. Preostali del točke (i) in točka (ii) sta očitni. ■

Če sta funkciji ϕ in ψ strogo naraščajoči, je nosilec pripadajoče Marshallove kopule enak I^2 in kopula ima tako absolutno zvezni kot tudi singularni del. Nosilec singularnega dela je krivulja

$$\Gamma_{\phi,\psi} = \{(u,v) \in \mathrm{I}^2 \mid \phi^*(u) = \psi^*(v) > 1\}.$$

To sledi iz

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C_{\phi,\psi}(u,v) = \begin{cases} \phi'(u), & \text{za } \phi^*(u) < \psi^*(v), \\ \psi'(v), & \text{za } \phi^*(u) > \psi^*(v). \end{cases}$$

V naslednji trditvi dokažemo nekatere lastnosti zveznih slučajnih spremenljivk, ki ju povezuje Marshallova kopula. V dokazu te trditve uporabimo trditve 3.33, 3.35 in 3.37, kjer so te lastnosti izražene z analitičnimi lastnostmi kopul.

Trditev 5.13. Repne lastnosti Marshallovih kopul. *Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki s skupno porazdelitveno funkcijo H in zveznima robnima porazdelitvenima funkcijama F oziroma G, katerih pripadajoča kopula je Marshallova kopula $C_{\phi,\psi}$. Potem velja:*

(i) $\mathrm{LRP}(Y|X)$ *in* $\mathrm{LRP}(X|Y)$ *(iz česar sledi pozitivna odvisnost) za poljubni funkciji* ϕ *in* ψ.

(ii) $\mathrm{SN}(Y|X)$, *iz česar sledi lastnost* $\mathrm{DRN}(Y|X)$, *oziroma* $\mathrm{SN}(X|Y)$, *iz česar sledi* $\mathrm{DRN}(X|Y)$, *natanko tedaj, ko je* ϕ *oziroma* ψ *konkavna.*

(iii) $\mathrm{DRN}(Y|X)$ *oziroma* $\mathrm{DRN}(X|Y)$ *natanko tedaj, ko je* $(1-\phi(u))/(1-u)$ *oziroma* $(1-\psi(u))/(1-u)$ *za* $u\in[0,1)$ *padajoča funkcija.*

(iv) *Spodnji repni koeficient Marshallove kopule* $C_{\phi,\psi}$ *je enak*

$$\lambda_L = \min\{\phi(0+), \psi(0+)\}.$$

Če obstaja tak $t_0\in[0,1)$, *da je* $\phi(t) \leq \psi(t)$ *za vsak* $t\in[t_0,1]$, *potem je*

$$\lambda_U = 1 - \lim_{t\uparrow 1} \frac{1-\phi(t)}{1-t} = 1 - \phi'(1-).$$

Če obstaja tak $t_0\in[0,1)$, *da je* $\psi(t) \leq \phi(t)$ *za vsak* $t\in[t_0,1]$, *potem je*

$$\lambda_U = 1 - \lim_{t\uparrow 1} \frac{1-\psi(t)}{1-t} = 1 - \psi'(1-).$$

Dokaz. Naj bo $C = C_{\phi,\psi}$ Marshallova kopula s pripadajočima funkcijama ϕ in ψ, ki zadoščata pogojem **(F1)**, **(F2)** in **(F3*)**. Pri točkah (i), (ii) in (iii) bomo dokazali le prve dele trditev. Preostali deli teh točk se dokažejo analogno, saj funkciji ϕ in ψ nastopata v Marshallovi kopuli simetrično ter zadoščata enakim lastnostim.

(i) Ker je funkcija $C(u,v)/u = \min\{\phi^*(u)v, \psi(v)\}$ po **(F3*)** padajoča v spremenljivki u, za kopulo C velja $\mathrm{LRP}(Y|X)$.

(ii) Kopula C je $\mathrm{SN}(Y|X)$ natanko tedaj, ko je za vsak $v\in \mathrm{I}$ in skoraj vsak $u\in\mathrm{I}$ funkcija

$$\frac{\partial}{\partial u}C(u,v) = \begin{cases} \psi(v), & \text{če je } \phi^*(u) > \psi^*(v), \\ \phi'(u)v, & \text{če je } \phi^*(u) < \psi^*(v), \end{cases}$$

padajoča v spremenljivki u. Naj bo $v > 0$ poljuben in $u_1 \leq u_2$ taka, da je $\phi^*(u_2) \leq \psi^*(v) \leq \phi^*(u_1)$. Dokazati želimo, da je $\psi(v) \geq \phi'(u_2)v$. To drži, ker po posledici lastnosti **(Fc*)** velja $\phi'(u_2) \leq \phi^*(u_2) \leq \psi^*(v)$. Dokaz je končan, saj drugi predpis pada v spremenljivki u natanko tedaj, ko je ϕ konkavna.

(iii) Kopula C je DRN$(Y|X)$ natanko tedaj, ko je za vsak $v \in \mathrm{I}$ funkcija

$$\frac{v - C(u,v)}{1-u} = \begin{cases} \dfrac{v - u\psi(v)}{1-u} = \psi(v) - \dfrac{\psi(v) - v}{1-u}, & \text{če je } \phi^*(u) \geq \psi^*(v), \\ v\dfrac{1-\phi(u)}{1-u}, & \text{če je } \phi^*(u) \leq \psi^*(v), \end{cases}$$

padajoča v spremenljivki u. Ker je $\psi(v) \geq v$, prvi predpis pada v spremenljivki u. Drugi predpis je padajoča funkcija v u natanko tedaj, ko je padajoča funkcija $(1-\phi(u))/(1-u)$. Za konec dokaza te točke naj bo $v > 0$ poljuben in $0 < u_1 \leq u_2 < 1$ taka, da je $\phi^*(u_2) \leq \psi^*(v) \leq \phi^*(u_1)$. Ker je funkcija ϕ^* zvezna na intervalu $[u_1, u_2]$, obstaja tak $\hat{u}$, da je $\phi^*(\hat{u}) = \psi(v)$ in zato velja

$$\frac{v - C(u_1,v)}{1-u_1} \geq \frac{v - C(\hat{u},v)}{1-\hat{u}} \geq \frac{v - C(u_2,v)}{1-u_2}.$$

(iv) Diagonalni odsek Marshallove kopule C je enak

$$\delta(t) = t \min\{\phi(t), \psi(t)\}, \qquad t \in \mathrm{I}.$$

Od tod očitno sledi formula za λ_L. Naj bo $t_0 \in [0,1)$ tak, da je $\phi(t) \leq \psi(t)$ za vsak $t \in [t_0, 1]$. V tem primeru je

$$\lim_{t\uparrow 1} \frac{1-\delta(t)}{1-t} = \lim_{t\uparrow 1} \frac{1-t\phi(t)}{1-t} = \lim_{t\uparrow 1} \left(\phi(t) + \frac{1-\phi(t)}{1-t}\right) = 1 + \lim_{t\uparrow 1} \frac{1-\phi(t)}{1-t},$$

od koder sledi prvi izraz za λ_U. Če uporabimo še L'Hôpitalovo pravilo za računanje limit, izpeljemo še drugi predpis za λ_U. Podobno dokažemo zadnjo trditev te točke.

■

V članku [6] je obravnavan primer **simetričnih Marshallovih kopul**, tj. pripadajoči funkciji ϕ in ψ sta enaki, čeprav ni prepoznan kot tak, zaradi česar v članku manjka verjetnostna karakterizacija. Dokazano je, da je simetrična Marshallova kopula res kopula, prav tako pa so pri $\phi = \psi$ dokazani rezultati trditev 5.12 in 5.13. Navedimo dva rezultata tega članka. Če je $\phi(t) = \theta t + (1-\theta)$, $t \in \mathrm{I}$, za $\theta \in [0,1]$, potem je pripadajoča Marshallova kopula $C_{\phi,\phi}$ enaka Fréchetovi kopuli iz zgleda 4.3 s parametroma $\alpha = 0$ in $\beta = 1 - \theta$. Za simetrično Marshallovo kopulo $C_{\phi,\phi}$ sta Kendallov τ in Spearmanov ρ enaka

$$\tau_{\phi,\phi} = 4\int_0^1 x\phi^2(x)\,dx - 1 \qquad \text{in} \qquad \rho_{\phi,\phi} = 12\int_0^1 x^2\phi(x)\,dx - 3.$$

Na koncu tega razdelka navedimo še povezavo med Marshallovimi kopulami in semilinearnimi kopulami (4.9). Iz predpisa (4.10) sledi, da so semilinearne kopule natanko simetrične Marshallove kopule. Semilinearne in simetrične Marshallove kopule imajo torej tako verjetnostno kot geometrijsko interpretacijo. Preprosto lahko dokažemo tudi, da je C Marshallova kopula natanko tedaj, ko obstajata taki semilinearni kopuli S_1 in S_2, da za vse $u, v \in \mathrm{I}$ velja

$$C(u,v) = \min\left\{\frac{S_1(uv,v)}{v}, \frac{S_2(u,uv)}{u}\right\}.$$

Vsaka Marshallova kopula je torej transformacija dveh semilinearnih kopul (članek [8]).

5.3 Večrazsežne Marshallove kopule

Marshallove kopule lahko posplošimo na večrazsežni primer tako, da poiščemo n-kopulo, ki pripada verjetnostnemu modelu 5.1 z n komponentami. Ob tem moramo natančno določiti, koliko udarov deluje na sistem in na katere komponente vplivajo.

Večrazsežna Marshallova kopula izhaja iz naslednjega verjetnostnega modela. Na sistem z n komponentami $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ deluje $n+1$ različnih vrst udarov. Prva vrsta udara vpliva le na komponento A_1, druga vrsta le na $\mathrm{A}_2, \ldots, n$-ta vrsta le na A_n, zadnja vrsta udara pa deluje na vse komponente $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ hkrati. Čase prihodov prvih n vrst udarov označimo zaporedoma z $X_1, X_2, \ldots, X_n$, medtem ko čas zadnjega udara označimo z Z. Predpostavimo, da so $X_1, X_2, \ldots, X_n$ in Z neodvisne. Življenjske dobe komponent $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ označimo zaporedoma z $U_1, U_2, \ldots, U_n$. Potem je $U_i = \min\{X_i, Z\}$ za vsak $i \in \{1, 2 \ldots, n\}$, saj vsaka izmed komponent preneha delovati ob prvem udaru nanjo. Želimo poiskati kopulo preživetja C, ki združi enorazsežne funkcije preživetja $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$ slučajnih spremenljivk $U_1, U_2, \ldots, U_n$ v njihovo skupno funkcijo preživetja $\overline{H}$.

Naj bodo $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ funkcije iz I v I, ki zadoščajo pogojem **(F1)**, **(F2)** in **(F3*)**. **Marshallova n-kopula** je funkcija $C\colon \mathrm{I}^n \longrightarrow \mathrm{I}$, definirana s predpisom

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2, \ldots, u_n) &= \min_{k\in\{1,\ldots,n\}} \Big\{\phi_1(u_1)\ldots\phi_{k-1}(u_{k-1})\, u_k\, \phi_{k+1}(u_{k+1})\ldots\phi_n(u_n)\Big\} \\ &= \prod_{i=1}^{n} u_i \cdot \min_{k\in\{1,\ldots,n\}} \left\{\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \phi_i^*(u_i)\right\}. \end{aligned}$$

Slučajnim spremenljivkam $U_1, U_2, \ldots, U_n$ pripadajoča kopula preživetja je Marshallova n-kopula, kjer za vsak $i \in \{1, 2 \ldots, n\}$ definiramo $\phi_i = \overline{F}_{X_i} \circ \overline{F}_i^{-1}$ na $\operatorname{im} \overline{F}_i$ (članek [7]).

Marshall-Olkinovo dvorazsežno kopulo lahko razširimo na več razsežnosti preko bolj splošnega modela, kot je opisani model večrazsežne Marshallove kopule − za vsak $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ lahko dovolimo udare na k poljubnih komponent hkrati. Na sistem torej deluje $2^n - 1$ udarov, katerih časi prihodov so porazdeljeni eksponentno. Vpeljimo naslednjo notacijo. Za vsako neprazno množico $K \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} =: N$

naj bo X_K porazdeljena eksponentno s parametrom $\lambda_K \geq 0$. Slučajna spremenljivka X_K predstavlja čas udara, ki deluje natanko na komponente $\{A_k \mid k \in K\}$. Če je $\lambda_K = 0$, potem je $X_K = \infty$ skoraj gotovo. To pomeni, da v modelu ni takega udara, ki bi deloval natanko na komponente $\{A_k \mid k \in K\}$. Predpostavimo, da so slučajne spremenljivke $\{X_K\}_{\emptyset \neq K \subseteq N}$ neodvisne in da je $\sum_{K \colon k \in K} \lambda_K > 0$ za vsak $k \in N$, tj. na vsako komponento deluje vsaj en udar. Življenjska doba komponente A_k je torej enaka

$$U_k = \min\{X_K \mid K \subseteq N, \text{za katerega je } k \in K\}.$$

Za vsak $k \in N$ je U_k porazdeljena eksponentno s parametrom $\sum_{K \colon k \in K} \lambda_K > 0$. Podobno kot pri dvorazsežnem primeru v (5.1) izpeljemo

$$\overline{H}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \exp\left(- \sum_{\emptyset \neq K \subseteq N} \lambda_K \max_{k \in K}\{x_k\} \right), \qquad x_1, x_2, \ldots, x_n > 0.$$

Od tod lahko zopet podobno kot pri dvorazsežnem primeru dokažemo, da je kopula preživetja, ki pripada slučajnemu vektorju $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$, enaka

$$C(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \prod_{\emptyset \neq K \subseteq N} \min_{k \in K} \left\{ u_k^{\lambda_K / \sum_{k \in L} \lambda_L} \right\}, \qquad u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathrm{I}. \tag{5.13}$$

Kopulo, ki je podana s predpisom (5.13), imenujemo **Marshall-Olkinova n-kopula** [34]. Ta ima $2^n - 1$ parametrov, zaradi česar je za velike n zelo prilagodljiva, vendar hkrati težavna za obravnavo.

Zaradi narave verjetnostnega modela, ki stoji za Marshall-Olkinovimi večrazsežnimi kopulami, so le-te pogostokrat uporabljene v finančni matematiki, na primer pri upravljanju s tveganji, modeliranju kreditnega tveganja in v zavarovalništvu [10, 30, 18, 3].

Poglavje 6

Maksmin kopule

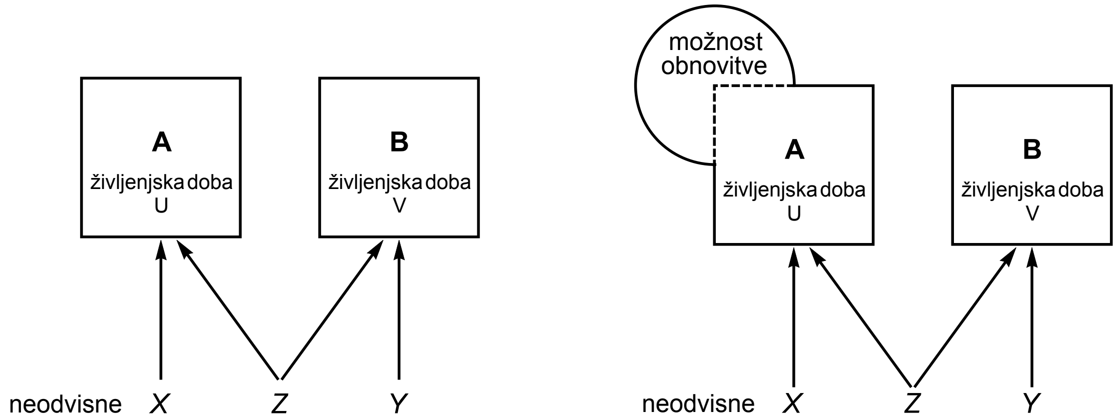
To poglavje predstavlja osrednji del disertacije. V njem definiramo *maksmin kopule*, ki izhajajo iz modifikacije verjetnostnega modela Marshallovih kopul. Prvi razdelek je namenjen motivaciji in opisu modela. V drugem razdelku definiramo maksmin kopulo in dokažemo, da je res kopula. Karakterizacija maksmin kopul z modelom dvokomponentnega sistema, na katerega delujejo udari in ima ena komponenta možnost obnovitve, je podana v tretjem razdelku. V četrtem razdelku obravnavamo lastnosti, ki smo jih vpeljali v razdelku 3.3, in navedemo primere maksmin kopul. Rezultati tega poglavja so obravnavani v članku [37].

6.1 Motivacija in verjetnostni model

V razdelku 5.1 smo predstavili verjetnostni model, iz katerega izhajajo Marshallove in Marshall-Olkinove kopule. Ta model spremenimo tako, da dopuščamo možnost obnovitve komponente A, medtem ko ostanejo lastnosti komponente B in treh vrst udarov nespremenjene. To si lahko predstavljamo tudi tako, da imamo na razpolago dodatni primerek komponente A. Naš verjetnostni model je torej sistem s komponentama A in B, na katerega delujejo udari treh vrst in v katerem ima komponenta A možnost obnovitve. Prva vrsta udara vpliva le na komponento A, druga vrsta le na B, tretja vrsta udara pa deluje na obe komponenti hkrati. Grafični predstavitvi tega modela in prvotnega modela iz razdelka 5.1 sta podani na sliki 6.1.

Čase udarov označimo zaporedoma s slučajnimi spremenljivkami X, Y in Z ter za njih predpostavimo, da so med seboj neodvisne. Življenjski dobi komponent A in B označimo z U oziroma z V. Življenjska doba $V = \min\{Y, Z\}$ komponente B ostane nespremenjena, medtem ko je $U = \max\{X, Z\}$, saj zaradi obnovitvene lastnosti komponenta A preneha delovati šele ob obeh udarih nanjo. Želimo poiskati slučajnima spremenljivkama U in V pripadajočo kopulo. S tem namenom v naslednjem razdelku vpeljemo maksmin kopule, za katere v drugem razdelku dokažemo, da rešijo naš problem.

Opisani verjetnostni model sodi v področje analize preživetja [28, 40] in ga je zato



Slika 6.1. Verjetnostni model Marshallovih kopul (levo) in njegova modifikacija (desno), ki je model maksmin kopul.

mogoče uporabiti na raznovrstnih področjih, kot so na primer (bio)medicina, inženirstvo in ekonomija. Navedimo dva možna zgleda uporabe tega modela. Na glavnem strežniku imamo spletno aplikacijo in njej pripadajočo podatkovno bazo, katere kopija je še na nekem oddaljenem strežniku. Naj bo U življenjska doba podatkovne baze in V čas dostopnosti aplikacije na spletu. Čas udara prve in tretje vrste je čas, ko pregori oddaljeni oziroma glavni strežnik (na primer zaradi električnega udara). Druga vrsta udara je sesutje aplikacije. Podatkovno bazo torej izgubimo natanko tedaj, ko pregorita oba strežnika (v kateremkoli vrstnem redu), medtem ko aplikacija na spletu ni več na voljo natanko tedaj, ko se sesuje sama ali pa pregori glavni strežnik. Opisani zgled torej ustreza temu modelu.

Podoben primer lahko najdemo v ekonomiji. Denimo, da opazujemo majhen trg, ki je primarno odvisen le od dveh podjetij – farmacevtskega podjetja A in podjetja B, ki proizvaja avtomobilske dele. Naj bosta U in V življenjski dobi podjetij A oziroma B. Podjetje A ima na nekem tujem trgu še hčerinsko podjetje. Naj bosta X in Z čas zloma tujega oziroma domačega trga, Y pa naj bo čas zloma trga avtomobilskih delov. Ugotovimo, da je $U = \max\{X, Z\}$ in $V = \min\{Y, Z\}$.

Za konec poudarimo, da verjetnostni model maksmin kopul ni poseben primer modela z „neusodnimi“ udari, ki je obravnavan v članku [34]. V *modelu z neusodnimi udari* predpostavimo, da na sistem z dvema komponentama brez možnosti obnovitve delujejo udari treh vrst, ki pa ne povzročijo nujno prenehanje delovanja komponent. Prva oziroma druga vrsta udara deluje le na komponento A oziroma B in jo uniči z verjetnostjo $p_1 \in (0, 1]$ oziroma $p_2 \in (0, 1]$. Tretja vrsta udara deluje na obe komponenti hkrati in pri tem uniči le prvo oziroma le drugo komponento z verjetnostjo $p_{01} \in [0, 1]$ oziroma $p_{10} \in [0, 1]$, medtem ko je $p_{00} \in [0, 1]$ verjetnost prenehanja delovanja obeh komponent. Po drugi strani v modelu maksmin kopul velja, da „prihod prvega udara uniči polovico komponente A z verjetnostjo 1, nato pa prihod drugega udara uniči še drugo polovico komponente A, zopet z verjetnostjo 1“.

6.2 Definicija maksmin kopul

Tako kot Marshallove kopule so tudi maksmin kopule odvisne od dveh funkcij, ki morata zadoščati določenim lastnostim. Pri tem mora ena izmed funkcij, ki jo bomo standardno označevali s ϕ, zadoščati enakim zahtevam kot funkciji iz definicije Marshallovih kopul. Drugo funkcijo bomo standardno označevali s ψ in zanjo predpostavili neke druge lastnosti, ki jih definiramo in obravnavamo še pred definicijo maksmin kopule.

Naj bo $\psi\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ neka funkcija. Spomnimo se, da smo na začetku razdelka 5.2 definirali funkcijo

$$\psi^*\colon (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \psi^*(v) = \frac{\psi(v)}{v},$$

vpeljali lastnosti **(F1)**, **(F2)** in **(F3*)** ter dokazali lemo 5.4. V tem poglavju vpeljemo še dodatno lastnost

(F3$_*$) $v_1 - \psi(v_1) - v_1\psi(v_2) \leq v_2 - \psi(v_2) - v_2\psi(v_1)$ za vse $v_1 \leq v_2$ iz I.

Dodatne lastnosti, ki sledijo iz pogojev **(F1)**, **(F2)** in **(F3$_*$)**, dokažemo podobno kot v razdelku 5.2 ter jih primerno označimo.

Lema 6.1. *Če $\psi\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ zadošča pogojem* **(F1)**, **(F2)** *in* **(F3$_*$)**, *potem veljajo naslednje trditve:*

(Fa$_*$) $\psi(v) \leq v$ *za vse* $v \in \mathrm{I}$,

(Fb$_*$) *če je* $\psi(v) = v$ *za nek* $v \in [0,1)$, *potem je* ψ *na intervalu* $[0,v]$ *enaka identični funkciji,*

(Fc$_*$) $\dfrac{\psi(v_2) - \psi(v_1)}{v_2 - v_1} \leq \dfrac{1 - \psi(v_1)}{1 - v_1} \leq \dfrac{1 - \psi(v_2)}{1 - v_2}$ *za vse* $0 \leq v_1 < v_2 < 1$,

- ψ *je zvezna na intervalu* $[0,1)$.

Dokaz. Zaporedoma dokažemo vse točke leme.

(Fa$_*$) V neenakosti **(F3$_*$)** vzamemo $v_1 = 0$ in nato uporabimo **(F1)**.

(Fb$_*$) Predpostavimo, da obstaja tak $v_2 \in [0,1)$, da je $\psi(v_2) = v_2$. Za $v_1 \leq v_2$ po **(F3$_*$)** potem velja $v_1(1 - v_2) \leq \psi(v_1)(1 - v_2)$ oziroma $v_1 \leq \psi(v_1)$. Z uporabo lastnosti **(Fa$_*$)** je dokaz te točke končan.

(Fc$_*$) Zlahka preverimo, da sta obe neenakosti ekvivalentni **(F3$_*$)**.

- Očitno sledi iz **(Fc$_*$)**.

■

Ker je neenakost v **(F3$_*$)** trivialna pri $v_2 = 1$, je lahko ψ v točki 1 nezvezna. Taka je na primer funkcija $\psi(v) = (v/2) \cdot \mathbb{1}_{(0,1]}(v) + \mathbb{1}_{\{1\}}(v)$.

Za funkcijo $\psi\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, ki zadošča pogojem **(F1)**, **(F2)** in **(F3$_*$)**, definirajmo funkcijo $\psi_*\colon \{v \in (0,1) \mid \psi(v) < v\} \cup \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$\psi_*(v) = \frac{1-\psi(v)}{v-\psi(v)}$$

za $v \in (0,1)$ in $\psi_*(1) = 1$. Opazimo, da lahko funkcijo ψ_* razširimo na celoten interval $[0,1]$, če definiramo

$$\psi_*(v) = \begin{cases} \infty, & \text{če je } \psi(v) = v \in [0,1), \\ \dfrac{1-\psi(v)}{v-\psi(v)}, & \text{če je } \psi(v) < v, \\ 1, & \text{če je } v = 1. \end{cases}$$

Po **(Fb$_*$)** obstaja tak $v_0 \in (0,1]$, da ima na intervalu $(v_0,1] \cup \{1\}$ funkcija ψ_* končne vrednosti. Opazimo, da je $\psi_*(0+) = \infty$. Spomnimo se, da lahko za funkcijo ψ^* sklepamo le, da obstaja limita $\psi^*(0+) = c \in [1,\infty]$. Z vpeljavo funkcije ψ_* lahko ob veljavnosti **(F1)** in **(F2)** formulacijo lastnosti **(F3$_*$)** poenostavimo.

Lema 6.2. *Naj za funkcijo $\psi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ veljata pogoja* **(F1)** *in* **(F2)**. *Potem veljata naslednji trditvi:*

- *Funkcija ψ zadošča pogoju* **(F3$_*$)** *natanko tedaj, ko je funkcija $\psi_*\colon [0,1] \longrightarrow [1,\infty]$ padajoča.*
- *Če funkcija ψ zadošča pogoju* **(F3$_*$)**, *potem obstaja $\psi'(v)$ za skoraj vsak v in za vsak tak v je $\psi'(v) \leq \dfrac{1-\psi(v)}{1-v}$.*

Dokaz. Zaporedoma dokažimo obe točki leme.

- Naj velja **(F3$_*$)**. Veljajo torej vse trditve leme 6.1. Vzemimo $v_1 \leq v_2$ in dokažimo, da je $\psi_*(v_2) \leq \psi_*(v_1)$. Ugotovimo, da lahko neenakost iz **(F3$_*$)** zapišemo tudi kot

  $$\Big(v_1 - \psi(v_1)\Big)\Big(1-\psi(v_2)\Big) \leq \Big(v_2 - \psi(v_2)\Big)\Big(1-\psi(v_1)\Big). \tag{6.1}$$

  Po **(Fa$_*$)** so vsi faktorji nenegativni. Od tod sledi $\psi_*(v_2) \leq \psi_*(v_1)$, če je $v_i < \psi(v_i)$ za $i \in \{1,2\}$. V primeru, ko je $\psi(v_1) = v_1$, je $\psi_*(v_1) = \infty$ in zato seveda velja $\psi_*(v_2) \leq \psi_*(v_1)$. Preostane torej še možnost, da je $v_1 < \psi(v_1)$ in $v_2 = \psi(v_2)$. Iz lastnosti **(Fb$_*$)** potem sledi $v_2 = 1$, zaradi česar je $\psi_*(v_2) = 1 \leq \psi_*(v_1)$.

  Obratno, naj bo sedaj ψ_* padajoča funkcija. Dokazati moramo **(F3$_*$)** oziroma ekvivalentno (6.1). V tem dokazu se na trditve leme 6.1 ne moremo neposredno sklicati, saj njene predpostavke niso izpolnjene. Ker za poljuben $v \in \mathrm{I}$ velja $\psi_*(v) \geq \psi_*(1) = 1 \geq 0$, funkcija ψ_* kljub temu zadošča lastnosti **(Fa$_*$)**. Naj bosta $v_1 \leq v_2$ poljubna. Če je $v_i < \psi(v_i)$ za $i \in \{1,2\}$, potem iz $\psi_*(v_2) \leq \psi_*(v_1)$ očitno sledi (6.1). V primeru, ko je $\psi(v_2) = v_2$, je $\psi_*(v_2) = \infty$ in zato tudi $\psi(v_1) = v_1$, od koder sledi veljavnost (6.1). Preostane torej še možnost, da je $\psi(v_1) = v_1$. Neenakost (6.1) je v tem primeru ekvivalentna neenakosti $(1 - v_1)(v_2 - \psi(v_2)) \geq 0$, ki je izpolnjena po dokazani lastnosti **(Fa$_*$)**. Dokaz ekvivalence pogojev je torej končan.

- Poleg **(F1)** in **(F2)** predpostavimo še **(F3$_*$)**. Ker je ψ monotona omejena funkcija na intervalu $[0, 1]$, je odvedljiva skoraj povsod glede na Lebesgueovo mero. Po ravnokar dokazanem je ϕ^* padajoča in zato je

$$0 \leq \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{\psi_*(v)}\right) = \frac{1 - \psi(v) - \psi'(v)(1 - v)}{(1 - \psi(v))^2}$$

za vsak v, v katerem je ψ odvedljiva, iz česar sledi $\psi'(v) \leq (1 - \psi(v))/(1 - v)$.

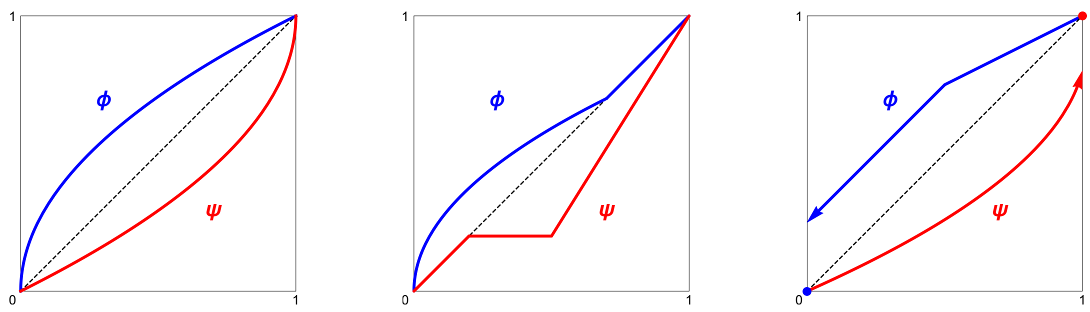
■

Maksmin kopula bo tako kot Marshallova kopula odvisna od dveh funkcij z domeno $[0, 1]$, ki ju bomo standardno označevali s ϕ in ψ. Pri Marshallovi kopuli sta obe funkciji zadoščali enakim predpostavkam, tj. **(F1)**, **(F2)** in **(F3*)**. Pri maksmin kopuli $C_{\phi,\psi}$ bo ϕ še vedno zadoščala **(F1)**, **(F2)** in **(F3*)**, medtem ko bodo za ψ veljali pogoji **(F1)**, **(F2)** in **(F3$_*$)**. Z namenom poenostavitve vpeljimo naslednjo oznako: par funkcij (ϕ, ψ), $\phi, \psi : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$, zadošča lastnosti **(F)**, če za obe funkciji veljata lastnosti **(F1)** in **(F2)**, ϕ zadošča **(F3*)**, ψ pa zadošča lastnosti **(F3$_*$)**.

Iz pogoja **(F)** sledijo vse do sedaj naštete lastnosti oblike „**(Fx)**“ in trditve v lemah 5.4, 6.1 in 6.2. Ob veljavnosti **(F)** velja še $t\phi(t) + t\psi(t) \leq t + \phi(t)\psi(t)$, kar je ekvivalentno lastnosti

(Fd) $\phi(t)(t - \psi(t)) \leq t(1 - \psi(t))$ za vsak $t \in \mathrm{I}$ oziroma $\phi^*(t) \leq \psi_*(t)$.

Na sliki 6.2 so skicirani različni primeri funkcij ϕ in ψ, ki zadoščajo pogojem **(F1)**, **(F2)** in **(F3*)** oziroma **(F3$_*$)** ter grafično predstavijo dokazane lastnosti tipa „**(Fx)**“.



(a) Veljati mora $\psi \leq \mathrm{id} \leq \phi$. **(b)** Oris lastnosti **(Fb*)** in **(Fb$_*$)**. **(c)** Funkciji sta lahko nezvezni.

Slika 6.2. Primeri funkcij ϕ in ψ, ki zadoščajo pogojem **(F1)**, **(F2)**, in **(F3*)** oziroma **(F3$_*$)**, ter ilustrirajo lastnosti tipa „**(Fx)**“.

Definicija 6.3. Naj par funkcij (ϕ, ψ) zadošča pogoju **(F)**. Funkcijo $C_{\phi,\psi} \colon \mathrm{I}^2 \longrightarrow \mathrm{I}$, definirano s predpisom

$$C(u,v) = C_{\phi,\psi}(u,v) = \min\{\phi(u)(v-\psi(v)), u(1-\psi(v))\} + u\psi(v), \quad u, v \in \mathrm{I}, \tag{6.2}$$

imenujemo **maksmin kopula**.

Če izberemo taka u in v, da sta vrednosti $\phi^*(u)$ in $\psi_*(v)$ končni, je potem

$$C(u,v) = u(v-\psi(v)) \min\{\phi^*(u), \psi_*(v)\} + u\psi(v).$$

To obliko lahko primerjamo z Marshallovimi kopulami in pri tem opazimo bistveno razliko v dodatnem členu $u\psi(v)$. V primeru, ko je ena izmed vrednosti $\phi^*(u)$ ali $\psi_*(v)$ neskončna, je $C(u,v) = uv = \Pi(u,v)$.

Če dovolimo neskončne vrednosti funkcij ϕ^* in ψ_*, pridemo še do tretjega načina zapisa maksmin kopule:

$$C(u,v) = \begin{cases} \phi(u)(v-\psi(v)) + u\psi(v), & \text{če je } \phi^*(u) \leq \psi_*(v), \\ u, & \text{če je } \psi_*(v) \leq \phi^*(u). \end{cases} \tag{6.3}$$

Za $u \geq v$, je $C(u,v)$ enaka prvemu predpisu, saj po **(Fd)** in **(F3$_*$)** velja $\phi^*(u) \leq \psi_*(v)$. Sedaj imamo vsa potrebna sredstva, da dokažemo, da je maksmin kopula res kopula.

Izrek 6.4. *Maksmin kopula je kopula.*

Dokaz. Naj bo $C = C_{\phi,\psi}$ maksmin kopula s pripadajočim parom funkcij (ϕ, ψ), ki zadošča pogoju **(F)**. Funkcija C zaradi veljavnosti **(F1)** očitno zadošča pogojema **(C1)** in **(C2)**. Izberimo poljubne $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathrm{I}$, za katere je $u_1 \leq u_2$ in $v_1 \leq v_2$. Dokazati želimo, da je ploščina pripadajočega pravokotnika glede na C nenegativna. V ta namen ločimo primere glede na urejenost vrednosti $\phi^*(u_1)$, $\phi^*(u_2)$, $\psi_*(v_1)$ in $\psi_*(v_2)$. Ko upoštevamo pogoja **(F3*)** in **(F3$_*$)**, preostane šest različnih primerov. Vsakega izmed njih obravnavamo posebej. V dokazu bomo uporabljali zapis maksmin kopule (6.3).

(i) Če je $\psi_*(v_2) \leq \psi_*(v_1) \leq \phi^*(u_2) \leq \phi^*(u_1)$, neposredno izračunamo

$$\begin{aligned} V_C((u_1,u_2] \times (v_1,v_2]) &= C(u_2,v_2) - C(u_2,v_1) - C(u_1,v_2) + C(u_1,v_1) \\ &= u_2 - u_2 - u_1 + u_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

(ii) V primeru, ko je $\psi_*(v_2) \leq \phi^*(u_2) \leq \psi_*(v_1) \leq \phi^*(u_1)$, člene ustrezno preuredimo in uporabimo **(Fa$_*$)** ter predpostavko $\phi^*(u_2) \leq \psi_*(v_1)$, da ocenimo

$$\begin{aligned} V_C((u_1,u_2] \times (v_1,v_2]) &= u_2 - \phi(u_2)(v_1 - \psi(v_1)) - u_2\psi(v_1) - u_1 + u_1 \\ &= u_2(1-\psi(v_1)) - \phi(u_2)(v_1 - \psi(v_1)) \\ &= u_2(v_1 - \psi(v_1))(\psi_*(v_1) - \phi^*(u_2)) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

(iii) Ko je $\psi_*(v_2) \leq \phi^*(u_2) \leq \phi^*(u_1) \leq \psi_*(v_1)$, ploščino glede na C zapišemo kot

$$\begin{aligned} V_C((u_1,u_2]\times(v_1,v_2]) &= u_2 - \phi(u_2)(v_1 - \psi(v_1)) - u_2\psi(v_1) \\ &\quad - u_1 + \phi(u_1)(v_1 - \psi(v_1)) + u_1\psi(v_1) \\ &= (u_2 - u_1)(1 - \psi(v_1)) - (\phi(u_2) - \phi(u_1))(v_1 - \psi(v_1)) \\ &= (u_2 - u_1)(v_1 - \psi(v_1)) \left(\psi_*(v_1) - \frac{\phi(u_2) - \phi(u_1)}{u_2 - u_1} \right). \end{aligned}$$

Drugi faktor je nenegativen zaradi lastnosti **(Fa$_*$)**, medtem ko po lastnosti **(Fc*)** in predpostavki $\phi^*(u_1) \leq \psi_*(v_1)$ sledi še nenegativnost tretjega faktorja.

(iv) Ob predpostavki $\phi^*(u_2) \leq \psi_*(v_2) \leq \psi_*(v_1) \leq \phi^*(u_1)$ dobimo

$$\begin{aligned} V_C((u_1,u_2]\times(v_1,v_2]) &= \phi(u_2)(v_2 - \psi(v_2)) + u_2\psi(v_2) \\ &\quad - \phi(u_2)(v_1 - \psi(v_1)) - u_2\psi(v_1) \\ &= \phi(u_2)(v_2 - v_1) - (\phi(u_2) - u_2)(\psi(v_2) - \psi(v_1)) \\ &= u_2(v_2 - v_1) \left(\phi^*(u_2) - (\phi^*(u_2) - 1)\frac{\psi(v_2) - \psi(v_1)}{v_2 - v_1} \right). \end{aligned}$$

Uporabimo **(Fc$_*$)** in neenakost $\phi^*(u_2) - 1 \geq 0$, da ocenimo

$$\begin{aligned} V_C((u_1,u_2]\times(v_1,v_2]) &\geq u_2(v_2 - v_1) \left(\phi^*(u_2) - (\phi^*(u_2) - 1)\frac{1 - \psi(v_2)}{1 - v_2} \right) \\ &= u_2(v_2 - v_1) \left(\frac{1 - \psi(v_2)}{1 - v_2} - \phi^*(u_2)\frac{v_2 - \psi(v_2)}{1 - v_2} \right) \\ &= u_2(v_2 - v_1)\,\frac{v_2 - \psi(v_2)}{1 - v_2}\,(\psi_*(v_2) - \phi^*(u_2)) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

(v) Če je $\phi^*(u_2) \leq \phi^*(u_1) \leq \psi_*(v_2) \leq \psi_*(v_1)$, preuredimo člene v

$$\begin{aligned} V_C((u_1,u_2]\times(v_1,v_2]) &= (\phi(u_2) - \phi(u_1))\big((v_2 - v_1) - (\psi(v_2) - \psi(v_1))\big) \\ &\quad + (u_2 - u_1)(\psi(v_2) - \psi(v_1)) \\ &= (u_2 - u_1)(v_2 - v_1) \left(\frac{\phi(u_2) - \phi(u_1)}{u_2 - u_1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\phi(u_2) - \phi(u_1)}{u_2 - u_1}\,\frac{\psi(v_2) - \psi(v_1)}{v_2 - v_1} + \frac{\psi(v_2) - \psi(v_1)}{v_2 - v_1} \right). \end{aligned}$$

Z A označimo tretji faktor, za katerega je potrebno dokazati, da je nenegativen. Če velja $\psi(v_2) - \psi(v_1) \leq v_2 - v_1$, potem je očitno $A \geq 0$. Naj torej velja $\psi(v_2) - \psi(v_1) \geq v_2 - v_1$. Zapišimo A kot

$$1 - \left(\frac{\phi(u_2) - \phi(u_1)}{u_2 - u_1} - 1 \right) \left(\frac{\psi(v_2) - \psi(v_1)}{v_2 - v_1} - 1 \right).$$

Uporabimo $(\mathbf{Fc}^*)$ in predpostavko $\phi^*(u_1) \le \psi_*(v_2)$, da dobimo

$$A \ge 1 - (\psi_*(v_2) - 1)\left(\frac{\psi(v_2) - \psi(v_1)}{v_2 - v_1} - 1\right).$$

Sedaj uporabimo še $(\mathbf{Fc}_*)$ in neenakost $\psi_*(v_2) - 1 \ge 0$, da dokažemo

$$A \ge 1 - (\psi_*(v_2) - 1)\left(\frac{1 - \psi(v_2)}{1 - v_2} - 1\right) = 0.$$

(vi) Kot zadnja možnost preostane primer, ko je $\phi^*(u_2) \le \psi_*(v_2) \le \phi^*(u_1) \le \psi_*(v_1)$. Najprej opazimo, da je

$$\begin{aligned} V_C((u_1,u_2]\times(v_1,v_2]) &= \phi(u_2)(v_2 - \psi(v_2)) + u_2\psi(v_2) - \phi(u_2)(v_1 - \psi(v_1)) \\ &\quad - u_2\psi(v_1) - u_1 + \phi(u_1)(v_1 - \psi(v_1)) + u_1\psi(v_1). \end{aligned}$$

Izberimo tak $\tilde{u}_1 \ge u_1$, da je $\psi_*(v_2) \le \phi^*(\tilde{u}_1) \le \psi_*(v_1)$. Razlika ploščin $V_C((\tilde{u}_1,u_2]\times(v_1,v_2]) - V_C((u_1,u_2]\times(v_1,v_2])$ je potem enaka

$$\begin{aligned} &- (\tilde{u}_1 - u_1) + (\phi(\tilde{u}_1) - \phi(u_1))(v_1 - \psi(v_1)) + (\tilde{u}_1 - u_1)\psi(v_1) \\ &= (\tilde{u}_1 - u_1)(v_1 - \psi(v_1))\left(\frac{\phi(\tilde{u}_1) - \phi(u_1)}{\tilde{u}_1 - u_1} - \psi_*(v_1)\right). \end{aligned}$$

Ta razlika ploščin glede na C je po $(\mathbf{Fc}^*)$ in predpostavki $\phi^*(u_1) \le \psi_*(v_1)$ torej negativna ali ničelna. Dokazali smo, da je $V_C((u_1,u_2]\times(v_1,v_2])$ padajoča funkcija v prvi spremenljivki u_1 na intervalu, določenim s $\phi^*(u_1) \in [\psi_*(v_2), \psi_*(v_1)]$, če so ostale spremenljivke u_2, v_1, v_2 fiksirane in zadoščajo pogojem tega primera.

Privzamemo lahko, da je $u_1 > 0$ in velja $\phi^*(u_1) \in (\psi_*(v_2), \psi_*(v_1)]$. Če to ne drži, pogoji tega primera niso nikoli izpolnjeni in smo dokaz že zaključili. Velja torej $\phi^*(u_2) \le \psi_*(v_2) < \phi^*(u_1)$ in zaradi zveznosti funkcije ϕ^* na intervalu $(0,1]$ (lema 5.4) obstaja tak $\hat{u}_1$, da je $\phi^*(\hat{u}_1) = \psi_*(v_2)$. Ploščina $V_C((\hat{u}_1,u_2]\times(v_1,v_2])$ je nenegativna po že dokazanem primeru (v). Ker je $\phi^*(u_1) > \phi^*(\hat{u}_1)$, je $u_1 < \hat{u}_1$ in zato je

$$V_C((u_1,u_2]\times(v_1,v_2]) \ge V_C((\hat{u}_1,u_2]\times(v_1,v_2]) \ge 0,$$

s čimer je dokaz končan.

■

6.3 Karakterizacija maksmin kopul

V tem razdelku dokažemo dva izreka, ki maksmin kopule karakterizirata kot kopule, ki pripadajo slučajnemu vektorju $(\max\{X,Z\}, \min\{Y,Z\})$ za neodvisne slučajne spremenljivke X, Y in Z. Maksmin kopule so torej kopule, ki pripadajo verjetnostnemu modelu iz prvega razdelka. V naslednji lemi izpeljemo skupno porazdelitveno funkcijo slučajnega vektorja $(\max\{X,Z\}, \min\{Y,Z\})$.

Lema 6.5. *Naj bosta U in V slučajni spremenljivki s porazdelitvenima funkcijama F oziroma G ter naj bo H njuna skupna porazdelitvena funkcija. Potem sta naslednji trditvi ekvivalentni:*

(i) *Obstajajo neodvisne slučajne spremenljivke X, Y in Z s porazdelitvenimi funkcijami F_X, F_Y oziroma F_Z, za katere je $U = \max\{X, Z\}$ in $V = \min\{Y, Z\}$.*

(ii) *Skupno porazdelitveno funkcijo H lahko s porazdelitvenimi funkcijami F_X, F_Y in F_Z izrazimo kot*

$$H(x, y) = F_X(x)(1 - F_Y(y)) \min\{F_Z(x), F_Z(y)\} + F_X(x)F_Y(y)F_Z(x). \quad (6.4)$$

Če velja katerakoli izmed trditev (i) *ali* (ii)*, je*

$$F = F_X \cdot F_Z \quad \text{in} \quad G = F_Y + F_Z - F_Y \cdot F_Z \quad (6.5)$$

in veljajo neenakosti $F \leq F_X$, $F \leq F_Z$, $G \geq F_Y$ in $G \geq F_Z$.

Dokaz. Naj velja (i). Če upoštevamo neodvisnost X, Y in Z lahko H izrazimo kot

$$\begin{aligned}
H(x, y) &= P(\max\{X, Z\} \leq x, \min\{Y, Z\} \leq y) = P(X \leq x, Z \leq x, \min\{Y, Z\} \leq y) \\
&= P(X \leq x)P(Z \leq x, \min\{Y, Z\} \leq y) \\
&= F_X(x)\Big[P(Z \leq x, \min\{Y, Z\} \leq y, Z \leq y) \\
&\qquad\qquad + P(Z \leq x, \min\{Y, Z\} \leq y, Z > y)\Big] \\
&= F_X(x)\Big[P(Z \leq x, Z \leq y) + P(Z \leq x, Y \leq y, Z > y)\Big] \\
&= F_X(x)\Big[F_Z(\min\{x, y\}) + P(Y \leq y)P(y < Z \leq x)\Big].
\end{aligned}$$

Za $y < x$ je $P(y < Z \leq x) = F_Z(x) - F_Z(y) = F_Z(x) - F_Z(\min\{x, y\})$, medtem ko lahko za $y \geq x$ prav tako zapišemo $P(y < Z \leq x) = 0 = F_Z(x) - F_Z(\min\{x, y\})$. Če upoštevamo še, da je $F_Z(\min\{x, y\}) = \min\{F_Z(x), F_Z(y)\}$, saj je F_Z naraščajoča, dobimo

$$\begin{aligned}
H(x, y) &= F_X(x)\Big[\min\{F_Z(x), F_Z(y)\} + F_Y(y)\Big(F_Z(x) - \min\{F_Z(x), F_Z(y)\}\Big)\Big] \\
&= F_X(x)(1 - F_Y(y)) \min\{F_Z(x), F_Z(y)\} + F_X(x)F_Y(y)F_Z(x)
\end{aligned}$$

za vse $x, y \in \mathbb{R}$.

Obratno, naj sedaj velja (ii). Skupno porazdelitveno funkcijo H lahko torej napišemo kot (6.4), kjer so F_X, F_Y in F_Z neke porazdelitvene funkcije. Naj bodo X, Y in Z neodvisne slučajne spremenljivke s porazdelitvenimi funkcijami F_X, F_Y oziroma F_Z. Ker je slučajni vektor s svojo porazdelitveno funkcijo enolično določen, je $U = \max\{X, Z\}$ in $V = \min\{Y, Z\}$. Dodatek k lemi je ob veljavnosti ene izmed ekvivalentnih trditev očiten. ■

Prvi izrek karakterizacije dokaže, da je maksmin kopula ena izmed kopul, ki pripadajo slučajnemu vektorju $(\max\{X, Z\}, \min\{Y, Z\})$ za neodvisne slučajne spremenljivke X, Y in Z. Če je slučajni vektor zvezen, potem je po Sklarovem izreku njegova pripadajoča kopula natanko maksmin kopula.

Izrek 6.6. *Naj bo* $U = \max\{X, Z\}$ *in* $V = \min\{Y, Z\}$*, kjer so* X*,* Y *in* Z *neke neodvisne slučajne spremenljivke. Naj bosta* F *in* G *porazdelitveni funkciji slučajnih spremenljivk* U *oziroma* V *ter naj bo* H *skupna porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja* (U, V)*. Potem obstaja tak par funkcij* (ϕ,ψ)*, ki zadošča pogoju* **(F)***, da za pripadajočo maksmin kopulo* $C_{\phi,\psi}$ *velja*

$$H(x, y) = C_{\phi,\psi}(F(x), G(y)) \tag{6.6}$$

za vse $x, y \in \mathbb{R}$*.*

Dokaz. Označimo porazdelitvene funkcije slučajnih spremenljivk X, Y in Z z F_X, F_Y oziroma F_Z. Za porazdelitvene funkcije po lemi 6.5 veljajo zveze (6.4) in (6.5). Dokaz razdelimo na tri korake. V prvem in drugem koraku definiramo funkciji ϕ oziroma ψ, za kateri dokažemo, da izpolnjujeta pogoje **(F1)**, **(F2)** in **(F3*)** oziroma **(F3$_*$)**. V tretjem koraku dokažemo, da za pripadajočo maksmin kopulo velja želena enakost.
1. korak. Funkcijo $\phi : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{I}$ definiramo kot v prvem koraku dokaza izreka 5.8 s predpisom (5.6). Tam smo dokazali, da tako definirana funkcija zadošča pogojem **(F1)**, **(F2)** in **(F3*)**. Ponovimo le, da za tako definirano funkcijo velja

$$\phi(F(x)) = F_X(x) \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}\text{, za katerega je } F(x) > 0. \tag{6.7}$$

2. korak. Definirati moramo funkcijo ψ, ki zadošča pogoju **(F3$_*$)**. Tu si z drugim korakom dokaza izreka 5.8 ne moremo pomagati, saj je za tam definirano funkcijo veljal pogoj **(F3*)**. Definiramo funkcijo $\psi : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{I}$ s predpisom

$$\psi(v) = \begin{cases} 0, & \text{za } v = 0, \\ F_Y(G^{-1}(v)), & \text{za } v \in \operatorname{im} G \setminus \{0, 1\}, \\ 1, & \text{za } v = 1, \\ \dfrac{\psi(\overline{v}) - \psi(\underline{v}-)}{\overline{v} - \underline{v}}(v - \underline{v}) + \psi(\underline{v}-), & \text{za } v \notin \operatorname{im} G \cup \{0, 1\} \text{ in } \underline{v} \notin \operatorname{im} G \cup \{0\}, \\ \dfrac{\psi(\overline{v}) - \psi(\underline{v})}{\overline{v} - \underline{v}}(v - \underline{v}) + \psi(\underline{v}), & \text{za } v \notin \operatorname{im} G \cup \{0, 1\} \text{ in } \underline{v} \in \operatorname{im} G \setminus \{0\}, \\ \dfrac{\psi(\overline{v})}{\overline{v} - \underline{v}}(v - \underline{v}), & \text{za } v \notin \operatorname{im} G \cup \{0, 1\} \text{ in } \underline{v} = 0. \end{cases}$$

Motivacija za takšen predpis funkcije ψ je podobna tisti iz prejšnjega koraka: bistvena je le definicija ψ na $\operatorname{im} G$, medtem ko je izven $\operatorname{im} G$ funkcija definirana tako, da zadošča pogojem **(F1)**, **(F2)** in **(F3$_*$)**. Izven $\operatorname{im} G$ smo jo zato definirali preprosto kot linearno interpolacijo med točkama, v katerih sta vrednosti funkcije ψ po predpisu na $\operatorname{im} G$ že definirani. Za slednjo definicijo je glede na vsebovanost $\underline{v}$ v $\operatorname{im} G \cup \{0, 1\}$ potrebno ločiti tri primere. Pogoj **(F1)** je očitno izpolnjen. Najprej dokažimo, da velja

$$\psi(G(y)) = F_Y(y) \quad \text{za vsak } y \in \mathbb{R}\text{, za katerega je } G(y) < 1. \tag{6.8}$$

Naj bo $y\in\mathbb{R}$ tak, da je $G(y)<1$. Po zvezi (6.5) in točki (vi) leme 2.7 velja

$$\begin{aligned}(1-F_Y(y))(1-F_Z(y)) &= 1-G(y) = 1-G\Big(G^{-1}(G(y))\Big)\\ &= \Big[1-F_Y\Big(G^{-1}(G(y))\Big)\Big]\Big[1-F_Z\Big(G^{-1}(G(y))\Big)\Big].\end{aligned}$$

Ker sta funkciji F_Y in F_Z naraščajoči, po točki (v) leme 2.7 velja tudi

$$F_Y\Big(G^{-1}(G(y))\Big)\le F_Y(y)\quad\text{ in }\quad F_Z\Big(G^{-1}(G(y))\Big)\le F_Z(y).$$

Ker iz $1-G(y)>0$ sledi $1-F_Y(y)>0$ in $1-F_Z(y)>0$, lahko iz zadnjih treh (ne)enakosti zaključimo, da je $F_Y(y)=F_Y\Big(G^{-1}(G(y))\Big)=\psi(G(y))$.

Analogno kot v prejšnjem koraku lahko iz veljavnosti (6.8) in dejstva, da so porazdelitvene funkcije naraščajoče, sklepamo, da ψ narašča na $\operatorname{im} G$. Iz linearnosti ψ na $(\operatorname{im} G)^c$ sledi, da ψ narašča na I.

Za dokaz **(F3$_*$)** najprej utemeljimo, da je ψ_* na $\operatorname{im} G$ padajoča. Uporabimo enakosti $G\circ G^{-1}=\mathrm{id}$ na $\operatorname{im} G$, (6.8) in (6.5), da izpeljemo

$$\begin{aligned}\psi_* = \psi_*\circ G\circ G^{-1} &= \frac{1-\psi\circ G\circ G^{-1}}{G\circ G^{-1}-\psi\circ G\circ G^{-1}} = \frac{1-F_Y\circ G^{-1}}{G\circ G^{-1}-F_Y\circ G^{-1}}\\ &= \frac{1-F_Y\circ G^{-1}}{(F_Z-F_Y\cdot F_Z)\circ G^{-1}} = \frac{1}{F_Z\circ G^{-1}}.\end{aligned}$$

Ker sta G^{-1} in F_Z naraščajoči, je ψ_* na $\operatorname{im} G$ padajoča. Sedaj izberemo poljuben $v\notin \operatorname{im} G\cup\{0,1\}$, za katerega je $\underline{v}>0$. Po ravnokar dokazanem za vsak $t\in\operatorname{im} G$, $t<\underline{v}$, velja $\psi_*(t)\ge\psi_*(\overline{v})$ in zato je $\psi_*(\underline{v})\ge\psi_*(\overline{v})$. Ker je ψ linearna na intervalu $[\underline{v},\overline{v}]$, obstajata taki konstanti α in β, da je $\psi(t)=\alpha+\beta t$ za $t\in[\underline{v},\overline{v}]$. Od tod izračunamo $\psi_*(t)$ in z uporabo odvoda ugotovimo, da je ψ_* padajoča na $[\underline{v},\overline{v}]$ natanko tedaj, ko je $1-\beta-\alpha\ge 0$. Kratek račun pokaže, da je izraz

$$1-\beta-\alpha = 1-\frac{\psi(\overline{v})-\psi(\underline{v})}{\overline{v}-\underline{v}}-\left(\psi(\underline{v})-\underline{v}\,\frac{\psi(\overline{v})-\psi(\underline{v})}{\overline{v}-\underline{v}}\right)$$

nenegativen natanko tedaj, ko je $\psi_*(\underline{v})\ge\psi_*(\overline{v})$, kar smo že dokazali. Funkcija ψ_* je torej padajoča na $[\underline{v},\overline{v}]$ in ker ta sklep velja za vsak $v\notin\operatorname{im} G\cup\{0,1\}$, je dokaz pogoja **(F3$_*$)** končan.

<u>3. korak.</u> Izrek 6.4 dokaže, da je funkcija $C_{\phi,\psi}$, definirana s (6.2), res kopula. Dokaz bo končan, ko preverimo veljavnost enakosti (6.6). Naj bosta najprej $x,y\in\mathbb{R}$ taka, da je $F(x)>0$ in $G(y)<1$. Zaporedoma uporabimo definicijo maksmin kopule (6.2) in enakosti (6.7), (6.8) ter (6.4), da dobimo

$$\begin{aligned}C_{\phi,\psi}(F(x),G(y)) &= \min\Big\{F(x)\Big(1-\psi(G(y))\Big),\,\phi(F(x))\Big(G(y)-\psi(G(y))\Big)\Big\}\\ &\qquad + F(x)\psi(G(y))\\ &= \min\{F(x)(1-F_Y(y)), F_X(x)(G(y)-F_Y(y))\}+F(x)F_Y(y)\\ &= H(x,y).\end{aligned}$$

Če je $F(x) = 0$, potem je $H(x, y) = 0 = C_{\phi,\psi}(0, G(y))$. Naj bo sedaj $G(y) = 1$. Vsaj eden izmed $F_Y(y)$ in $F_Z(y)$ je torej enak 1. Od tod lahko zaključimo, da je po (6.4) tudi v tem primeru $H(x, y) = F(x) = C_{\phi,\psi}(F(x), 1)$. ■

Iz dokaza opazimo, da za tako definirani funkciji ϕ in ψ velja $\phi^* \circ F = 1/F_Z = \psi_* \circ G$, ko sta ϕ^* in ψ_* končni. Enakost lahko zapišemo tudi kot

$$\phi(F(x))\Big(G(x) - \psi(G(x))\Big) = F(x)\Big(1 - \psi(G(x))\Big) \tag{6.9}$$

za vse $x \in \mathbb{R}$, za katere je $F(x) > 0$ in $\psi(G(x)) < G(x)$. Če je $F(x) = 0$ ali $G(x) = 1$, potem enakost (6.9) očitno še vedno velja. Dokazati želimo, da enakost velja za vse $x \in \mathbb{R}$. Naj bo torej $\psi(G(x)) = G(x) < 1$. Po (6.8) je potem $G(x) = F_Y(x)$ in zato je $F_Z(x) = 0$. Od tod sledi $F(x) = 0$ in s tem je enakost (6.9) izpolnjena. Enakost (6.9) velja torej za vse $x \in \mathbb{R}$, kjer sta funkciji ϕ in ψ definirani tako kot v dokazu izreka 6.6. V tem smislu je naslednji izrek, ki mu pravimo drugi izrek karakterizacije, obrat prejšnjega.

Drugi izrek karakterizacije dokaže: za slučajni spremenljivki U in V s primernima porazdelitvenima funkcijama F oziroma G in maksmin kopulo $C_{\phi,\psi}$ velja, da lahko slučajni vektor (U, V) s porazdelitveno funkcijo $C_{\phi,\psi}(F, G)$ predstavimo kot $(\max\{X, Z\}, \min\{Y, Z\})$ za neke neodvisne slučajne spremenljivke X, Y in Z.

Izrek 6.7. *Naj bo $C_{\phi,\psi}$ maksmin kopula s pripadajočima funkcijama ϕ in ψ ter naj bosta F in G porazdelitveni funkciji, za katere predpostavimo naslednje:*

- *Enakost* (6.9) *je izpolnjena za vsak $x \in \mathbb{R}$.*
- *Funkcija ϕ je zvezna v točki* 0*, ali pa je $x_F = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) > 0\} > -\infty$ in ima F v x_F skok. Funkcija ψ je zvezna v točki* 1*, ali pa obstaja tak $x \in \mathbb{R}$, da je $G(x) = 1$.*
- *Obstaja tak x_0, da je $F(x_0) > 0$ in $G(x_0) < 1$.*

Definiramo $H(x, y) = C_{\phi,\psi}(F(x), G(y))$ za vse $x, y \in \mathbb{R}$. Potem obstajajo take neodvisne slučajne spremenljivke X, Y in Z, da je H skupna porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja $(\max\{X, Z\}, \min\{Y, Z\})$.

Preden nadaljujemo z dokazom, komentirajmo predpostavke izreka. Prva predpostavka je ključna, saj zahteva ustrezno povezavo med porazdelitvenima funkcijama in funkcijama ϕ ter ψ, medtem ko je druga predpostavka tehnične narave. Opazimo, da se analogna različica tretje predpostavke v drugem izreku karakterizacije Marshallovih kopul 5.9 ne pojavi. Po **(Fa*)** je $F(x) = 0$ natanko tedaj, ko je $\phi(F(x)) = 0$. Po drugi strani je $G(x) = 1$ natanko tedaj, ko je $\psi(G(x)) = 1$ po **(Fa$_*$)**. Če za nek $x \in \mathbb{R}$ velja $F(x) = 0$ ali $G(x) = 1$, je enakost (6.9) ekvivalentna enakosti $0 = 0$. V primeru, ko tretja predpostavka izreka ne velja, je enakost (6.9) torej trivialna za vsak $x \in \mathbb{R}$ in zato povezava med porazdelitvenima funkcijama in funkcijama ϕ ter ψ ne obstaja.

Dokaz. Tudi ta dokaz razdelimo na tri korake. V prvem definiramo funkciji F_X in F_Y, za kateri dokažemo, da sta porazdelitveni funkciji. Ob tem potrebujemo drugo točko predpostavk izreka. Enako naredimo v drugem koraku za funkcijo F_Z. Tu sta prva in tretja točka predpostavk ključni. V tretjem koraku dokažemo, da je porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja $(\max\{X,Z\},\min\{Y,Z\})$ res enaka H.

1. korak. V dokazu izreka 5.9 smo definirali porazdelitveno funkcijo F_X, za katero velja $F_X(x)=\phi(F(x))$ za vsak $x\in\mathbb{R}$. V dokazu smo uporabili dejstva, da je ϕ zvezna na $(0,1]$, zadošča lastnostim **(F1)** in **(F2)**, ter je zvezna v 0 ali pa je $x_F>-\infty$ in $F(x_F)>0$. Ker ϕ v tem izreku zadošča vsem ravnokar naštetim predpostavkam, lahko F_X definiramo enako kot v dokazu izreka 5.9.

Za vsak $x\in\mathbb{R}$ definiramo $F_Y(x)=\psi(G(x))$. Funkcija F_Y je sicer definirana enako kot v izreku 5.9, vendar so predpostavke za funkcijo ψ v tem izreku drugačne kot v izreku 5.9. Dokažimo, da je F_Y porazdelitvena funkcija. Po lemi 6.1 je ψ zvezna z desne. Ker je ψ tudi naraščajoča in je G naraščajoča ter zvezna z desne, je zato F_Y naraščajoča in zvezna z desne. Iz zveznosti ψ v točki 0 sledi

$$\lim_{x\to-\infty}F_Y(x)=\psi\left(\lim_{x\to-\infty}G(x)\right)=\psi(0)=0.$$

Če je ψ zvezna v 1, podobno velja $F_Y(\infty)=\psi(1-)=1$. V nasprotnem primeru po predpostavkah obstaja tak x, da je $G(x)=1$ in od tod seveda sledi $F_Y(\infty)=\psi(1)=1$. Funkcija F_Y je torej porazdelitvena funkcija.

2. korak. Definiramo funkcijo F_Z s predpisom

$$F_Z(x)=\begin{cases}\dfrac{G(x)-\psi(G(x))}{1-\psi(G(x))}, & \text{če je } F(x)=0,\\[2mm] \dfrac{G(x)-\psi(G(x))}{1-\psi(G(x))}\left(=\dfrac{F(x)}{\phi(F(x))}\right), & \text{če je } F(x)>0 \text{ in } G(x)<1,\\[2mm] \dfrac{F(x)}{\phi(F(x))}, & \text{če je } G(x)=1,\end{cases}$$

in premislimo, da je dobro definirana. Vsak $x\in\mathbb{R}$ zadošča enemu izmed treh pogojev zaradi naslednjih dveh premislekov. Če je $F(x)=0$, potem je $x<x_0$, iz česar sledi $G(x)\le G(x_0)<1$. Obratno, če je $G(x)=1$, je $x_0<x$ in zato je $F(x)\ge F(x_0)>0$. Vsi trije predpisi so dobro definirani, ker iz $F(x)>0$ oziroma $G(x)<1$ sledi $\phi(F(x))>0$ oziroma $\psi(G(x))<1$. Enakost v drugem predpisu velja po predpostavki (6.9).

Ker obstaja $x^G\in\mathbb{R}$, za katerega je $G(x^G)<1$, je $G(x)<1$ za vsak $x\le x^G$ in zato je

$$\lim_{x\to-\infty}F_Z(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{G(x)-\psi(G(x))}{1-\psi(G(x))}=\frac{0-\psi(0)}{1-\psi(0)}=0,$$

saj je ψ zvezna v 0. Ko x narašča proti ∞, je od nekod naprej $F(x)>0$ in zato po zveznosti ϕ v 1 velja, da se $F_Z(x)=F(x)/\phi(F(x))$ približuje 1. Dokažimo, da je F_Z naraščajoča. Za vse $x\in\mathbb{R}$, za katere je $F(x)>0$, je funkcija $F_Z(x)=1/\phi^*(F(x))$ po

(F3*) naraščajoča. Če je $G(x) < 1$, potem je funkcija $F_Z(x) = 1/\psi_*(G(x))$ po **(F3$_*$)** naraščajoča. Funkcija F_Z torej narašča, če dokažemo, da je $F_Z(x) \leq F_Z(y)$ za x in y, za katera je $F(x) = 0$ in $G(y) = 1$. Za taka x in y velja $x_0 \in (x, y)$ in od tod po že dokazanem drži

$$F_Z(x) = \frac{G(x) - \psi(G(x))}{1 - \psi(G(x))} \leq \frac{G(x_0) - \psi(G(x_0))}{1 - \psi(G(x_0))} = \frac{F(x_0)}{\phi(F(x_0))} \leq \frac{F(y)}{\phi(F(y))} = F_Z(y).$$

Ker je ϕ zvezna na $(0, 1]$, ψ zvezna na $[0, 1)$ in x_0 ustreza pogoju drugega predpisa funkcije F_Z, je funkcija F_Z je zvezna z desne.

S tem smo dokazali, da je F_Z porazdelitvena funkcija neke slučajne spremenljivke, za katero po prvem koraku velja

$$\begin{aligned} F_X(x)F_Z(x) = \phi(F(x))F_Z(x) = F(x) \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}, \\ (1 - F_Y(x))F_Z(x) = \Big(1 - \psi(G(x))\Big)F_Z(x) = G(x) - F_Y(x) \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Če je $F(x) > 0$ oziroma $G(x) < 1$, zadnji enačbi sledita iz definicije F_Z. Če je x tak, da je $F(x) = 0$ oziroma $G(x) = 1$, potem je tudi $F_X(x) = \phi(0) = 0$ oziroma $F_Y(x) = \psi(1) = 1$ in zato enačbi veljata za vsak $x \in \mathbb{R}$.

3. korak. Zaporedoma upoštevamo definicije funkcije H, maksmin kopule (6.2), porazdelitvenih funkcij F_X in F_Y ter enakosti (6.10), da izpeljemo

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \min\Big\{F(x)\Big(1 - \psi(G(y))\Big), \phi(F(x))\Big(G(y) - \psi(G(y))\Big)\Big\} + F(x)\psi(G(y)) \\ &= \min\{F(x)(1 - F_Y(y)), F_X(x)(G(y) - F_Y(y))\} + F(x)F_Y(y) \\ &= F_X(x)(1 - F_Y(y)) \min\{F_Z(x), F_Z(y)\} + F_X(x)F_Y(y)F_Z(x). \end{aligned}$$

Funkcijo H lahko torej zapišemo kot (6.4). Naj bodo sedaj X, Y in Z take neodvisne slučajne spremenljivke, da so v prejšnjih korakih definirane funkcije F_X, F_Y oziroma F_Z njihove porazdelitvene funkcije. Druga izmed ekvivalentnih trditev leme (6.5) je s tem izpolnjena in dokaz končan. ■

V dokazu izreka 6.6 smo funkciji ϕ in ψ definirali eksplicitno. Če predpišemo porazdelitve časov udarov X, Y in Z, lahko torej konstruiramo slučajnemu vektorju $(\max\{X, Z\}, \min\{Y, Z\})$ pripadajočo maksmin kopulo. S tem smo pridobili način za izpeljavo konkretnih maksmin kopul, preko katerega v naslednjem razdelku definiramo nekatere parametrične družine maksmin kopul. Tam po drugi strani nekatere maksmin kopule dobimo tudi tako, da brez interpretacije v verjetnostnem modelu definiramo nek par funkcij (ϕ, ψ), ki zadošča pogoju **(F)**. V obeh primerih lahko izpeljemo algoritem za vzorčenje iz maksmin kopule, podobno kot smo to storili pri Marshallovih kopulah.

Naj bo $C_{\phi,\psi}$ maksmin kopula s pripadajočim parom funkcij (ϕ, ψ), ki zadošča pogoju **(F)**. Denimo, da smo (ϕ, ψ) dobili tako, da smo v verjetnostnem modelu določili porazdelitve časov udarov X, Y in Z ter nato preko dokaza izreka 6.6 izračunali funkciji ϕ in ψ, za kateri je $C_{\phi,\psi}$ pripadajoča kopula slučajnega vektorja

$(\max\{X, Z\}, \min\{Y, Z\})$. Porazdelitveni funkciji $\max\{X, Z\}$ in $\min\{Y, Z\}$ označimo standardno z F oziroma z G. Če sta F in G zvezni, potem preko leme 2.8 dobimo naslednji algoritem.

Algoritem 6.8. Vzorčenje iz maksmin kopule.

1. Neodvisno vzorčimo r, s, t iz porazdelitve $\mathrm{EZ}[0, 1]$.
2. Definiramo $x = F_X^{-1}(r)$, $y = F_Y^{-1}(s)$ in $z = F_Z^{-1}(t)$.
3. Definiramo $u' = \max\{x, z\}$ in $v' = \min\{y, z\}$.
4. Definiramo $u = F(u')$ in $v = G(v')$. Iskani par je (u, v).

Druga možnost je, da smo brez interpretacije v verjetnostnem modelu definirali nek par funkcij (ϕ, ψ), ki zadošča pogoju **(F)**. V tem primeru najprej poiščemo porazdelitveni funkciji F in G, za kateri velja enakost (6.9) in obstaja nek x_0, pri katerem je $F(x_0) > 0$ in $G(x_0) < 1$. Preverimo še, ali je izpolnjena tudi druga točka predpostavk izreka 6.7. Če so predpostavke izpolnjene, definiramo porazdelitvene funkcije F_X, F_Y in F_Z tako kot v dokazu tega izreka. V primeru, ko sta F in G zvezni, lahko zopet vzorčimo na podlagi algoritma 6.8.

6.4 Lastnosti in primeri maksmin kopul

V tem razdelku obravnavamo repne lastnosti maksmin kopul, njihovo urejenost in tri konkretne primere parametričnih družin. Poleg tega navedemo nov parametričen primer Marshallovih kopul. Najprej raziščimo dva posebna primera maksmin kopul, ki ju dobimo tako, da verjetnostnemu modelu iz razdelka 6.1 dodamo predpostavke o porazdelitvi časov udarov.

Zgled 6.9. Maksmin kopula za enako porazdeljene čase udarov.
Naj veljajo predpostavke izreka 6.6 in ob tem dodatno predpostavimo, da so slučajne spremenljivke X, Y in Z enako porazdeljene. Če z F_X označimo njihovo porazdelitveno funkcijo, potem je $F = F_X^2$ in $G = 2F_X - F_X^2 = 1 - (1 - F_X)^2$. Želimo najti taki funkciji ϕ in ψ, da bo veljalo $H = C_{\phi,\psi}(F, G)$. Opazimo, da za funkciji

$$\phi(u) = \sqrt{u},\ u \in \mathrm{I}, \qquad \text{in} \qquad \psi(v) = 1 - \sqrt{1 - v},\ v \in \mathrm{I},$$

velja $\phi(F(x)) = F_X(x)$ in $\psi(G(y)) = F_X(y) = F_Y(y)$ za vse $x, y \in \mathbb{R}$. Od tod sledi $H(x, y) = C_{\phi,\psi}(F(x), G(y))$. Par funkcij (ϕ, ψ) zadošča pogoju **(F)**.

Funkciji ϕ in ψ lahko torej na komplementu $\overline{\operatorname{im} F}$ oziroma $\overline{\operatorname{im} G}$ definiramo bolj naravno ter preprosto kot v dokazu izreka 6.6, kjer smo ju na teh območjih definirali kot linearno interpolacijo. Dejstvo, da maksmin kopule in s tem para funkcij (ϕ, ψ) izven $\overline{\operatorname{im} F} \times \overline{\operatorname{im} G}$ ni mogoče definirati enolično, sledi že iz Sklarovega izreka. □

Zgled 6.10. Maksmin kopule za eksponentno porazdeljene čase udarov.
Poleg predpostavk izreka 6.6 v tem zgledu privzamemo še, da so slučajne spremenljivke X, Y in Z porazdeljene eksponentno s parametri λ_1, λ_2 oziroma λ_{12}. Ravno

ta predpostavka o porazdelitvah časov udarov je del verjetnostnega modela, iz katerega izhajajo Marshall-Olkinove kopule. Zopet želimo poiskati takšni funkciji ϕ in ψ, da bo $H = C_{\phi,\psi}(F, G)$. Funkciji definiramo tako kot v dokazu izreka 6.6, in sicer $\phi(u) = F_X(F^{-1}(u))$ in $\psi(v) = F_Y(G^{-1}(v))$ za $u, v \in (0, 1) = \operatorname{im} F = \operatorname{im} G$. Ker je $G(y) = 1 - e^{-(\lambda_2+\lambda_{12})y}$ za $y > 0$, je njen običajen obrat za $v \in (0, 1)$ enak $G^{-1}(v) = -\ln(1-v)/(\lambda_2+\lambda_{12})$ in zato je $\psi(v) = 1-e^{-\lambda_2 G^{-1}(v)} = 1-(1-v)^{\lambda_2/(\lambda_2+\lambda_{12})}$. Funkcijo ψ torej definiramo kot

$$\psi(v) = 1 - (1 - v)^{1-\beta}, \ v \in \mathrm{I}, \ \text{kjer je } \beta = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_2 + \lambda_{12}}.$$

Ker je funkcija $F(x) = (1 - e^{-\lambda_1 x})(1 - e^{-\lambda_{12} x})$ na intervalu $(0, \infty)$ strogo naraščajoča in zvezna, je obrnljiva, vendar pa obrata ne moremo določiti eksplicitno. Funkcijo ϕ lahko zato definiramo zgolj kot

$$\phi(u) = \begin{cases} 0, & \text{če je } u = 0, \\ 1 - e^{-\lambda_1 F^{-1}(u)}, & \text{če je } u \in (0, 1), \\ 1, & \text{če je } u = 1, \end{cases}$$

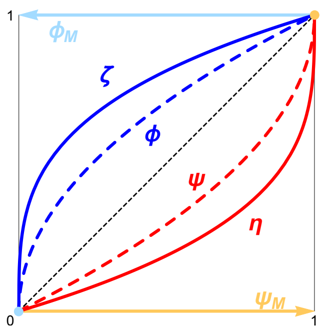
kjer F^{-1} označuje običajni obrat funkcije F. □

Naslednja trditev je namenjena urejenosti maksmin kopul. Grafična predstavitev je podana na sliki 6.3.

Trditev 6.11. Urejenost maksmin kopul. *Naj bosta $C_{\phi,\psi}$ in $C_{\zeta,\eta}$ maksmin kopuli s pripadajočima funkcijama ϕ in ψ oziroma ζ in η. Potem veljata naslednji trditvi:*

(i) *Za vsako maksmin kopulo velja $\Pi \preceq C_{\phi,\psi} \preceq M$, kjer Π in M prav tako pripadata družini maksmin kopul. Če je ena izmed funkcij ϕ ali ψ enaka identični funkciji, potem je pripadajoča maksmin kopula enaka produktni. Za funkciji $\phi_M = \mathbb{1}_{(0,1]}$ in $\psi_M = \mathbb{1}_{\{1\}}$ dobimo za maksmin kopulo Fréchet-Hoeffdingovo zgornjo mejo M.*

(ii) *Če je $\zeta \geq \phi$ in $\eta \leq \psi$, potem je $C_{\phi,\psi} \preceq C_{\zeta,\eta}$.*



Slika 6.3. Grafična predstavitev trditve 6.11.

Dokaz.

(i) Če upoštevamo lastnost **(Fa*)**, dobimo

$$C_{\phi,\psi}(u,v) \geq \min\{u(v-\psi(v)), u(1-\psi(v))\} + u\psi(v) = uv = \Pi(u,v)$$

za $u, v \in \mathrm{I}$, iz česar sledi $C_{\phi,\psi} \succeq \Pi$. Preostali del trditve je očiten.

(ii) Opazimo, da iz predpostavk $\zeta \geq \phi$ in $\eta \leq \psi$ sledi $\zeta^* \geq \phi^*$ oziroma $\eta_* \leq \psi_*$. Izberemo poljubna $u, v \in \mathrm{I}$ in ločimo dva primera. Predpostavimo najprej, da velja $\zeta^*(u) \leq \eta_*(v)$, iz česar sledi $\phi^*(u) \leq \psi_*(v)$. Uporabimo predpostavki trditve in lastnosti **(Fa$_*$)** ter **(Fa*)**, da dokažemo

$$\begin{aligned} C_{\zeta,\eta}(u,v) &= \zeta(u)(v-\eta(v)) + u\eta(v) \geq \phi(u)(v-\eta(v)) + u\eta(v) \\ &= \phi(u)v - \eta(v)(\phi(u)-u) \geq \phi(u)v - \psi(v)(\phi(u)-u) = C_{\phi,\psi}(u,v). \end{aligned}$$

Naj bo sedaj $\eta_*(v) \leq \zeta^*(u)$. V tem primeru je $C_{\zeta,\eta}(u,v) = u$. Ker so po trditvi 3.3 kopule naraščajoče funkcije v vsaki spremenljivki posebej, je

$$C_{\phi,\psi}(u,v) \leq C_{\phi,\psi}(u,1) = u = C_{\zeta,\eta}(u,v).$$

■

Če sta funkciji ϕ in ψ strogo naraščajoči, je nosilec maksmin kopule $C_{\phi,\psi}$ enak

$$N_{\phi,\psi} = \{(u,v) \in \mathrm{I}^2 \mid \phi^*(u) \leq \psi_*(v)\}. \tag{6.11}$$

V primeru, ko sta tudi ϕ^* in ψ_* strogo padajoči, ima maksmin kopula tako absolutno zvezni kot tudi singularni del. Nosilec singularnega dela je krivulja

$$\Gamma_{\phi,\psi} = \{(u,v) \in \mathrm{I}^2 \mid \phi^*(u) = \psi_*(v)\}. \tag{6.12}$$

Izračunamo še

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C_{\phi,\psi}(u,v) = \begin{cases} \phi'(u)(1-\psi'(v)) + \psi'(v), & \text{za } \phi^*(u) < \psi_*(v), \\ 0, & \text{za } \phi^*(u) > \psi_*(v). \end{cases}$$

V naslednji trditvi dokažemo nekatere lastnosti zveznih slučajnih spremenljivk, ki ju povezuje maksmin kopula. V dokazu te trditve uporabimo trditve 3.33, 3.35 in 3.37, kjer so te lastnosti izražene z analitičnimi lastnostmi kopul.

Trditev 6.12. Repne lastnosti maksmin kopul. *Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki s skupno porazdelitveno funkcijo H in zveznima porazdelitvenima funkcijama F oziroma G, katerih pripadajoča kopula je maksmin kopula $C_{\phi,\psi}$. Potem velja:*

(i) $\mathrm{LRP}(Y|X)$ *in* $\mathrm{DRN}(X|Y)$ *(iz česar sledi pozitivna odvisnost) za poljubni funkciji ϕ in ψ.*

(ii) SN$(Y|X)$, *iz česar sledi* DRN$(Y|X)$, *natanko tedaj, ko je* ϕ *konkavna.*

(iii) SN$(X|Y)$, *iz česar sledi* LRP$(X|Y)$, *natanko tedaj, ko je* ψ *konveksna.*

(iv) DRN$(Y|X)$ *natanko tedaj, ko je* $(1-\phi(u))/(1-u)$ *za* $u\in[0,1)$ *padajoča funkcija.*

(v) LRP$(X|Y)$ *natanko tedaj, ko je* $\psi(v)/v$ *za* $v\in(0,1]$ *naraščajoča funkcija.*

(vi) *Repna koeficienta maksmin kopule* $C_{\phi,\psi}$ *obstajata in sta enaka*

$$\begin{aligned}\lambda_L &= \lim_{t\downarrow 0}\phi^*(t)(t-\psi(t)) = \phi(0+)(1-\psi'(0+)),\\ \lambda_U &= 1-\psi(1-)-\lim_{t\uparrow 1}\frac{1-\psi(t)}{1-t}\Big(1-\phi(t)\Big) = (1-\psi(1-))(1-\phi'(1-)).\end{aligned}$$

Spodnji oziroma zgornji repni koeficient je enak nič, če je ϕ *oziroma* ψ *zvezna.*

Dokaz. Naj bo $C = C_{\phi,\psi}$ maksmin kopula s pripadajočima funkcijama ϕ in ψ, ki zadoščata pogoju **(F)**.

(i) Ker je $C(u,v)/u = \min\{\phi^*(u)(v-\psi(v)), 1-\psi(v)\} + \psi(v)$ po **(F3*)** padajoča funkcija v spremenljivki u, je kopula C LRP$(Y|X)$. Kopula C je DRN$(X|Y)$ natanko tedaj, ko je za vsak $u\in\mathrm{I}$ funkcija

$$\frac{u-C(u,v)}{1-v} = \begin{cases}\dfrac{u-\phi(u)(v-\psi(v))-u\psi(v)}{1-v}, & \text{če je } \psi_*(v)\geq\phi^*(u),\\ 0, & \text{če je } \psi_*(v)\leq\phi^*(u),\end{cases}$$

padajoča v spremenljivki v. Prvi predpis je enak

$$\phi(u)-(\phi(u)-u)\frac{1-\psi(v)}{1-v}.$$

Ker je $\phi(u)\geq u$ in lahko preprosto preverimo, da funkcija $(1-\psi(v))/(1-v)$ po lastnosti **(F3$_*$)** narašča, je funkcija $(u-C(u,v))/(1-v)$ padajoča v v.

(ii) Kopula C je SN$(Y|X)$, če je za vsak $v\in\mathrm{I}$ in skoraj vsak $u\in\mathrm{I}$ funkcija

$$\frac{\partial}{\partial u}C(u,v) = \begin{cases}1, & \text{če je } \phi^*(u)>\psi_*(v),\\ (v-\psi(v))\phi'(u)+\psi(v), & \text{če je } \phi^*(u)<\psi_*(v),\end{cases} \tag{6.13}$$

padajoča v spremenljivki u. Najprej dokažimo, da je $(v-\psi(v))\phi'(u)+\psi(v)\leq 1$, ko je $\phi^*(u)<\psi_*(v)$. Po lastnosti **(Fc*)** velja

$$(v-\psi(v))\phi'(u)+\psi(v)\leq(v-\psi(v))\phi^*(u)+\psi(v)\leq(v-\psi(v))\psi_*(v)+\psi(v)=1.$$

Kopula C je torej SN$(Y|X)$ natanko tedaj, ko je drugi predpis v (6.13) padajoča funkcija v spremenljivki u, kar velja natanko tedaj, ko je ϕ konkavna.

(iii) Kopula C je SN$(X|Y)$, če je za vsak $u \in \mathrm{I}$ in skoraj vsak $v \in \mathrm{I}$ funkcija

$$\frac{\partial}{\partial v} C(u,v) = \begin{cases} -(\phi(u)-u)\psi'(v)+\phi(u), & \text{če je } \psi_*(v) > \phi^*(u), \\ 0, & \text{če je } \psi_*(v) < \phi^*(u), \end{cases}$$

padajoča v spremenljivki v. Ker je kopula naraščajoča funkcija v vsaki spremenljivki posebej, je prvi predpis nenegativen. Maksmin kopula C je torej SN$(Y|X)$ natanko tedaj, ko je ψ konveksna.

(iv) Kopula C je DRN$(Y|X)$, če je za vsak $v \in \mathrm{I}$ funkcija

$$\frac{v - C(u,v)}{1-u} = \begin{cases} \dfrac{v-u}{1-u}, & \text{če je } \phi^*(u) \geq \psi_*(v), \\ (v-\psi(v))\dfrac{1-\phi(u)}{1-u} + \psi(v), & \text{če je } \phi^*(u) \leq \psi_*(v), \end{cases}$$

padajoča v spremenljivki u, kar velja natanko tedaj, ko je $(1-\phi(u))/(1-u)$ padajoča.

(v) Kopula C je LRP$(X|Y)$, če je za vsak $u \in \mathrm{I}$ funkcija

$$\frac{C(u,v)}{v} = \begin{cases} -(\phi(u)-u)\dfrac{\psi(v)}{v} + \phi(u), & \text{če je } \psi_*(v) \geq \phi^*(u), \\ \dfrac{u}{v}, & \text{če je } \psi_*(v) \leq \phi^*(u), \end{cases}$$

padajoča v spremenljivki v. To drži natanko tedaj, ko je $\psi(v)/v$ naraščajoča funkcija.

(vi) Spomnimo se, da po trditvi 3.37 velja

$$\lambda_L = \lim_{t \downarrow 0} \frac{C(t,t)}{t} \qquad \text{in} \qquad \lambda_U = 2 - \lim_{t \uparrow 1} \frac{1-C(t,t)}{1-t}.$$

Uporabimo lastnost **(Fd)** za izračun diagonalnega odseka maksmin kopule:

$$\delta(t) = C(t,t) = \phi(t)(t-\psi(t)) + t\psi(t), \quad t \in \mathrm{I}.$$

Od tod neposredno sledi prvi zapis za λ_L, saj je po lemi 6.1 funkcija ψ zvezna v 0. Preuredimo člene izraza $(1-\delta(t))/(1-t)$ tako, da dobimo

$$\begin{aligned} \frac{1-\delta(t)}{1-t} &= \frac{1-\delta(t)+\phi(t)-\phi(t)+\psi(t)-\psi(t)}{1-t} \\ &= \phi(t)+\psi(t)+\frac{1-\psi(t)}{1-t}(1-\phi(t)). \end{aligned}$$

Če upoštevamo, da je ϕ zvezna v 1, dobimo od tod prvi izraz za λ_U. Z uporabo L'Hôpitalovega pravila na limitah funkcij $(t-\psi(t))/t$ in $(1-\phi(t))/(1-t)$ izpeljemo še druga predpisa za λ_L oziroma λ_U. Oba repna koeficienta obstajata, saj obstajata limiti $\psi'(0+)$ oziroma $\phi'(1-)$ ter sta med nič in ena.

■

Navedimo primer prve parametrične družine maksmin kopul in raziščimo njene lastnosti. Dobimo jo tako, da definiramo družini funkcij $\{\phi_\alpha\}_\alpha$ in $\{\psi_\beta\}_\beta$, za kateri so izpolnjene ustrezne predpostavke **(F)**. Za funkcije ψ_β vzamemo tiste iz modela z eksponentno porazdeljenimi časi udarov 6.10.

Zgled 6.13. Za parametra $\alpha, \beta \in [0,1]$ definiramo naslednji družini funkcij:

$$\begin{aligned} \text{za } \alpha \in [0,1) \quad &\text{naj bo} \quad \phi_\alpha(u) = u^{1-\alpha}, \ u \in \mathrm{I}, \\ \text{za } \alpha = 1 \quad &\text{naj bo} \quad \phi_1 = \mathbb{1}_{(0,1]}, \\ &\text{in} \\ \text{za } \beta \in [0,1) \quad &\text{naj bo} \quad \psi_\beta(v) = 1-(1-v)^{1-\beta}, \ v \in \mathrm{I}, \\ \text{za } \beta = 1 \quad &\text{naj bo} \quad \psi_1 = \mathbb{1}_{\{1\}}. \end{aligned}$$

Pari funkcij $(\phi_\alpha, \psi_\beta)$ zadoščajo pogoju **(F)** za vse vrednosti parametrov $\alpha, \beta \in [0,1]$. S $C_{\alpha,\beta}$ označimo maksmin kopulo, ki pripada funkcijama ϕ_α in ψ_β. Opazimo, da par $(\phi_{1/2}, \psi_{1/2})$ ustreza modelu z enako porazdeljenimi časi udarov 6.9. Ta parametrična družina vsebuje tudi kopuli Π in M – najmanjšo in največjo možno maksmin kopulo.

Naj bosta $\alpha, \beta \in (0,1)$. Pripadajoče maksmin kopule imajo tako absolutno zvezni kot singularni del. Nosilec singularnega dela maksmin kopule $C_{\alpha,\beta}$ je po (6.12) enak $\Gamma_{\alpha,\beta} = \{(u, 1-(1-u^\alpha)^{1/\beta}) \,|\, u \in \mathrm{I}\}$. Nosilec celotne kopule je enak območju pod krivuljo $\Gamma_{\alpha,\beta}$, vključno s krivuljo. Na zgornjem delu slike 6.4 so pri različnih vrednostih parametrov α in β narisane nivojnice kopule $C_{\alpha,\beta}$ in krivulja $\Gamma_{\alpha,\beta}$.

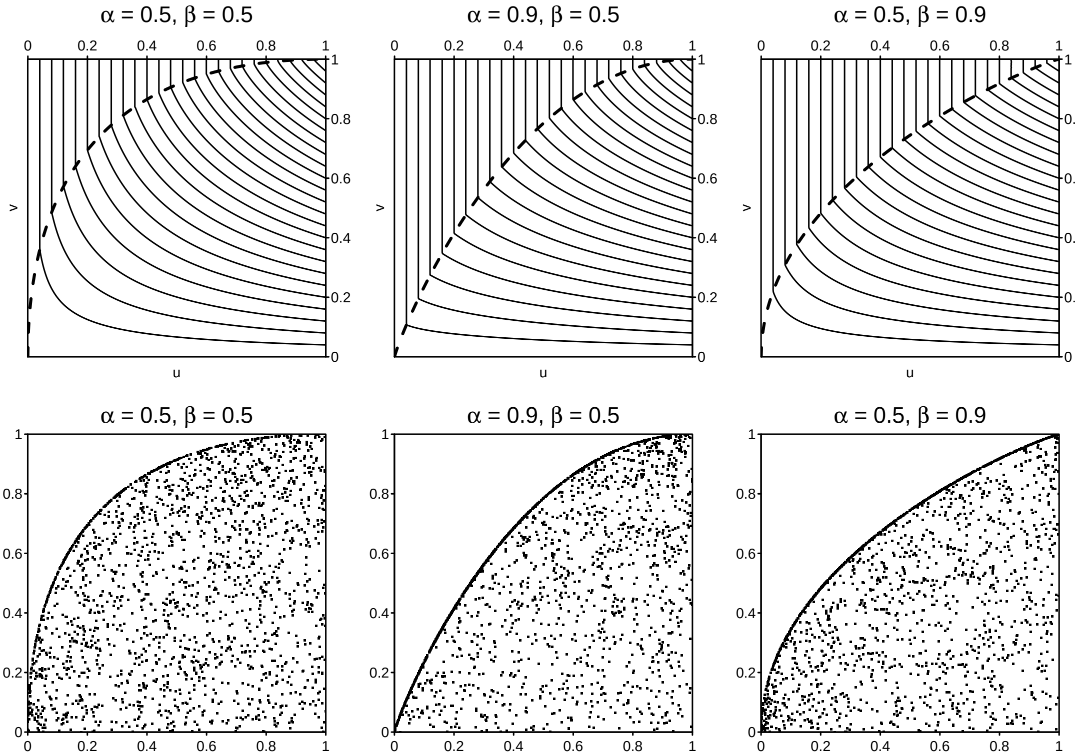
Za risanje razsevnih diagramov uporabimo algoritem 6.8. Ker funkciji ϕ in ψ ne izhajata iz verjetnostnega modela, moramo najprej določiti porazdelitveni funkciji F in G, za kateri velja enakost (6.9). Ugotovimo, da je za $x \in [0,1]$ enakost izpolnjena za funkciji $F(x) = x^{1/\alpha}$ in $G(x) = 1-(1-x)^{1/\beta}$, ki ju lahko razširimo do zveznih porazdelitvenih funkcij na $\mathbb{R}$. Predpostavke izreka 6.7 so za funkcije ϕ, ψ, F in G očitno izpolnjene in zato definiramo porazdelitvene funkcije F_X, F_Y in F_Z kot v dokazu tega izreka. Za $x \in [0,1]$ dobimo $F_X(x) = x^{(1-\alpha)/\alpha}$ in $F_Y(x) = 1-(1-x)^{(1-\beta)/\beta}$, medtem ko je $Z \sim \mathrm{EZ}[0,1]$. Sedaj le še izračunamo posplošene obrate porazdelitvenih funkcij F_X, F_Y in F_Z ter vzorčimo na podlagi algoritma 6.8. Na spodnjem delu slike 6.4 so pri različnih vrednostih parametrov $\alpha, \beta \in (0,1)$ predstavljeni razsevni diagrami. Vsak diagram je narisan na podlagi 2000 vzorčenj.

Kendallov τ in Spearmanov ρ izračunamo po formulah (3.11) in (3.10). Če sta $\alpha, \beta \in (0,1]$, potem velja

$$\tau_{\alpha,\beta} = \frac{2\alpha\beta}{(2-\alpha)(2-\beta)} - \frac{\alpha\beta}{\alpha-\alpha\beta+\beta} \mathrm{B}\left(\frac{2-\alpha}{\alpha}, \frac{2-\beta}{\beta}\right),$$

$$\rho_{\alpha,\beta} = \frac{3\alpha\beta}{(2-\alpha)(2-\beta)} - \frac{12}{(2-\alpha)(2-\beta)} \mathrm{B}\left(\frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\beta}\right),$$

kjer z B označimo beta funkcijo. Ko je eden izmed parametrov enak ena, se izraza poenostavita v $\tau_{1,\theta} = \tau_{\theta,1} = \theta$ in $\rho_{1,\theta} = \rho_{\theta,1} = 3\theta/(2+\theta)$. Za $\alpha, \beta \in (0,1]$ sta torej



Slika 6.4. Grafi nivojnic s krivuljo $\Gamma_{\alpha,\beta}$ (zgoraj) in pripadajoči razsevni diagrami (spodaj) kopule $C_{\alpha,\beta}$ iz zgleda 6.13 pri različnih vrednostih parametrov α in β.

$\tau_{\alpha,\beta}, \rho_{\alpha,\beta} \in (0,1]$. V primeru, ko je eden izmed parametrov enak nič, je pripadajoča maksmin kopula enaka produktni in sta zato Kendallov τ in Spearmanov ρ ničelna.

Če je $\alpha_1 \leq \alpha_2$ in $\beta_1 \leq \beta_2$, potem je $\phi_{\alpha_1} \leq \phi_{\alpha_2}$ in $\psi_{\beta_1} \geq \psi_{\beta_2}$, iz česar po trditvi 6.11 sledi $C_{\alpha_1,\beta_1} \preceq C_{\alpha_2,\beta_2}$. Po trditvi 6.12 je kopula $C_{\alpha,\beta}$ tako $\mathrm{SN}(Y|X)$ kot tudi $\mathrm{SN}(X|Y)$, saj je ϕ_α konkavna in ψ_β konveksna. Repna koeficienta zavzameta naslednje vrednosti:

$$\begin{gathered}
\text{za } \alpha, \beta \in [0,1) \text{ je } \lambda_L = \lambda_U = 0, \\
\text{za } \alpha = 1 \text{ in } \beta \in [0,1) \text{ je } \lambda_L = \beta \text{ in } \lambda_U = 0, \\
\text{za } \alpha \in [0,1) \text{ in } \beta = 1 \text{ je } \lambda_L = 0 \text{ in } \lambda_U = \alpha, \\
\text{za } \alpha = \beta = 1 \text{ je } \lambda_L = \lambda_U = 1.
\end{gathered}$$

□

Obravnavamo še en primer parametrične družine maksmin kopul, ki pa izhaja neposredno iz verjetnostnega modela.

Zgled 6.14. Maksmin kopule za enakomerno zvezno porazdeljene čase udarov.

Naj veljajo predpostavke izreka 6.6. Dodatno privzamemo, da so slučajne spremenljivke X, Y in Z porazdeljene enakomerno zvezno na intervalih $[0,a]$, $[0,b]$ oziroma $[0,c]$. Želimo najti taki funkciji ϕ in ψ, da bo veljalo $H = C_{\phi,\psi}(F,G)$. Funkciji bomo definirali tako kot v dokazu izreka 6.6. Izračunamo porazdelitveni funkciji

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x < 0, \\ \frac{x^2}{ac}, & \text{za } 0 \leq x < \min\{a,c\}, \\ \frac{x}{\max\{a,c\}}, & \text{za } \min\{a,c\} \leq x < \max\{a,c\}, \\ 1, & \text{za } \max\{a,c\} \leq x; \end{cases}$$

$$G(y) = \begin{cases} 0, & \text{za } x < 0, \\ \frac{y(b+c-y)}{bc}, & \text{za } 0 \leq x < \min\{b,c\}, \\ 1, & \text{za } \min\{b,c\} \leq x. \end{cases}$$

Opazimo, da je $\operatorname{im} F = \operatorname{im} G = [0,1]$ in da sta F ter G strogo naraščajoči in zvezni na intervalu $F^{-1}((0,1))$ oziroma $G^{-1}((0,1))$. Na intervalu (0,1) torej lahko izračunamo običajna obrata funkcij F in G

$$F^{-1}(u) = \begin{cases} \sqrt{ac\, u}, & \text{za } 0 < u \leq \frac{\min\{a,c\}}{\max\{a,c\}}, \\ \max\{a,c\}\, u, & \text{za } \frac{\min\{a,c\}}{\max\{a,c\}} < u < 1; \end{cases}$$

$$G^{-1}(v) = \tfrac{1}{2}\left(b + c - \sqrt{(b+c)^2 - 4bc\, u}\right).$$

Za $u, v \in (0,1)$ iskani funkciji definiramo s $\phi(u) = F_X(F^{-1}(u))$ in $\psi(v) = F_Y(G^{-1}(v))$.

Če označimo $\alpha = c/a > 0$ in $\beta = c/b > 0$, ter $\phi_\alpha = \phi$ in $\psi_\beta = \psi$, dobimo

$$\text{za } \alpha \leq 1 \text{ je } \quad \phi_\alpha(u) = \begin{cases} \sqrt{\alpha u}, & \text{če je } u \in [0,\alpha], \\ u, & \text{če je } u \in (\alpha, 1]; \end{cases} \tag{6.14}$$

$$\text{za } \alpha > 1 \text{ je } \quad \phi_\alpha(u) = \begin{cases} \sqrt{\alpha u}, & \text{če je } u \in [0,1/\alpha], \\ 1, & \text{če je } u \in (1/\alpha, 1], \end{cases} \tag{6.15}$$

in

$$\psi_\beta(v) = \begin{cases} \frac{1+\beta}{2} - \sqrt{\left(\frac{1+\beta}{2}\right)^2 - \beta v}, & \text{če je } v < 1, \\ 1, & \text{če je } v = 1. \end{cases}$$

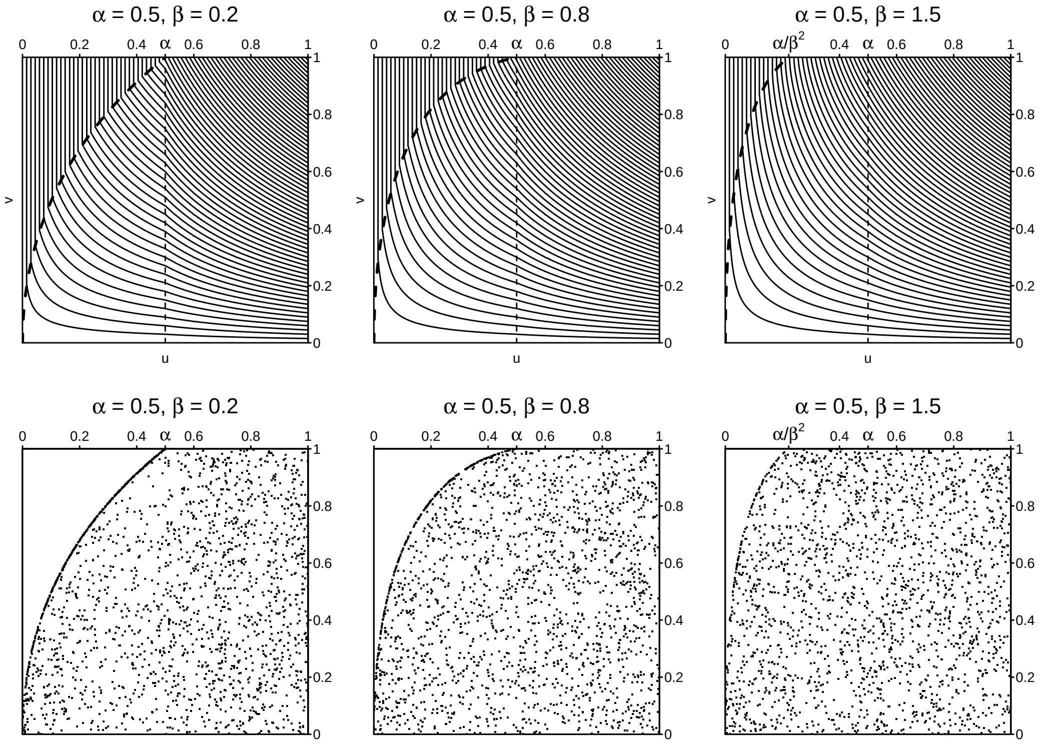
Opazimo, da za $\beta < 1$ funkcija ψ_β ni zvezna v 1. Pripadajočo maksmin kopulo označimo s $C_{\alpha,\beta}$, kjer sta $\alpha, \beta > 0$.

Izračunajmo nosilec singularnega dela, tj. krivuljo $\Gamma_{\alpha,\beta}$. S funkcijama

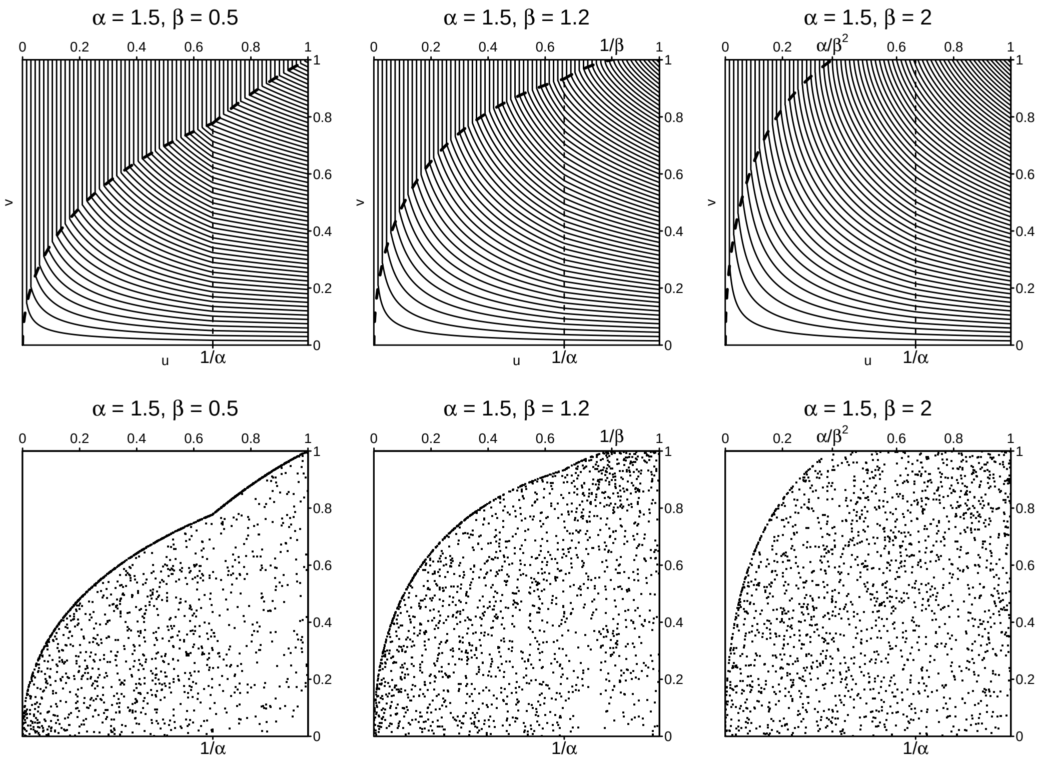
$$f(u) = (1+\beta)\sqrt{u/\alpha} - \beta\, u/\alpha \qquad \text{in} \qquad g(u) = (1+\beta)u - \beta u^2$$

lahko izrazimo $\Gamma_{\alpha,\beta}$ na naslednji način:

$$\text{za } \alpha \leq 1 \text{ je } \Gamma_{\alpha,\beta} = \{(u, \min\{f(u),1\}) \mid u \in [0,\alpha]\};$$
$$\text{za } \alpha > 1 \text{ je } \Gamma_{\alpha,\beta} = \{(u, \min\{f(u),1\}) \mid u \in [0,1/\alpha]\} \cup \{(u, \min\{g(u),1\}) \mid u \in (1/\alpha, 1]\}.$$



Slika 6.5. Grafi nivojnic s krivuljo $\Gamma_{\alpha,\beta}$ (zgoraj) in razsevni diagrami (spodaj) kopule $C_{\alpha,\beta}$ iz zgleda 6.14 za primere, ko je (z leve proti desni): $\beta < \alpha < 1$, $\alpha < \beta < 1$ in $\alpha < 1 < \beta$.



Slika 6.6. Grafi nivojnic s krivuljo $\Gamma_{\alpha,\beta}$ (zgoraj) in razsevni diagrami (spodaj) kopule $C_{\alpha,\beta}$ iz zgleda 6.14 za primere, ko je (z leve proti desni): $\beta < 1 < \alpha$, $1 < \beta < \alpha$ in $1 < \alpha < \beta$.

Nosilec celotne kopule, ki ima tako absolutno zvezni kot singularni del, je krivulja $\Gamma_{\alpha,\beta}$ in območje pod njo.

Na zgornjih delih slik 6.5 in 6.6 so pri različnih vrednostih parametrov α in β narisane nivojnice kopule $C_{\alpha,\beta}$ in krivulja $\Gamma_{\alpha,\beta}$. Parametra α in β imata verjetnostni pomen, če ju izrazimo z a, b in c. Če je na primer $\alpha = 0.5 < 1$ in $\beta = 0.8 \in (\alpha, 1)$, potem za parametre enakomernih zveznih porazdelitev slučajnih spremenljivk X, Y in Z velja $c < b < a$. Pri enakih vrednostih parametrov so na spodnjih delih slik 6.5 in 6.6 predstavljeni razsevni diagrami, za risanje katerih uporabimo algoritem 6.8 za 2000 vzorčenj. Če vzorčimo iz kopule $C_{\alpha,\beta}$, potem postavimo $c = 1$ in v drugem koraku algoritma generiramo $x \sim \mathrm{EZ}[0, 1/\alpha]$, $y \sim \mathrm{EZ}[0, 1/\beta]$ in $z \sim \mathrm{EZ}[0, 1]$.

Če je $\alpha_1 \leq \alpha_2$ in $\beta_1 \leq \beta_2$, potem je $\phi_{\alpha_1} \leq \phi_{\alpha_2}$ in $\psi_{\beta_1} \leq \psi_{\beta_2}$, iz česar po trditvi 6.11 sledi $C_{\alpha_1,\beta_2} \preceq C_{\alpha_2,\beta_1}$. Ker je ψ_β konveksna, je po trditvi 6.12 ta kopula $\mathrm{SN}(X|Y)$. Kopula $C_{\alpha,\beta}$ je $\mathrm{SN}(Y|X)$ natanko tedaj, ko je $\alpha \geq 1$, saj je v tem primeru ϕ_α konkavna, in ni niti $\mathrm{DRN}(Y|X)$ za $\alpha < 1$. Ker je ϕ_α za vsak α zvezna v 0, je spodnji repni koeficient za vse $\alpha, \beta > 0$ enak nič, medtem ko je vrednost λ_U odvisna od parametrov α in β:

$$\lambda_U = \begin{cases} 0, & \text{če je } \beta \geq 1 \text{ ali če je } \beta < 1 \text{ in } \alpha < 1, \\ \frac{1-\beta}{2}, & \text{če je } \beta < 1 \text{ in } \alpha = 1, \\ 1 - \beta, & \text{če je } \beta < 1 \text{ in } \alpha > 1. \end{cases}$$

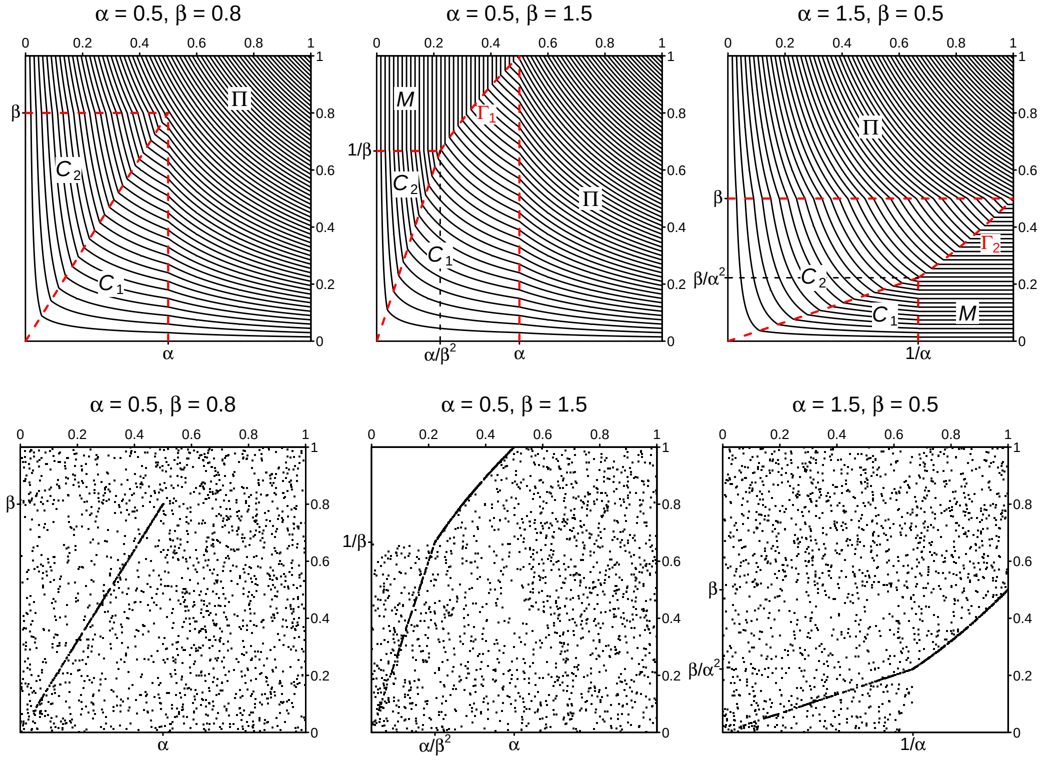
(Ne)ničelnost repnih koeficientov je razvidna tudi iz razsevnih diagramov. □

Primer enakomerno zvezno porazdeljenih časov raziščimo udarov še za Marshallove kopule.

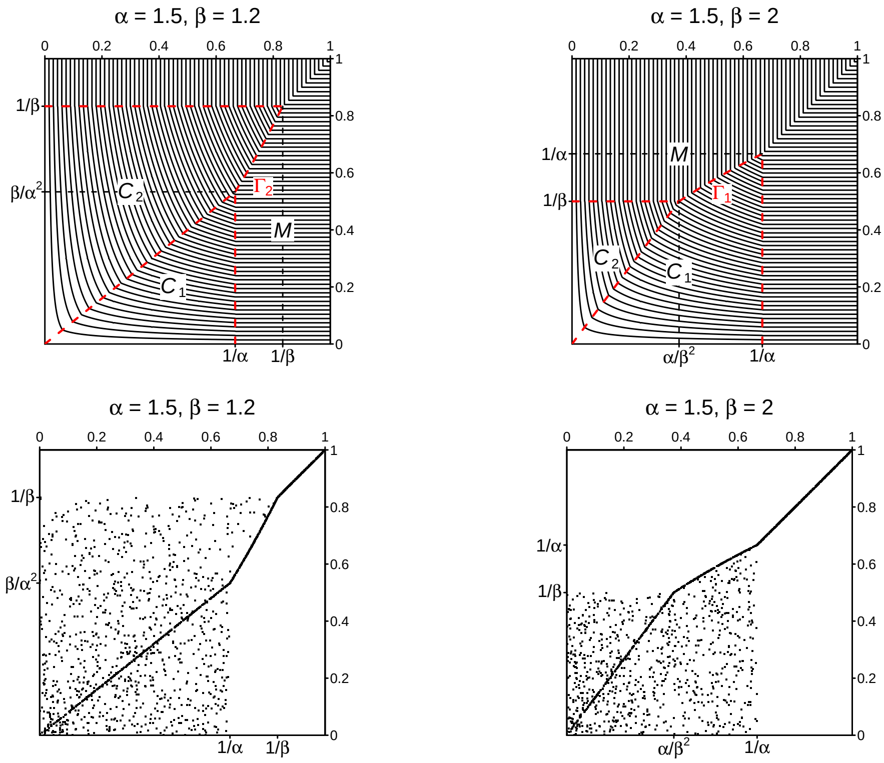
Zgled 6.15. Marshallove kopule za enakomerno zvezno porazdeljene čase udarov.

V primeru enakomerne zvezne porazdelitve časov udarov izpeljimo še pripadajočo Marshallovo kopulo. Naj bo $U = \max\{X, Z\}$ in $V = \max\{Y, Z\}$, kjer so X, Y in Z neodvisne slučajne spremenljivke, ki so porazdeljene enakomerno zvezno na intervalih $[0, a]$, $[0, b]$ oziroma $[0, c]$. Z F, G in H označimo porazdelitvene funkcije slučajnih spremenljivk U, V oziroma slučajnega vektorja (U, V). Tako kot v dokazu izreka 5.8 bomo definirali taki funkciji ϕ in ψ, da bo za pripadajočo Marshallovo kopulo $C_{\phi,\psi}$ veljalo $H = C_{\phi,\psi}(F, G)$. Označimo $\alpha = c/a > 0$ in $\beta = c/b > 0$ ter $\phi_\alpha^{\mathrm{M}} = \phi$ in $\psi_\beta^{\mathrm{M}} = \psi$. Iz prejšnjega zgleda ohranimo oznako za funkcijo ϕ_α – za $\alpha \leq 1$ je definirana s predpisom (6.14), medtem ko za $\alpha > 1$ ustreza predpisu (6.15). Pri Marshallovi kopuli očitno dobimo $\phi_\alpha^{\mathrm{M}} = \phi_\alpha$ in $\psi_\beta^{\mathrm{M}} = \phi_\beta$. Označimo s $C_{\alpha,\beta}^{\mathrm{M}}$ pripadajočo Marshallovo kopulo pri $\alpha, \beta > 0$.

Izpeljava eksplicitnega zapisa kopule $C_{\alpha,\beta}^{\mathrm{M}}$ je enostavna, vendar tehnično zahtevna, zaradi česar jo izpustimo in kopulo predstavimo z grafi nivojnic in razsevnimi diagrami. Najprej ločimo pet različnih primerov glede na vrednosti α in β, in sicer $\alpha, \beta \leq 1$ ali $\alpha \leq 1 < \beta$ ali $\beta \leq 1 < \alpha$ ali $1 < \beta \leq \alpha$ ali $1 < \alpha < \beta$. Prvi trije primeri so z grafi



Slika 6.7. Grafi nivojnic (zgoraj) in razsevni diagrami (spodaj) kopule $C^{\mathrm{M}}_{\alpha,\beta}$ iz zgleda 6.15 za primere, ko je (z leve proti desni): $\alpha, \beta < 1$, $\alpha < 1 < \beta$ in $\beta < 1 < \alpha$.



Slika 6.8. Grafa nivojnic (zgoraj) in razsevni diagrami (spodaj) kopule $C^{\mathrm{M}}_{\alpha,\beta}$ iz zgleda 6.15 za primera, ko je (z leve proti desni): $1 < \beta < \alpha$ in $1 < \alpha < \beta$.

nivojnic predstavljeni na zgornjem delu slike 6.7 in zadnja dva na zgornjem delu slike 6.8. V vsakem izmed teh primerov I^2 razdelimo na tri do štiri območja, kar je na slikah označeno z rdečimi črtkanimi krivuljami. Vse krivulje, z izjemo označenih Γ_1 in Γ_2, so daljice, medtem ko sta

$$\Gamma_1 = \Big\{\Big(u, \sqrt{u/\alpha}\Big) \,\Big|\, u \in \Big[\alpha/\beta^2, \min\{\alpha, 1/\alpha\}\Big]\Big\},$$
$$\Gamma_2 = \Big\{\Big(u, \beta u^2\Big) \,\Big|\, u \in \Big[1/\alpha, \min\{1, 1/\beta\}\Big]\Big\}.$$

Na vsakem izmed teh območij kopula zadošča $C^{\mathrm{M}}_{\alpha,\beta}(u,v)$ drugačnemu predpisu, in sicer je lahko enaka $\Pi(u,v)$, $M(u,v) = \min\{u,v\}$, $C_1(u,v) := \sqrt{\alpha u}\, v$ ali $C_2(u,v) := \sqrt{\beta v}\, u$.

Na spodnjih delih slik 6.7 in 6.8 so predstavljeni grafom nivojnic pripadajoči razsevni diagrami, ki smo jih narisali na podlagi 2000 vzorčenj z algoritmom 5.11. Če je $\alpha > 1$ ali $\beta > 1$, nosilec kopule $C^{M}_{\alpha,\beta}$ ni enak I^2, saj tedaj ϕ^M_α ali ψ^M_β ni strogo naraščajoča. Vse kopule te družine imajo neničeln absolutno zvezni in singularni del. Nosilec singularnega dela $\{(u,v) \in \mathrm{I}^2 \,|\, \phi^*(u) = \psi^*(v) > 1\}$ je dobro razviden iz razsevnih diagramov.

Če je $\alpha_1 \le \alpha_2$ in $\beta_1 \le \beta_2$, potem je $\phi^{\mathrm{M}}_{\alpha_1} \le \phi^{\mathrm{M}}_{\alpha_2}$ in $\psi^{\mathrm{M}}_{\beta_1} \le \psi^{\mathrm{M}}_{\beta_2}$, iz česar po trditvi 5.12 sledi $C^{\mathrm{M}}_{\alpha_1,\beta_1} \preceq C^{\mathrm{M}}_{\alpha_2,\beta_2}$. Po trditvi 5.13 je ta kopula $\mathrm{SN}(Y|X)$ oziroma $\mathrm{SN}(X|Y)$, natanko tedaj, ko je $\alpha \ge 1$ oziroma $\beta \ge 1$, saj je v tem primeru ϕ^{M}_α oziroma ψ^{M}_β konkavna. Za $\alpha < 1$ oziroma $\beta < 1$ ni niti $\mathrm{DRN}(Y|X)$ oziroma $\mathrm{DRN}(X|Y)$. Ker sta ϕ^{M}_α in ψ^{M}_β zvezni v 0, je spodnji repni koeficient za vse $\alpha, \beta > 0$ enak nič, medtem ko je vrednost λ_U odvisna od parametrov α in β:

$$\lambda_U = \begin{cases} 0, & \text{če je } \alpha \le 1 \text{ ali } \beta \le 1, \\ 1, & \text{če je } \alpha > 1 \text{ in } \beta > 1. \end{cases}$$

□

Doktorsko disertacijo zaključimo s primerom parametrične družine maksmin kopul, ki ne izhaja iz verjetnostnega modela in pokaže, da ob umetnem izboru funkcij ϕ ter ψ lahko dobimo maksmin kopule z „nenavadnimi“ lastnostmi.

Zgled 6.16. Za parametre a, b, c in d, za katere velja $0 \le a \le b \le 1$ in $0 \le c \le d \le 1$, definiramo odsekoma linearni funkciji ϕ in ψ z naslednjima predpisoma:

$$\phi(u) = \begin{cases} \frac{b}{a}\, u, & \text{za } u \in [0,a], \\ b, & \text{za } u \in (a,b], \\ u, & \text{za } u \in (b,1]; \end{cases} \qquad \psi(v) = \begin{cases} v, & \text{za } v \in [0,c), \\ c, & \text{za } v \in [c,d), \\ \frac{1-c}{1-d}\, v - \frac{d-c}{1-d}, & \text{za } v \in [d,1]. \end{cases}$$

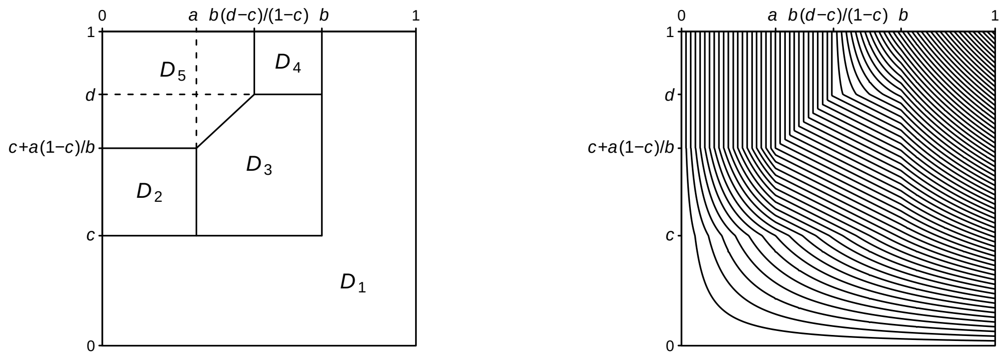
Dodatno definiramo še $\phi(0) = 0$ pri $a = 0$ in $\psi(1) = 1$ pri $d = 1$. Tako definirane funkcije zadoščajo pogoju **(F)**. Če je $a = 0$ oziroma $d = 1$, potem ϕ ni zvezna v 0 oziroma ψ ni zvezna v 1. Če velja $0 \le a < b < 1$ in $0 < c < d \le 1$ lahko preverimo, da pripadajoča kopula $C_{\phi,\psi}$ ni niti $\mathrm{DRN}(Y|X)$ niti $\mathrm{LRP}(X|Y)$. Če sta

a in c enaka 0, je $\lambda_L = b$. Ob $b = 1$ in $d = 1$ dobimo $\lambda_U = 1 - c$. V preostalih primerih je $\lambda_L = \lambda_U = 0$. V nadaljevanju eksplicitno izračunamo kopulo $C_{\phi,\psi}$, ko je $0 < a < b < 1$ in $0 < c < d < 1$.

Najprej predpostavimo, da je $b/a \geq (1-c)/(d-c)$. Enotski kvadrat I^2 razdelimo na pet območij – kot je prikazano na levi strani slike 6.9. Na vsakem izmed teh območij kopula $C_{\phi,\psi}$ zadošča drugačnemu predpisu, in sicer je

$$C_{\phi,\psi}(u,v) = \begin{cases} uv, & \text{za } (u,v) \in \mathrm{D}_1, \\ \frac{b}{a}\,uv - \frac{(b-a)c}{a}\,u, & \text{za } (u,v) \in \mathrm{D}_2, \\ c\,u + b\,v - bc, & \text{za } (u,v) \in \mathrm{D}_3, \\ \frac{1-c}{1-d}\,uv - \frac{d-c}{1-d}\,u - \frac{b(d-c)}{1-d}\,v + \frac{b(d-c)}{1-d}, & \text{za } (u,v) \in \mathrm{D}_4, \\ u, & \text{za } (u,v) \in \mathrm{D}_5. \end{cases} \tag{6.16}$$

Na desni strani slike 6.9 so pri parametrih $a = 0.3$, $b = 0.7$, $c = 0.35$ in $d = 0.8$ narisane nivojnice kopule $C_{\phi,\psi}$.



Slika 6.9. Na levi: delitev I^2 na območja D_1, D_2, D_3, D_4 in D_5, ko je $b/a \geq (1-c)/(d-c)$. Na desni: nivojnice kopule $C_{\phi,\psi}$ pri parametrih $a = 0.3$, $b = 0.7$, $c = 0.35$ in $d = 0.8$.

Naj bo sedaj $b/a < (1-c)/(d-c)$. Delitev I^2 na pet območij je prikazana na levi strani slike 6.10. Na območjih D_1, D_2, D_3 in D_4 je pripadajoča maksmin kopula definirana kot v (6.16), medtem ko na območju D_5 velja

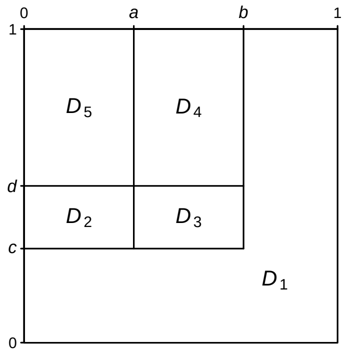
$$\tfrac{a(1-c)-b(d-c)}{a(1-d)}\,uv + \tfrac{(b-a)(d-c)}{a(1-d)}\,u.$$

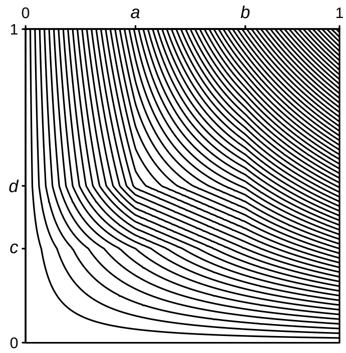
Na desni strani slike 6.10 so pri parametrih $a = 0.35$, $b = 0.7$, $c = 0.3$ in $d = 0.5$ predstavljene nivojnice kopule $C_{\phi,\psi}$.

V tem primeru za vse $u \in (0,1]$ in $v \in [0,1]$ velja, da je

$$\phi^*(u) \leq b/a < (1-c)/(d-c) \leq \psi_*(v).$$

Za množico $N_{\phi,\psi}$, definirano v (6.11), zato velja $N_{\phi,\psi} = \mathrm{I}^2$. Nosilec pripadajoče maksmin kopule je medtem enak $\mathrm{I}^2 \backslash \mathrm{D}_3$. Ta primer torej pokaže, da nosilec maksmin kopule ni definiran z množico $N_{\phi,\psi}$ za poljuben izbor funkcij ϕ in ψ. $\square$





Slika 6.10. Na levi: delitev I^2 na območja D_1, D_2, D_3, D_4 in D_5, ko je $b/a < (1-c)/(d-c)$. Na desni: nivojnice kopule $C_{\phi,\psi}$ pri parametrih $a = 0.35$, $b = 0.7$, $c = 0.3$ in $d = 0.5$.

Literatura

[1] S. Bertino, *Sulla dissomiglianza tra mutabili cicliche*, Metron. **35** (1977), str. 53–88.

[2] P. Billingsley, *Probability and Measure*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2012.

[3] U. Cherubini, E. Luciano, W. Vecchiato, *Copula Methods in Finance*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 2004.

[4] C. M. Cuadras, J. Augé, *A continuous general multivariate distribution and its properties*, Commun. Stat. A – Theory Methods **10** (1981), str. 339–353.

[5] P. Deheuvels, *Caractérisation complète des lois extrêmes multivariées et de la convergence des types extrêmes*, Publ. Inst. Stat. Univ. Paris **23** (1978), str. 1–36.

[6] F. Durante, *A new family of symmetric bivariate copulas*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **344** (2007), str. 195–198.

[7] F. Durante, M. Hofert, M. Scherer, *Multivariate hierarchical copulas with shocks*, Methodol. Comput. Appl. Probab. **12** (2010), str. 681—694.

[8] F. Durante, A. Kolesárová, R. Mesiar, C. Sempi, *Semilinear copulas*, Fuzzy Sets Syst. **159** (2008), str. 63–76.

[9] F. Durante, C. Sempi, *Copula and semicopula transforms*, Int. J. Math. Math. Sci. **4** (2005), str. 654–655.

[10] P. Embrechts, F. Lindskog, A. McNeil, *Modelling dependence with copulas and applications to risk management*, v: S. T. Rachev (ur.), Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance, Elsevier Science B. V., Amsterdam, 2003, str. 329–384.

[11] M. Fréchet, *Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données*, Ann. Univ. Lyon Sect. A **9** (1951), str. 53–77.

[12] G. A. Fredricks, R. B. Nelsen, *Copulas constructed from diagonal sections*, v: V. Beneš, J. Štěpán (ur.), Distributions with Given Marginals and Moment Problems, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997, str. 129–136.

[13] G. A. Fredricks, R. B. Nelsen, *Diagonal copulas*, v: V. Beneš, J. Štěpán (ur.), Distributions with Given Marginals and Moment Problems, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997, str. 121–128.

[14] G. A. Fredricks, R. B. Nelsen, *The Bertino family of copulas*, v: C. M. Cuadras, J. Fortiana, J. A. Rodríguez-Lallena (ur.), Distributions with Given Marginals and Statistical Modelling, Springer Science+Business Media, Dordrecht, 2002, str. 81–91.

[15] J. Galambos, *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1978.

[16] C. Genest, J. J. Quesada-Molina, J. A. Rodríguez-Lallena, *De l'impossibilité de construire des lois à marges multidimensionnelles données à partir de copules*, C. R. Acad. Sci. Paris – Sér. I Math. **320** (1995), str. 723–726.

[17] C. Genest, L.-P. Rivest, *On the multivariate probability integral transform*, Stat. Probab. Lett. **53** (2001), str. 391–399.

[18] K. Giesecke, *A simple exponential model for dependent defaults*, J. Fixed Income **13** (2003), str. 74–83.

[19] W. Hoeffding, *Masstabinvariante korrelationstheorie*, Schriften Matematischen Instituts und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin 5 **3** (1940), str. 179–233 (ponatis: *Scale-invariant correlation theory*, v: N. I. Fisher, P. K. Sen (ur.), The Collected Works of Wassily Hoeffding, Springer, New York, 1994, str. 57–107).

[20] W. Hoeffding, *Masstabinvariante korrelationsmasse für diskontinuierliche verteilungen*, Arkiv für matematischen Wirtschaften und Sozialforschung **7** (1941), str. 49–70 (ponatis: *Scale-invariant correlation measures for discontinuous distributions*, v: N. I. Fisher, P. K. Sen (ur.), The Collected Works of Wassily Hoeffding, Springer, New York, 1994, str. 109–133).

[21] M. Hofert, I. Kojadinovic, M. Mächler, J. Yan, *Package "copula": Multivariate Dependence with Copulas*, elektronski vir, datum zadnje spremembe: 5. marec 2015, dostopno na naslovu:
`http://cran.r-project.org/web/packages/copula/copula.pdf`

[22] P. Jaworski, F. Durante, W. K. Härdle, T. Rychlik (ur.), *Copula Theory and its Applications, Proceedings of the Workshop Held in Warsaw, 25–26 September*

2009, v: Lecture Notes in Statistics – Proceedings, Springer, Berlin, Heidelberg, 2010.

[23] H. Joe, *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Chapman & Hall, London, 1997.

[24] M. E. Johnson, *Multivariate Statistical Simulation: A Guide to Selecting and Generating Continuous Multivariate Distributions*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1987.

[25] G. Kimeldorf, A. R. Sampson, *Uniform representations of bivariate distributions*, Commun. Stat. A – Theory Methods **4** (1975), str. 617–627.

[26] G. Kimeldorf, A. R. Sampson, *Monotone dependence*, Ann. Stat. **6** (1978), str. 895–903.

[27] E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, *Transformations of copulas and quasicopulas*, v: M. López-Díaz, M. Á. Gil, P. Grzegorzewski, O. Hryniewicz, J. Lawry (ur.), Soft Methodology and Random Information Systems, Advances in Soft Computing, vol. 26, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004, str. 181–188.

[28] J. F. Lawless, *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2003.

[29] X. Li, P. Mikusiński, M. D. Taylor, *Some integration-by-parts formulas involving 2-copulas*, v: C. M. Cuadras, J. Fortiana, J. A. Rodríguez-Lallena (ur.), Distributions with Given Marginals and Statistical Modelling, Springer Science+Business Media, Dordrecht, 2002, str. 153–159.

[30] F. Lindskog, A. J. McNeil, *Common Poisson shock models: applications to insurance and credit risk modelling*, ASTIN Bulletin **33** (2003), str. 209–238.

[31] C. H. Ling, *Representation of associative functions*, Publ. Math. Debrecen **12** (1965), str. 189–212.

[32] J.-F. Mai, M. Scherer, *Simulating Copulas: Stochastic Models, Sampling Algorithms, and Applications*, Imperial College Press, London, 2012.

[33] A. W. Marshall, *Copulas, marginals, and joint distributions*, v: L. Rüschendorf, B. Schweizer, M. D. Taylor (ur.), Distributions with Fixed Marginals and Related Topics, IMS Lecture Notes – Monograph Series, vol. 28, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA, 1996, str. 213–222.

[34] A. W. Marshall, I. Olkin, *A multivariate exponential distribution*, J. Am. Stat. Assoc. **62** (1967), str. 30–44.

[35] P. Mikusiński, H. Sherwood, M. D. Taylor, *Probabilistic interpretations of copulas and their convex sums*, v: G. Dall'Aglio, S. Kotz, G. Salinetti (ur.), Advances in Probability Distributions with Given Marginals, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991, str. 95–112.

[36] R. B. Nelsen, *An Introduction to Copulas*, Springer Science+Business Media, Inc., New York, 2006.

[37] M. Omladič, N. Ružić, *Shock models with recovery option via the maxmin copulas*, Fuzzy Sets Syst., sprejeto v objavo (2014), DOI: 10.1016/j.fss.2014.11.006.

[38] J. Pickands, *Multivariate extreme value distributions*, Bull. Int. Stat. Inst. **49** (1981), str. 859–878.

[39] J. J. Quesada-Molina, J. A. Rodríguez-Lallena, *Bivariate copulas with quadratic sections*, J. Nonparametr. Stat. **5** (1995), str. 323–337.

[40] M. Rausand, A. Høyland, *System Reliability Theory: Models, Statistical Methods, and Applications*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2004.

[41] S. I. Resnick, *A Probability Path*, Springer Science+Business Media, Inc., New York, 2014.

[42] J. A. Rodríguez-Lallena, M. Úbeda-Flores, *A new class of bivariate copulas*, Stat. Probab. Lett. **66** (2004), str. 315–325.

[43] B. Schweizer, A. Sklar, *Operations on distribution functions not derivable from operations on random variables*, Studia Math. **52** (1974), str. 43–52.

[44] B. Schweizer, A. Sklar, *Probabilistic Metric Spaces*, Elsevier Science Publishing Co., Inc., New York, 1983.

[45] A. Sklar, *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges*, Publ. Inst. Stat. Univ. Paris **8** (1959), str. 229–231.

[46] A. Sklar, *Random variables, joint distributions, and copulas*, Kybernetica **9** (1973), str. 449–460.

[47] A. Sklar, *Random variables, distribution functions, and copulas – a personal look backward and forward*, v: L. Rüschendorf, B. Schweizer, M. D. Taylor (ur.), Distributions with Fixed Marginals and Related Topics, IMS Lecture Notes – Monograph Series, vol. 28, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA, 1996, str. 1–14.

[48] R. A. Vitale, *On stochastic dependence and a class of degenerate distributions*, v: H. W. Block, A. R. Sampson, T. H. Savits (ur.), Topics in Statistical Dependence, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA, 1990, str. 459–469.

Stvarno kazalo