UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA MATEMATIKO
Matematika - 3. stopnja

Tina Novak

GEOMETRIJA REALNIH FORM KOMPLEKSNEGA NEUMANNOVEGA SISTEMA

Doktorska disertacija

Mentor: prof. dr. Pavle Saksida

Ljubljana, 2015

Izjavljam, da sem avtorica doktorske disertacije z naslovom

Geometrija realnih form kompleksnega Neumannovega sistema.

Ajdovščina, 9. 11. 2015 Tina Novak

Dovoljujem objavo doktorske disertacije

Geometrija realnih form kompleksnega Neumannovega sistema

v elektronski obliki.

Ajdovščina, 9. 11. 2015 Tina Novak

ZAHVALA

Hvala Pavletu.....Martinu.....Janezu.....recenzentu.....Nataši.....Darji in Heleni.....Majdi in Slavku.....
.....Boštjanu, Evi in Jaki.....

Nadi in Viliju, ker nista zahtevala poštevanke ”na pamet”

Ničle veliko pomenijo, če se lahko postavijo za kakšno številko.

A. Camus

Povzetek

C. Neumannov sistem opisuje gibanje delca na n-dimenzionalni sferi S^n v polju sil s kvadratnim potencialom $U(q_1, \ldots, q_{n+1}) = \sum a_j q_j^2$. Znano je, da je Neumannov sistem popolnoma Liouvilleovo integrabilen. Prvi integrali Neumannovega sistema so integrali Uhlenbeckove. Poleg tega je kompleksen Neumannov sistem algebraično popolnoma integrabilen, nivojske množice kompleksne momentne preslikave pa so afini deli kompleksnih torusov. Nivojske množice realne momentne preslikave so potemtakem njihovi realni deli.

V disertaciji natančno definiramo realne forme kompleksnega Neumannovega sistema. Realne forme so Hamiltonovi sistemi na kotangentih svežnjih nad hiperboloidi. Pokažemo, da so tudi novi sistemi popolnoma Liouvilleovo integrabilni in eksplicitno zapišemo njihove prve integrale (ohranitvene količine).

Kompleksen Neumannov sistem je poseben primer splošnejšega Mumfordovega sistema. Mumfordov sistem je karakteriziran z Laxovo enačbo $\frac{d}{dt}L^{\mathbb{C}}(\lambda) = [M^{\mathbb{C}}(\lambda), L^{\mathbb{C}}(\lambda)]$ v zančni algebri $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})[\lambda, \lambda^{-1}]$, pri čemer so koeficienti $U^{\mathbb{C}}$, $V^{\mathbb{C}}$, $W^{\mathbb{C}}$ matrike $L^{\mathbb{C}}(\lambda)$ polinomi določene oblike. Če so $u_1, \ldots, u_n$ ničle ustrezne realne forme polinoma $U^{\mathbb{C}}$, je topologija regularne nivojske množice momentne preslikave realne forme kompleksnega generičnega Neumannovega sistema določena z lego ničel $u_1, \ldots, u_n$ glede na konstante $a_1, \ldots, a_{n+1}$ in ostalih določenih parametrov sistema. Za dve družini realnih form je topologija nivojskih množic neodvisna od lege regularnih vrednosti momentne preslikave. Za eno od njiju so nivojske množice nekompaktne. Opazimo, da so v posebnih primerih ničle realne forme polinoma $U^{\mathbb{C}}$ koordinate na enakoosnem hiperboloidu, ki je ustrezna realna forma kompleksne kvadrike $(S^n)^{\mathbb{C}}$. Definiramo konično-hiperboloidne koordinate na enakoosnih hiperboloidih, ki so posplošitev Jacobijevih eliptično-sferičnih koordinat na sferi S^n.

Ker ima Neumannov sistem Laxovo enačbo tudi v zančni algebri $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R})[\lambda, \lambda^{-1}]$, nam ta porodi še eno družino prvih integralov sistema. V disertaciji je podana in dokazana zveza med omenjeno družino integralov in družino integralov Uhlenbeckove.

Math. Subj. Class (2010): 37J35, 14H70, 70H06

Ključne besede: integrabilni sistemi, Neumannov sistem, Arnold-Liouvilleove nivojske množice, spektralna krivulja, realne strukture, realne forme

Abstract

C. Neumann system describes the motion of a particle on the sphere S^n under the influence of a quadratic potential $U(q_1,\dots,q_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n+1} a_j q_j^2$. The Neumann system is completely Liouville integrable. First integrals in involution are well known Uhlenbeck's integrals. In addition, the complex Neumann system is completely algebraically integrable and the regular level sets of the complex momentum map are affine parts of complex tori.

In the dissertation, we precisely define real forms of the complex Neumann system. We obtain new Hamiltonian systems on the cotangent bundles of hyperboloids. We prove that the real forms are completely integrable Hamiltonian systems and write down their first integrals (conserved quantities). The complex Neumann system is an example of the more general Mumford system. The Mumford system is characterized by the Lax equation $\frac{d}{dt}L^{\mathbb{C}}(\lambda) = [M^{\mathbb{C}}(\lambda), L^{\mathbb{C}}(\lambda)]$ in the loop algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})[\lambda,\lambda^{-1}]$. Coefficients $U^{\mathbb{C}}$, $V^{\mathbb{C}}$, $W^{\mathbb{C}}$ of the matrix $L^{\mathbb{C}}(\lambda)$ are suitable polynomials. If $u_1,\dots,u_n$ are roots of the appropriate real form of the polynomial $U^{\mathbb{C}}$, the topology of a regular level set of the moment map of the real form is determined by the positions of the roots $u_1,\dots,u_n$ with respect to the constants $a_1,\dots,a_{n+1}$ and to the suitable parameters of the system. For two families of the real forms of the complex Neumann system, we describe the topology of the regular level set of the moment map. For one of these two families the level sets are noncompact. We observe that in some special cases the roots of a real form of the polynomial $U^{\mathbb{C}}$ determine coordinates on a suitable hyperboloid. We define conical hyperboloidal coordinates on equiaxed hyperboloids and they can be interpreted as a generalization of the Jacobian elliptic spherical coordinates on S^n.

Since the Neumann system has another Lax equation in the loop algebra $\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{R})[\lambda,\lambda^{-1}]$, there exists another family of the first integrals in involution. In the dissertation, we also give the formula which provides the relation between this family and the family of Uhlenbeck's integrals.

Math. Subj. Class (2010): 37J35, 14H70, 70H06

Keywords: integrable systems, Neumann system, Arnold-Liouville level sets, specral curve, real structure, real form

Kazalo

Poglavje 1

Uvod

Realna simplektična mnogoterost (M^{2n}, ω) je $2n$-dimenzionalna realna mnogoterost, ki je opremljena s simplektično, to je zaprto in nedegenerirano, 2-formo ω. Naj bo dana funkcija $H : M^{2n} \to \mathbb{R}$. Trojico (M^{2n}, ω, H) imenjemo Hamiltonov sistem na realni simplektični mnogoterosti, funkcijo H pa Hamiltonova funkcija ali krajše Hamiltonjan. Navadno, v Hamiltonovi mehaniki, je funkcija H vsota kinetične in potencialne energije. S simplektično formo ω definiramo Hamiltonovo vektorsko polje (simplektični gradient) $X_H \in \chi(M^{2n})$ z enakostjo

$$\omega(X_H, \xi) = dH(\xi)$$

za vsak $\xi \in \chi(M^{2n})$. Poissonov oklepaj, ki pripada simplektični formi ω, je potem preslikava

$$\begin{aligned} \{\ ,\ \} : \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longmapsto \{f, g\} = \omega(X_g, X_f) = dg(X_f). \end{aligned}$$

Hamiltonov sistem diferencialnih enačb v lokalnih koordinatah $\mathbf{x}$, ki je oblike

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = X_H(\mathbf{x}(t)),$$

je ekvivalenten sistemu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \{\mathbf{x}(t), H\}.$$

Hamiltonov sistem (M^{2n}, ω, H) na simplektični mnogoterosti (M^{2n}, ω) je popolnoma (Liouvilleovo) integrabilen, če obstaja n funkcijsko neodvisnih prvih integralov $H{=}H_1, H_2, \ldots, H_n$, ki paroma Poissonovo komutirajo, to je

$$\{H_j, H_l\} = 0 \qquad \text{za poljubna } j, l \in \{1, \ldots, n\}.$$

Naj bo $\widetilde{H} = (H_1, \ldots, H_n) : M^{2n} \to \mathbb{R}^n$ momentna preslikava. Po Arnold-Liouvilleovem izreku vemo, da so povezane komponente regularne nivojske množice preslikave $\widetilde{H}$ difeomorfne $T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ za nek $0 \le k \le n$. Na tako dobljenih nivojskih množicah v akcijsko-kotnih koordinatah je sistem diferencialnih enačb sistema linearen.

Naj bodo $(q, p) \in T^*\mathbb{R}^{n+1}$ ambientne koordinate in naj bo $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_{n+1})$ diagonalna matrika z realnimi koeficienti. Neumannov sistem (natančneje C. Neumannov sistem) je Hamiltonov sistem (T^*S^n, ω, H), ki opisuje gibanje delca na sferi $S^n = \left\{q \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, |q| = 1\right\}$ s kvadratno potencialno energijo, to je

$$U(q) = \sum_{j=1}^{n+1} a_j q_j^2 = \langle q, Aq \rangle .$$

Simplektična forma ω na kotangentnem svežnju T^*S^n je kanonična 2-forma $\omega = \sum_{j=1}^{n+1} dq_j \wedge dp_j$ v ambientnih koordinatah. Hamiltonova funkcija H pa je podana s predpisom

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\Big(|q|^2|p|^2 - \langle q,p\rangle^2\Big) + \frac{1}{2}\big(2-|q|^2\big)\langle q, Aq\rangle \,. \tag{1.1}$$

Opomba 1 *Naj bosta $\xi, \eta \in \chi(T^*\mathbb{R}^{n+1})$ (vektorski polji nad $T^*\mathbb{R}^{n+1}$). Potem lahko pišemo*

$$\xi(q,p) = \sum_{j=1}^{n+1} \xi_j^q(q,p)\frac{\partial}{\partial q_j} + \sum_{j=1}^{n+1} \xi_j^p(q,p)\frac{\partial}{\partial p_j}$$

in

$$\eta(q,p) = \sum_{j=1}^{n+1} \eta_j^q(q,p)\frac{\partial}{\partial q_j} + \sum_{j=1}^{n+1} \eta_j^p(q,p)\frac{\partial}{\partial p_j} \,.$$

Potem je

$$\omega(\xi,\eta) = \sum_{j=1}^{n+1} dq_j \wedge dp_j(\xi,\eta) = \sum_{j=1}^{n+1} \xi_j^q \eta_j^p - \xi_j^p \eta_j^q \,.$$

Hamiltonjan H je modifikacija Hamiltonjana $H^*(q,p) = \frac{1}{2}(|q|^2|p|^2 - \langle q,p\rangle^2) + \frac{1}{2}\langle q, Aq\rangle$ glede na kotangentni sveženj T^*S^n (glej [21], [22]). Hamiltonjan H (1.1) je pravzaprav tudi modifikacija (glede na kotangentni sveženj T^*S^n) Hamiltonjana $h(q,p) = \frac{1}{2}|p|^2 + \frac{1}{2}\langle q, Aq\rangle$, ki opisuje gibanje $(n+1)$ delcev v preprostem harmoničnem oscilatorju. V splošnem je taka modifikacija opisana v [8]. Dobimo jo pri računanju Diracovega oklepaja in modificiranega Diracovega oklepaja. Za naš konkreten primer bomo modifikacijo prikazali v Primeru 38. Hamiltonov sistem diferencialnih enačb Neumannovega sistema je potemtakem sistem enačb

$$\begin{aligned} \dot{q}_j &= \{q_j, H\}_{T^*S^n} \\ \dot{p}_j &= \{p_j, H\}_{T^*S^n} \,, \end{aligned}$$

ki je ekvivalenten sistemu

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -Aq - (|p|^2 - \langle q, Aq\rangle)q \,. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Izhodišče naše študije bo generični primer Neumannovega sistema, to je sistem s paroma različnimi konstantami vzmeti $a_1, \ldots, a_{n+1}$. Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo, da je $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}$. Tak sistem je popolnoma Liouvilleovo integrabilen in je hkrati klasičen primer popolnoma algebraično integrabilnega sistema (glej [3], [23]). Prvi integrali generičnega Neumannovega sistema so funkcije

$$F_j(q,p) = q_j^2 + \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{n+1} \frac{K_{j,l}^2(q,p)}{a_j - a_l} \qquad \text{za} \qquad 1 \le j \le n+1 \,, \tag{1.3}$$

pri čemer smo označili

$$K_{j,l}(q,p) := q_j p_l - q_l p_j \,. \tag{1.4}$$

Integrale F_j imenujemo integrali Uhlenbeckove. Zanje veljata zvezi:

$$\sum_{j=1}^{n+1} F_j = 1 \qquad \text{in} \qquad \sum_{j=1}^{n+1} a_j F_j = 2H \,.$$

Momentna preslikava Neumannovega sistema je preslikava

$$\begin{aligned}\widetilde{F}=(F_1,\ldots,F_n):T^*S^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n\\ (q,p) &\longmapsto \widetilde{F}(q,p)=(F_1(q,p),\ldots,F_n(q,p))\,. \end{aligned}\tag{1.5}$$

Če so konstante $a_1,\ldots,a_{n+1}$ pozitivne, je Hamiltonova funkcija $H : T^*S^n \to \mathbb{R}$ prava funkcija; to pomeni, da so praslike kompaktnih množic kompaktne. Po Arnold-Liouvilleovem izreku so povezane komponente regularne nivojske množice momentne preslikave $\widetilde{F}$ difeomorfne n dimenzionalnemu torusu T^n. Če pa konstante $a_1,\ldots,a_{n+1}$ niso nujno vse pozitivne, Hamiltonova funkcija H ni nujno prava. Če poleg tega tudi vsi prvi integrali niso prave funkcije, za analizo regularne nivojske množice momentne preslikave potrebujemo nekaj orodij algebraične geometrije.

Opomba 2 *Študije negeneričnih (konfluentnih) primerov Neumannovega sistema najdemo v [9], [33], [34], [35].*

Laxova enačba Neumannovega sistema v zančni algebri $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})[\lambda,\lambda^{-1}] = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\otimes\mathbb{R}[\lambda,\lambda^{-1}]$ je enačba

$$\frac{d}{dt}L(\lambda)=[M(\lambda),L(\lambda)]\,,$$

kjer je $[M(\lambda),L(\lambda)] = M(\lambda)L(\lambda) - L(\lambda)M(\lambda)$. Pri tem je matrični polinom $L(\lambda)$ s koeficienti v Liejevi algebri $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ oblike

$$L(\lambda)=\begin{pmatrix} V(\lambda) & W(\lambda)\\ U(\lambda) & -V(\lambda)\end{pmatrix}\,. \tag{1.6}$$

Koeficienti $U(\lambda)$, $V(\lambda)$ in $W(\lambda)$ matrike $L(\lambda)$ so Jacobijevi polinomi:

$$\begin{aligned} U(\lambda) &= A(\lambda)\sum_{j=1}^{n+1}\frac{q_j^2}{\lambda-a_j}\\ V(\lambda) &= A(\lambda)\sum_{j=1}^{n+1}\frac{-q_jp_j}{\lambda-a_j}\\ W(\lambda) &= A(\lambda)\Big(-1+\sum_{j=1}^{n+1}\frac{-p_j^2}{\lambda-a_j}\Big) \end{aligned}\tag{1.7}$$

kjer je $A(\lambda)=\prod_{j=1}^{n+1}(\lambda-a_j)$. Matrika $M(\lambda)$ Laxovega para je v splošnem $P(L(\lambda),\lambda^{-1})_+$ za poljuben polinom $P(z,\lambda^{-1})$ spremenljivk z in λ^{-1} (glej [1]). Navadno pa za P vzamemo $P(z,\lambda^{-1}) = -z\lambda^{-n}$ in izkaže se, da je potem

$$M(\lambda)=\begin{pmatrix}\langle q,p\rangle & \lambda+|p|^2\\ -|q|^2 & -\langle q,p\rangle\end{pmatrix}\,,$$

oziroma za $(q,p)\in T^*S^n$

$$M(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & \lambda+|p|^2\\ -1 & 0\end{pmatrix}\,.$$

Spektralna krivulja Hamiltonovega sistema z Laxovo enačbo $\frac{d}{dt}L(\lambda) = [M(\lambda),L(\lambda)]$ je določena s karakteristično enačbo $\det(L(\lambda)-\mu I)=0$. Zato je spektralna krivulja Neumannovega sistema hipereliptična krivulja z enačbo $\mu^2 = U(\lambda)W(\lambda) + (V(\lambda))^2$. Če uporabimo (1.7), je

$$
\begin{aligned}
\mu^2 &= A^2(\lambda)\Big(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{q_k^2}{\lambda-a_k}\Big(-1+\sum_{l=1}^{n+1}\frac{-p_l^2}{\lambda-a_l}\Big)+\Big(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{-q_kp_k}{\lambda-a_k}\Big)^2\Big) = \\
&= A^2(\lambda)\Big(-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{q_k^2}{\lambda-a_k}-\sum_{k,l=1}^{n+1}\frac{q_k^2p_l^2}{(\lambda-a_k)(\lambda-a_l)}+\sum_{k,l=1}^{n+1}\frac{q_kp_kq_lp_l}{(\lambda-a_k)(\lambda-a_k)}\Big) = \\
&= A^2(\lambda)\left(-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{q_k^2}{\lambda-a_k}-\sum_{\substack{k=1\\ l\neq k}}^{n+1}\frac{q_k^2p_l^2}{(\lambda-a_k)(\lambda-a_l)}+\sum_{\substack{k=1\\ l\neq k}}^{n+1}\frac{q_kp_kq_lp_l}{(\lambda-a_k)(\lambda-a_l)}\right) = \\
&= A^2(\lambda)\left(-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{q_k^2}{\lambda-a_k}-\sum_{\substack{k=1\\ l>k}}^{n+1}\frac{q_k^2p_l^2-2q_kp_kq_lp_l+q_l^2p_k^2}{(\lambda-a_k)(\lambda-a_l)}\right) = \qquad (1.8)\\
&= A^2(\lambda)\left(-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{q_k^2}{\lambda-a_k}-\sum_{\substack{k=1\\ l\neq k}}^{n+1}\frac{K_{k,l}^2}{(\lambda-a_k)(a_k-a_l)}\right) = \\
&= A^2(\lambda)\Big(-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\lambda-a_k}\Big(q_k^2+\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n+1}\frac{K_{k,l}^2}{a_k-a_l}\Big)\Big) = \\
&= A^2(\lambda)\Big(-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{F_k}{\lambda-a_k}\Big).
\end{aligned}
$$

Naj bodo $Q = (Q_1, \ldots, Q_{n+1})$ in $P = (P_1, \ldots, P_{n+1})$ kompleksne koordinate v $\mathbb{C}^{n+1}$ in pišimo $Q_j = q_{j,0} + iq_{j,1}$ ter $P_j = p_{j,0} + ip_{j,1}$. Definirajmo produkt v kompleksnem $\langle Q, P\rangle_{\mathbb{C}} := \sum_{j=1}^{n+1} Q_jP_j$ in naj bo $|Q|^2_{\mathbb{C}} := \langle Q, Q\rangle_{\mathbb{C}}$.

C. Neumannov sistem ima naravno kompleksifikacijo $(T^*(S^n)^{\mathbb{C}}, \omega^{\mathbb{C}}, H^{\mathbb{C}})$, ki je kompleksen Hamiltonov sistem. Pri tem je

$$T^*(S^n)^{\mathbb{C}} = \left\{(Q,P)\in\mathbb{C}^{n+1}\times\mathbb{C}^{n+1}\;\middle|\; |Q|^2_{\mathbb{C}} = 1\,,\ \langle Q,P\rangle_{\mathbb{C}} = 0\right\},$$

kompleksna simplektična forma je oblike $\omega^{\mathbb{C}} = \sum_{j=1}^{n+1} dQ_j \wedge dP_j$, kompleksna funkcija $H^{\mathbb{C}}(Q, P)$ pa je naravna razširitev Hamiltonjana H, to je

$$H^{\mathbb{C}}(Q,P) = \frac{1}{2}\Big(|Q|^2_{\mathbb{C}}|P|^2_{\mathbb{C}} - \langle Q,P\rangle^2_{\mathbb{C}}\Big) + \frac{1}{2}\big(2-|Q|^2_{\mathbb{C}}\big)\langle Q, AQ\rangle_{\mathbb{C}}\,.$$

Tak kompleksen Neumannov sistem je primer splošnejšega Mumfordovega sistema (glej [19], [23], [32]). Mumfordov sistem je kompleksen sistem, ki je karakteriziran z Laxovo enačbo

$$\frac{d}{dt}L^{\mathbb{C}}(\lambda) = [M^{\mathbb{C}}(\lambda), L^{\mathbb{C}}(\lambda)]$$

v zančni algebri $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})[\lambda,\lambda^{-1}] = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}[\lambda,\lambda^{-1}]$. Elementi matričnega polinoma

$$L^{\mathbb{C}}(\lambda) = \begin{pmatrix} V^{\mathbb{C}}(\lambda) & W^{\mathbb{C}}(\lambda)\\ U^{\mathbb{C}}(\lambda) & -V^{\mathbb{C}}(\lambda)\end{pmatrix}$$

so Jacobijevi polinomi s kompleksnimi koeficienti:

$$\begin{aligned} U^{\mathbb{C}}(\lambda) &= A(\lambda)\sum_{j=1}^{n+1}\frac{Q_j^2}{\lambda-a_j} \\ V^{\mathbb{C}}(\lambda) &= A(\lambda)\sum_{j=1}^{n+1}\frac{-Q_jP_j}{\lambda-a_j} \\ W^{\mathbb{C}}(\lambda) &= A(\lambda)\Big(-1+\sum_{j=1}^{n+1}\frac{-P_j^2}{\lambda-a_j}\Big)\,. \end{aligned}$$

Če je spektralna krivulja $\mathcal{C}_h$, ki je podana z enačbo $\mu^2 = U^{\mathbb{C}}(\lambda)W^{\mathbb{C}}(\lambda) + (V^{\mathbb{C}}(\lambda))^2$, gladka, je nivojska množica momentne preslikave (prvih integralov sistema) izomorfna $\mathrm{Jac}(\mathcal{C}_h)\setminus\Theta$, pri čemer je Θ theta delitelj. Dokaz je v [23] in ga bomo predstavili v podpoglavju Mumfordov sistem Poglavja 6. V isti monografiji je tudi dokazno, da so povezane komponente regularne nivojske množice momentne preslikave (1.5) Neumannovega sistema izomorfne torusu T^n. Iz konstrukcije dokaza lahko poleg geometrije povezanih komponent nivojske množice dobimo tudi število povezanih komponent (glej opis v [10]).

Vemo, da ima kompleksna kvadrika

$$(S^n)^{\mathbb{C}} = \big\{Q=(Q_1,\ldots,Q_{n+1})\in\mathbb{C}^{n+1}\;\big|\;|Q|^2_{\mathbb{C}}=1\big\}$$

$n+1$ realnih struktur, ki so parametrizirane s signaturo. Ena od realnih struktur je sfera $S^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$, ostale pa so hiperboloidi

$$\mathcal{H}^n_k = \big\{q=(q_1,\ldots,q_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}\;\big|\;\sum_{j=1}^{n+1}\epsilon_j q_j^2 = 1\big\}\subset\mathbb{R}^{n+1}$$

za $k=1,\ldots,n$, pri čemer je

$$\epsilon_j = \left\{\begin{array}{rl} 1 & ;\ j\le k \\ -1 & ;\ j>k\,. \end{array}\right.$$

Opomba 3 *Velja* $\mathcal{H}^n_{n+1} = S^n$.

Kompleksen Neumannov sistem pa ima več kot $n+1$ realnih struktur. Ker so konstante vzmeti urejene $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}$, realne forme kompleksnega Neumannovega sistema z isto signaturo ter z različnimi zaporedji $+$ in $-$ niso nujno ekvivalentne. Zato bomo natančno definirali vse realne forme Neumannovega sistema. Naj bo $\mathcal{S}\subseteq\{1,2,\ldots,n+1\}$ poljubna podmnožica in naj bo

$$\epsilon_{\mathcal{S},j} = \left\{\begin{array}{rl} 1 & ;\ j\in\mathcal{S} \\ -1 & ;\ j\in\{1,2,\ldots,n+1\}\setminus\mathcal{S}=\mathcal{S}^{\mathsf{c}}\,. \end{array}\right.$$

Označimo z $J_{\mathcal{S}}$ diagonalno matriko, katere diagonalni elementi so

$$(J_{\mathcal{S}})_{jj} = \epsilon_{\mathcal{S},j}\,.$$

Označimo z $\langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{S}}$ psevdo-evklidski produkt, to je $\langle q,p\rangle_{\mathcal{S}} := \sum_{j=1}^{n+1}\epsilon_{\mathcal{S},j}q_jp_j = \langle q, J_{\mathcal{S}}p\rangle$, ter definirajmo z $|q|^2_{\mathcal{S}} := \langle q,q\rangle_{\mathcal{S}}$ indefinitno psevdo-evklidsko metriko. Naj bo dan antiholomofen involutiven avtomorfizem

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{S}}: T^*\mathbb{C}^{n+1} &\longrightarrow T^*\mathbb{C}^{n+1} \\ (Q,P) &\longmapsto (J_{\mathcal{S}}\overline{Q}, J_{\mathcal{S}}\overline{P})\,. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Realna forma kompleksnega Neumannovega sistema $(T^*(S^n)^{\mathbb{C}}, \omega^{\mathbb{C}}, H^{\mathbb{C}})$ glede na involucijo $\tau_{\mathcal{S}}$ je realen Hamiltonov sistem $(T^*\mathcal{H}^n_{\mathcal{S}}, \omega_{\mathcal{S}}, H_{\mathcal{S}})$. Pri tem je $T^*\mathcal{H}^n_{\mathcal{S}}$ kotangentni sveženj nad hiperboloidom

$$\mathcal{H}^n_{\mathcal{S}} = \{q \in \mathbb{R}^{n+1} \Big| \sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},j} q_j^2 = 1\}\,,$$

simplektična forma je $\omega_{\mathcal{S}} = \sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},j} dq_j \wedge dp_j$, Hamiltonjan pa je funkcija s predpisom

$$H_{\mathcal{S}}(q,p) = \frac{1}{2}\Big(|q|^2_{\mathcal{S}}|p|^2_{\mathcal{S}} - \langle q,p\rangle^2_{\mathcal{S}}\Big) + \frac{1}{2}\big(2 - |q|^2_{\mathcal{S}}\big)\langle q, Aq\rangle_{\mathcal{S}}\,.$$

V posebnih primerih, ko je ali $\mathcal{S} = \{1,\ldots,k\}$ za poljuben $k \in \{1,\ldots,n+1\}$ ali pa je $\mathcal{S}$ singleton $\mathcal{S} = \{k\}$ za poljuben $k \in \{2,\ldots,n+1\}$, bomo realne forme označili z

$$(T^*\mathcal{H}^n_k, \omega_k, H_k) \quad \text{in} \quad (T^*\mathcal{H}^n_{\{k\}}, \omega_{\{k\}}, H_{\{k\}})\,.$$

Prva glavna naloga disertacije je pokazati, da so realne forme $(T^*\mathcal{H}^n_{\mathcal{S}}, \omega_{\mathcal{S}}, H_{\mathcal{S}})$ kompleksnega Neumannovega sistema popolnoma Liouvilleovo integrabilni Hamiltonovi sistemi in poiskati njihove prve integrale. Druga pa je opisati geometrijo nivojskih množic momentne preslikave dveh družin novih realnih Hamiltonovih sistemov $(T^*\mathcal{H}^n_k, \omega_k, H_k)$ in $(T^*\mathcal{H}^n_{\{k\}}, \omega_{\{k\}}, H_{\{k\}})$. Pokazali bomo naslednja dva izreka:

Izrek 4 *Povezane komponente regularne nivojske množice momentne preslikave Hamiltonovega sistema* $(T^*\mathcal{H}^n_k, \omega_k, H_k)$ *za* $k = 1, 2, \ldots, n+1$ *so torusi* $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$.

in

Izrek 5 *Povezane komponente regularne nivojske množice momentne preslikave Hamiltonovega sistema* $(T^*\mathcal{H}^n_{\{k\}}, \omega_{\{k\}}, H_{\{k\}})$ *za* $k = 2, \ldots, n+1$ *so nekompaktne množice* $T^{n-1} \times \mathbb{R} = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{(n-1)-krat} \times \mathbb{R}$.

Opomba 6 *Povezano komponento regularne nivojske množice momentne preslikave krajše imenujemo Arnold-Liouvilleova množica (Arnold-Liouvilleov izrek).*

V disertaciji natanko določimo topologijo regularnih nivojskih množic le za omenjeni družini realnih form. V obeh primerih je topologija neodvisna od lege regularne vrednosti momentne preslikave v bifurkacijskem diagramu. V Primeru 76 vidimo, da za splošno realno formo iz danih parametrov, to je konstant vzmeti $a_1, \ldots, a_{n+1}$ in ničel polinoma $U_{\mathcal{S}}$, ne moremo sklepati na topologijo Arnold-Liouvilleovih množic. Za tak primer in podobne primere potrebujemo dodatno in natančnejšo analizo za določitev topologije Arnold-Liouvilleovih množic.

Sfera S^n je primer simetričnega prostora. Sisteme, ki so podobni Neumannovemu sistemu, lahko konstruiramo na splošnejših simetričnih prostorih (glej [6], [29], [30]). Pri takih konstrukcijah je bistvena uporaba realnih struktur. V prihodnje bi bilo zato smiselno študirati topologijo Arnold-Liouvilleovih množic takih in sorodnih sistemov. In morda nekatere lastnosti (posplošene) Maxwell-Blochove enačbe, ki jo lahko interpretiramo kot verigo Neumannovih sistemov (glej [31])?

Pri študiju Arnold-Liouvilleovih množic realnih form kompleksnega Neumannovega sistema smo opazili nove koordinate na enakoosnih hiperboloidih. Poimenovali smo jih konično-hiperboloidne koordinate. Definirane so v naslednjem poglavju. V tretjem poglavju natančno definiramo kompleksifikacijo in realne forme v ambientnem prostoru, na kosimplektični podmnogoterosti ter kompleksifikacijo in realne forme Hamiltonovega sistema z vezmi. Pokažemo, da lahko za neko družino kompleksnih analitičnih funkcij na $T^*\mathbb{C}^{n+1}$ enostavno izračunamo realne forme glede na involucijo $\tau_{\mathcal{S}}$. V četrtem poglavju zapišemo Laxovo enačbo za realno formo kompleksnega Neumannovega sistema in pokažemo, da so realne forme popolnoma Liouvilleovo integrabilni sistemi. Za Neumannov sistem obstajata dve Laxovi enačbi in posledično dve družini prvih integralov. Na koncu četrtega poglavja je podana in dokazana zveza med obema družinama integralov. Peto poglavje je povzetek obsežnih člankov [1], [2], [16]. Avtorji z uporabo izreka Adlerja, Kostanta in Symesa na zančni Liejevi algebri

$$\mathfrak{g} = \widetilde{\mathfrak{gl}}(r, \mathbb{C}) = \widetilde{\mathfrak{gl}}(r, \mathbb{C})^{+} \oplus \widetilde{\mathfrak{gl}}(r, \mathbb{C})^{-}$$

za ad^*-invariante funkcije na $(\widetilde{\mathfrak{gl}}(r, \mathbb{C})^{+})^* \cong \lambda\widetilde{\mathfrak{gl}}(r, \mathbb{C})^{-}$ skonstruirajo pripadajoče Laxove enačbe in tem prirejene Hamiltonove sisteme. V zelo posebnem primeru ($r = 2$) ter z redukcijo problema na podalgebro $\widetilde{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{R})$ dobimo Laxovo enačbo, ki opisuje izospektralni tok Neumannovega sistema. V Poglavju 6 ponovimo nekaj znanih definicij in rezultatov iz algebraične geometrije. Cilj poglavja je opisati množico $\mathrm{Jac}\mathcal{C} \setminus \Theta$ kot posebno množico deliteljev. Za Mumfordov sistem je $\mathrm{Jac}\mathcal{C} \setminus \Theta$ izomorfna nivojski množici momentne preslikave. V Poglavju 7 dokažemo Izrek 4 in Izrek 5. V Poglavju 8 ponovimo rezultate disertacije in predlagamo teme za nadaljni študij.

Poglavje 2

Eliptično-sferične in konično-hiperboloidne koordinate

Spomnimo se definicije eliptičnih koordinat v prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$ in definicije Jacobijevih eliptično-sferičnih koordinat (nekateri avtorji uporabljajo izraz sfero-konične koordinate) na sferi S^n. Eliptičo-sferične koordinate na S^2 je uporabil Carl Neumann v [24]. V [7] so le te definirane kot limitni primer eliptičnih koordinat, ko je v limiti ena od eliptičnih koordinat enaka $\pm\infty$. Definicija eliptično-sferičnih koordinat na sferi S^n je navedena v [10], [22]. V tem poglavju definiramo konično-hiperboloidnihe koordinate na enakoosnih hiperboloidih. Pokažemo, da lahko na enem hiperboloidu obstaja več tipov konično hiperboloidnih koordinat. Njihov obstoj je odvisen od signature hiperboloida in urejenosti parametrov.

Označimo s $q_1, \ldots, q_{n+1}$ koordinate v prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$ in naj bodo dane urejene realne konstante

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} \,. \tag{2.1}$$

Definirajmo polinoma v spremenljivki λ:

$$A(\lambda) = \prod_{j=1}^{n+1}(\lambda - a_j) \qquad \text{in} \qquad U(\lambda) = A(\lambda)\sum_{j=1}^{n+1}\frac{q_j^2}{\lambda - a_j} \,. \tag{2.2}$$

Eliptične koordinate v $\mathbb{R}^{n+1}$ so koreni $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ enačbe

$$\sum_{j=1}^{n+1}\frac{q_j^2}{\lambda - a_j} + 1 = 0$$

oziroma, krajše pisano, enačbe $U(\lambda) + A(\lambda) = 0$.

Naj bo S^n n-dimenzionalna sfera $S^n = \{(q_1, \ldots, q_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1};\ \sum_{j=1}^{n+1} q_j^2 = 1\}$ in naj velja $\prod_{j=1}^{n+1} q_j \neq 0$.

Definicija 7 *Jacobijeve eliptično-sferične koordinate $u_1, \ldots, u_n$ na sferi S^n so rešitve enačbe*

$$\sum_{j=1}^{n+1}\frac{q_j^2}{\lambda - a_j} = 0 \,.$$

Pokažimo, da so eliptično-sferične koordinate dobro definirane. Koreni $u_1, \ldots, u_n$ zgornje enačbe so ničle polinoma $U(\lambda)$. Če pišemo polinom U v obliki

$$U(\lambda) = \sum_{j=1}^{n+1} q_j^2 \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n+1} (\lambda - a_l)\,,$$

je očitno, da je U moničen polinom stopnje n, saj je $\sum_{j=1}^{n+1} q_j^2 = 1$. Iz urejenosti konstant $a_1, \ldots, a_{n+1}$ (2.1) sledi, da je $\operatorname{sgn}(U(a_{n+1})) = 1$, $\operatorname{sgn}(U(a_n)) = -1, \ldots$, torej je v splošnem

$$\operatorname{sgn}(U(a_j)) = (-1)^{n+1-j}\,.$$

Potemtakem so vse ničle $u_1, \ldots, u_n$ polinoma U realne. Lega urejenih ničel $u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_n$ polinoma U je določena s konstantami a_j, to je

$$a_1 < u_1 < a_2 < u_2 < \ldots < a_n < u_n < a_{n+1}\,. \tag{2.3}$$

Zvezo med prvotnimi koordinatami q_j in eliptično sferičnimi koordinatami u_j lahko enostavno izračunamo, saj je izraz

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{q_j^2}{\lambda - a_j} = \frac{U(\lambda)}{A(\lambda)} = \frac{\prod_{j=1}^{n}(\lambda - u_j)}{\prod_{j=1}^{n+1}(\lambda - a_j)}$$

meromorfna funkcija spremenljivke λ z enostavnimi poli v točkah a_j (glej [10]). Koeficient q_j^2 je ostanek (residuum) funkcije $\frac{U(\lambda)}{A(\lambda)}$ v točki a_j. Tako lahko izrazimo kartezične koordinate q_j za $j = 1, \ldots, n+1$ z eliptično-sferičnimi iz enačbe

$$q_j^2 = \frac{U(a_j)}{A'(a_j)} = \frac{\prod_{l=1}^{n}(a_j - u_l)}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n+1}(a_j - a_l)}\,.$$

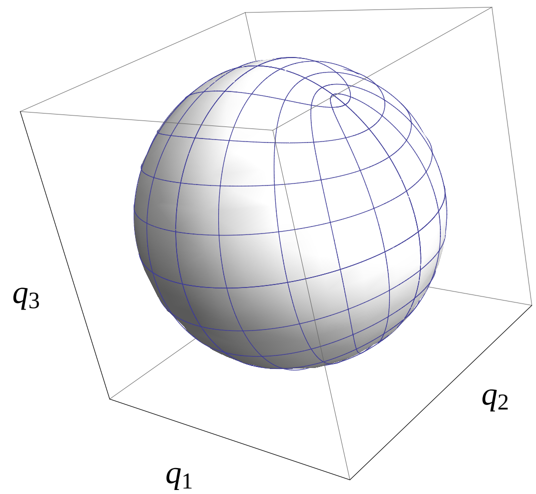
Iz zgornje enačbe vidimo, da potrebujemo 2^{n+1} kopij koordinat $u_1, \ldots, u_n$, da pokrijemo celotno sfero. Eliptično-sferični koordinatni sistem na sferi S^2 za dane konstante $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ in $a_3 = 4$ je prikazan na Sliki 2.1.

Opomba 8 *Funkcija f je meromorfna funkcija na odprti podmnožici $\Omega \in \mathbb{C}$, če obstaja taka podmnožica $A \subset \Omega$, da A nima limitne točke v Ω, funkcija f je holomorfna na $\Omega \setminus A$ in ima pol v vsaki točki iz množice A. Definicijo meromorfne funkcije najdemo v [28]. Meromorfno funkcijo f lahko v okolici pola $a \in A$ razvijemo v Laurentovo vrsto s končnim glavnim delom, to je*

$$f(z) = \sum_{j=-m}^{\infty} c_j (z-a)^j\,.$$

Koeficient c_{-1} se imenuje ostanek ali residuum funkcije f v točki a.

Izberimo poljuben $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ in naj bo $\epsilon_1 = \ldots = \epsilon_k = 1$ ter $\epsilon_{k+1} = \ldots = \epsilon_{n+1} = -1$.



Slika 2.1: Eliptično-sferični koordinatni sistem na sferi S^2 za $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ in $a_3 = 4$

Definicija 9 *Konično-hiperboloidne koordinate* $u_{k,1}, \ldots, u_{k,n}$ *na hiperboloidu* $\sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_j q_j^2 = 1$, *kjer je* $\prod_{j=1}^{n+1} q_j \neq 0$, *so rešitve enačbe*

$$\sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_j \frac{q_j^2}{\lambda - a_j} = 0 \,. \tag{2.4}$$

Opomba 10 *Za* $k = n+1$ *so* $u_{k,1}, \ldots, u_{k,n}$ *(iz zgornje definicije) eliptično-sferične koordinate na sferi* S^n.

Trditev 11 *Konično-hiperboloidne koordinate* $u_{k,1}, \ldots, u_{k,n}$ *na hiperboloidu* $\sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_j q_j^2 = 1$ *so dobro definirane. Če koordinate uredimo po velikosti* $u_{k,1} \leq \ldots \leq u_{k,n}$, *je*

$$a_1 < u_{k,1} < \ldots < a_{k-1} < u_{k,k-1} < a_k < a_{k+1} < u_{k,k} < \ldots < a_{n+1} < u_{k,n} \,. \tag{2.5}$$

Dokaz: Označimo z U_k moničen polinom stopnje n:

$$\begin{aligned} U_k(\lambda) := A(\lambda) \sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_j \frac{q_j^2}{\lambda - a_j} &= \sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_j q_j^2 \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n+1} (\lambda - a_l) = \\ &= \sum_{j=1}^{k} q_j^2 \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n+1} (\lambda - a_l) - \sum_{j=k+1}^{n+1} q_j^2 \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n+1} (\lambda - a_l) \,. \end{aligned}$$

Kot v sferičnem primeru so tudi v tem koreni enačbe (2.4) ničle polinoma U_k. Iz oblike polinoma lahko hitro preverimo, da je vrednost polinoma U_k v točkah $\lambda = a_k$ in $\lambda = a_{k+1}$ enako predznačena. Velja

$$\operatorname{sgn}(U_k(a_k)) = \operatorname{sgn}\Big(\epsilon_k q_k^2 \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (a_k - a_l)\Big) = 1 \cdot (-1)^{n+1-k} = (-1)^{n+1-k} \,,$$

saj je $\epsilon_k = 1$ in je v produktu $\prod_{l\neq k}(a_k - a_l)$ natanko $n+1-k$ negativnih faktorjev. V a_{k+1} pa je

$$\operatorname{sgn}(U_k(a_{k+1})) = \operatorname{sgn}\Big(\epsilon_{k+1} q_{k+1}^2 \prod_{\substack{l=1\\ l\neq k+1}}^{n+1} (a_{k+1} - a_l)\Big) = -1 \cdot (-1)^{n-k}\,,$$

saj je $\epsilon_{k+1} = -1$ in je v produktu $\prod_{l\neq k+1}(a_{k+1} - a_l)$ natanko $n+1-(k+1) = n-k$ negativnih faktorjev. V splošnem pa velja enakost

$$\operatorname{sgn}(U_k(a_j)) = \begin{cases} (-1)^{n+1-j} & ;\ j = 1, 2, \ldots, k \\ (-1)^{n-j} & ;\ j = k+1, \ldots, n+1\,. \end{cases}$$

Polinom U_k ima tako vsaj $k-1$ realnih ničel na intervalu (a_1, a_k) in vsaj $n-k$ realnih ničel na intervalu (a_{k+1}, a_{n+1}). Torej ima U_k vsaj $n-1$ ničel na intervalu (a_1, a_{n+1}). Ker je $\operatorname{sgn}(U_k(a_{n+1})) = (-1)^{n-n-1} = -1$ in je U_k moničen, torej je $U_k(\lambda) > 0$ za $\lambda >> 0$, obstaja še ena in hkrati zadnja realna ničla na intervalu (a_{n+1}, ∞). Če so $u_{k,1} < \ldots < u_{k,n}$ urejene ničle polinoma U_k, potem je

$$a_1 < u_{k,1} < \ldots < u_{k,k-1} < a_k < a_{k+1} < u_{k,k} < \ldots < a_n < u_{k,n-1} < a_{n+1} < u_{k,n}\,.$$

$\square$

Izraz

$$\sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_j \frac{q_j^2}{\lambda - a_j} = \frac{U_k(\lambda)}{A(\lambda)} = \frac{\prod_{j=1}^{n}(\lambda - u_{k,j})}{\prod_{j=1}^{n+1}(\lambda - a_j)}$$

je zopet meromorfna funkcija z enostavnimi poli v točkah a_j. Torej je koeficient q_j^2 residuum funkcije $\frac{U_k(\lambda)}{A(\lambda)}$ v točki a_j:

$$q_j^2 = \epsilon_j \frac{\prod_{l=1}^{n}(a_j - u_{k,l})}{\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n+1}(a_j - a_l)}\,.$$

Vprašanje: Naj bo $\mathcal{S}$ poljubna neprazna podmnožica množice $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ in naj bo

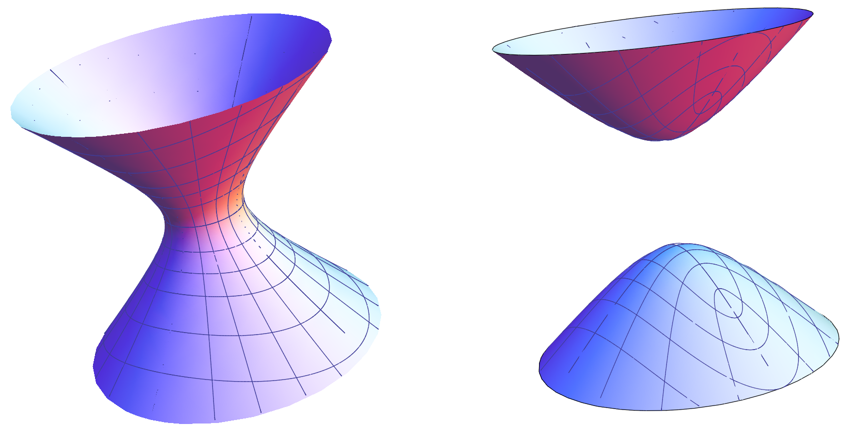
$$\epsilon_{\mathcal{S},j} = \begin{cases} 1 & ;\ j \in \mathcal{S} \\ -1 & ;\ j \in \mathcal{S}^{\mathsf{c}}\,. \end{cases}$$

Ali obstajajo konično-hiperboloidne koordinate $u_{\mathcal{S},1}, \ldots, u_{\mathcal{S},n}$ na hiperboloidu $\sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},j} q_j^2 = 1$ kot rešitve enačbe

$$\sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},j} \frac{q_j^2}{\lambda - a_j} = 0$$

za vsako neprazno podmnožico $\mathcal{S} \subset \{1, 2, \ldots, n+1\}$?

V naslednjih primerih bomo videli, da take realne koordinate ne obstajajo nujno za vsako podmnožico $\mathcal{S}$.



(a) Enodelni hiperboloid (b) Dvodelni hiperboloid

Slika 2.2: Konično-hiperboloidni koordinatni sistem na hiperboloidih za $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ in $a_3 = 4$

Zgoraj, v dokazu Trditve 11, smo definirali polinom U_k. Analogno naj bo $U_\mathcal{S}$ polinom oblike

$$
\begin{aligned}
U_\mathcal{S}(\lambda) := A(\lambda) \sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},j} \frac{q_j^2}{\lambda - a_j} &= \sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},j} q_j^2 \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n+1} (\lambda - a_l) = \\
&= \sum_{j \in \mathcal{S}} q_j^2 \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n+1} (\lambda - a_l) - \sum_{j \in \mathcal{S}^c} q_j^2 \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n+1} (\lambda - a_l) .
\end{aligned}
$$

Opomba 12 *Če je $\mathcal{S}$ prazna podmožica, je $\epsilon_{\mathcal{S},j} = -1$ za vsak $j = 1, 2, \ldots, n+1$. Tak realen hiperboloid $\sum_{j=1}^{n+1} -q_j^2 = 1$ pa ne obstaja.*

Primer 13 *Naj bodo (q_1, q_2, q_3) koordinate v $\mathbb{R}^3$ in $a_1 < a_2 < a_3$ urejene realne konstante. Za podmnožico $\mathcal{S} \subset \{1, 2, 3\}$ vzemimo $\mathcal{S} = \{2, 3\}$. Izbrana množica nam določa hiperboloid $\mathcal{H}^2_{\{2,3\}}$ z enačbo*

$$
-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 .
$$

Polinom $U_\mathcal{S}$ je v tem primeru $U_{\{2,3\}}(\lambda) = A(\lambda)\big(-\frac{q_1^2}{\lambda - a_1} + \frac{q_2^2}{\lambda - a_2} + \frac{q_3^2}{\lambda - a_3}\big)$, kjer je $A(\lambda) = (\lambda - a_1)(\lambda - a_2)(\lambda - a_3)$. Uredimo $U_{\{2,3\}}(\lambda)$:

$$
\begin{aligned}
U_{\{2,3\}}(\lambda) &= -(\lambda - a_2)(\lambda - a_3) q_1^2 + (\lambda - a_1)(\lambda - a_3) q_2^2 + (\lambda - a_1)(\lambda - a_2) q_3^2 = \\
&= \lambda^2 + \Big((a_2 + a_3) q_1^2 - (a_1 + a_3) q_2^2 - (a_1 + a_2) q_3^2\Big)\lambda - a_2 a_3 q_1^2 + a_1 a_3 q_2^2 + a_1 a_2 q_3^2 .
\end{aligned}
$$

Diskriminanta kvadratne funkcije $U_{\{2,3\}}$ je potem

$$\begin{aligned}
D &= \Big((a_2+a_3)q_1^2-(a_1+a_3)q_2^2-(a_1+a_2)q_3^2\Big)^2-4\big(-a_2a_3q_1^2+a_1a_3q_2^2+a_1a_2q_3^2\big)=\\
&= \Big((a_2+a_3)q_2^2+(a_2+a_3)q_3^2-(a_2+a_3)-(a_1+a_3)q_2^2-(a_1+a_2)q_3^2\Big)^2-\\
&\quad -4\big(-a_2a_3q_2^2-a_2a_3q_3^2+a_2a_3+a_1a_3q_2^2+a_1a_2q_3^2\big)=\\
&= 6\Big(-(a_2+a_3)-(a_2-a_1)q_2^2+(a_3-a_1)q_3^2\Big)^2-4\big(a_2a_3-a_3(a_2-a_1)q_2^2-a_2(a_3-a_1)q_3^2\big)=\\
&= (a_2+a_3)^2+(a_2-a_1)^2q_2^4+(a_3-a_1)^2q_3^4-2(a_2+a_3)(a_2-a_1)q_2^2-2(a_2+a_3)(a_3-a_1)q_3^2+\\
&\quad +2(a_2-a_1)(a_3-a_1)q_2^2q_3^2-4a_2a_3+4a_3(a_2-a_1)q_2^2+4a_2(a_3-a_1)q_3^2=\\
&= (a_3-a_2)^2+(a_2-a_1)^2q_2^4+(a_3-a_1)^2q_3^4+\\
&\quad +2(a_3-a_2)(a_2-a_1)q_2^2-2(a_3-a_2)(a_3-a_1)q_3^2+2(a_2-a_1)(a_3-a_1)q_2^2q_3^2=\\
&= \Big((a_3-a_2)+(a_2-a_1)q_2^2+(a_3-a_1)q_3^2\Big)^2-4(a_3-a_2)(a_3-a_1)q_3^2\,.
\end{aligned}$$

Radi bi pokazali, da je $D>0$ za vsako točko $(q_1,q_2,q_3)\in\mathcal{H}^2_{\{2,3\}}$. Ker so konstante vzmeti urejene, $a_1<a_2<a_3$, lahko pišemo $b_{ij}^2=a_i-a_j$ za $i>j$. Potem je

$$\begin{aligned}
D &= \big(b_{32}^2+b_{21}^2q_2^2+b_{31}^2q_3^2\big)^2-4b_{32}^2b_{31}^2q_3^2=\\
&= (b_{32}^2+b_{21}^2q_2^2+b_{31}^2q_3^2-2b_{32}b_{31}q_3)(b_{32}^2+b_{21}^2q_2^2+b_{31}^2q_3^2+2b_{32}b_{31}q_3)
\end{aligned}$$

Ker želimo pokazati, da je $D>0$ pri poljubni izbiri parametrov $q_2,q_3,b_{21},b_{31},b_{32}$, je dovolj pokazati, da je

$$b_{32}^2+b_{21}^2q_2^2+b_{31}^2q_3^2>2b_{32}b_{31}q_3\,. \tag{2.6}$$

za poljubne $q_2,q_3,b_{21},b_{31},b_{32}$. Ker je leva stran neenakosti vedno pozitivna, neenakost (2.6) velja, če je

$$(b_{32}^2+b_{21}^2q_2^2+b_{31}^2q_3^2)^2\ >\ 4b_{32}^2b_{31}^2q_3^2\,. \tag{2.7}$$

To je ekvivalentno naslednjim neenakostim

$$\begin{aligned}
(b_{32}^2+b_{21}^2q_2^2+b_{31}^2q_3^2)^2-4b_{32}^2b_{31}^2q_3^2 &> 0\\
b_{32}^4+b_{21}^4q_2^4+b_{31}^4q_3^4+2b_{32}^2b_{21}^2q_2^2+\underline{\underline{2b_{32}^2b_{31}^2q_3^2}}+2b_{21}^2b_{31}^2q_2^2q_3^2-\underline{\underline{4b_{32}^2b_{31}^2q_3^2}} &> 0\\
\underline{b_{32}^4}+b_{21}^4q_2^4+\underline{b_{31}^4q_3^4}+2b_{32}^2b_{21}^2q_2^2+2b_{21}^2b_{31}^2q_2^2q_3^2-\underline{2b_{32}^2b_{31}^2q_3^2} &> 0\\
(b_{32}^2-b_{31}^2q_3^2)^2+b_{21}^4q_2^4+2b_{32}^2b_{21}^2q_2^2+2b_{21}^2b_{31}^2q_2^2q_3^2 &> 0\,.
\end{aligned}$$

Zadnja neenakost pa velja pri poljubni izbiri parametrov. Polinom $U_{\{2,3\}}$ ima realni ničli in konično-hiperboloidne koordinate obstajajo.

Oglejmo si še primer, ko konično-hiperboloidne koordinate ne obstajajo nujno.

Primer 14 *Naj bodo (q_1,q_2,q_3) koordinate v $\mathbb{R}^3$ in $a_1<a_2<a_3$ urejene realne konstante. Za podmnožico $\mathcal{S}\subset\{1,2,3\}$ vzemimo $\mathcal{S}=\{1,3\}$. Podmnožica $\mathcal{S}=\{1,3\}$ določa hiperboloid $q_1^2-q_2^2+q_3^2=1$ in polinom $U_{\{1,3\}}(\lambda)=A(\lambda)(\frac{q_1^2}{\lambda-a_1}-\frac{q_2^2}{\lambda-a_2}+\frac{q_3^2}{\lambda-a_3})$, kjer je $A(\lambda)=(\lambda-a_1)(\lambda-a_2)(\lambda-a_3)$. Uredimo $U_{\{1,3\}}$ po padajočih stopnjah spremenljivke λ:*

$$\begin{aligned}
U_{\{1,3\}}(\lambda) &= (\lambda-a_2)(\lambda-a_3)q_1^2-(\lambda-a_1)(\lambda-a_3)q_2^2+(\lambda-a_1)(\lambda-a_2)q_3^2=\\
&= (q_1^2-q_2^2+q_3^2)\lambda^2+\Big(-(a_2+a_3)q_1^2+(a_1+a_3)q_2^2-(a_1+a_2)q_3^2\Big)\lambda+a_2a_3q_1^2-a_1a_3q_2^2+a_1a_2q_3^2=\\
&= \lambda^2+\Big(-(a_2+a_3)q_1^2+(a_1+a_3)q_2^2-(a_1+a_2)q_3^2\Big)\lambda+a_2a_3q_1^2-a_1a_3q_2^2+a_1a_2q_3^2\,.
\end{aligned}$$

Diskriminanta kvadratne funkcije $U_{\{1,3\}}$ je potem (uporabimo zvezo $q_2^2 = q_1^2 + q_3^2 - 1$ in poračunamo)

$$
\begin{aligned}
D &= \Big(-(a_2+a_3)q_1^2 + (a_1+a_3)q_2^2 - (a_1+a_2)q_3^2\Big)^2 - 4\big(a_2a_3q_1^2 - a_1a_3q_2^2 + a_1a_2q_3^2\big) = \\
&= \Big(-(a_2+a_3)q_1^2 + (a_1+a_3)q_1^2 + (a_1+a_3)q_3^2 - (a_1+a_3) - (a_1+a_2)q_3^2\Big)^2 - \\
&\quad -4\big(a_2a_3q_1^2 - a_1a_3q_1^2 - a_1a_3q_3^2 + a_1a_3 + a_1a_2q_3^2\big) = \\
&= \Big(-(a_1+a_3) - (a_2-a_1)q_1^2 + (a_3-a_2)q_3^2\Big)^2 - 4\big(a_1a_3 + a_3(a_2-a_1)q_1^2 - a_1(a_3-a_2)q_3^2\big) = \\
&= (a_1+a_3)^2 + (a_2-a_1)^2q_1^4 + (a_3-a_2)^2q_3^4 + 2(a_1+a_3)(a_2-a_1)q_1^2 - 2(a_1+a_3)(a_3-a_2)q_3^2 - \\
&\quad -2(a_2-a_1)(a_3-a_2)q_1^2q_3^2 - 4a_1a_3 - 4a_3(a_2-a_1)q_1^2 + 4a_1(a_3-a_2)q_3^2 = \\
&= (a_3-a_1)^2 + (a_2-a_1)^2q_1^4 + (a_3-a_2)^2q_3^4 - \\
&\quad -2(a_3-a_1)(a_2-a_1)q_1^2 - 2(a_3-a_1)(a_3-a_2)q_3^2 - 2(a_2-a_1)(a_3-a_2)q_1^2q_3^2 = \\
&= \Big(-(a_3-a_1) - (a_2-a_1)q_1^2 + (a_3-a_2)q_3^2\Big)^2 - 4(a_2-a_1)(a_3-a_1)q_1^2\,.
\end{aligned}
$$

Zanima nas predznak diskriminante D. Če za konstante a_1, a_2 in a_3 vzamemo $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ in $a_3 = 3$, je diskriminanta enaka $D = (-2 - q_1^2 + q_3^2)^2 - 8q_1^2$. V točki $(q_1, q_2, q_3) = (1, 1, 1)$ je očitno $D < 0$. Pri tem ni težko najti točke (q_1, q_2, q_3) na hiperboloidu, da bo diskriminanta pozitivna. Če fiksiramo $q_1 = 1$, potem je $D = (-3 + q_3^2)^2 - 8$. V točki $(1, 3, 3)$ na hiperboloidu $q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 = 1$ je potem $D = (-3 + 9)^2 - 8 > 0$.
Na hiperboloidu $q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 = 1$ v okolici točke $(1, 1, 1)$ konično-hiperbloidne koordinate ne obstajajo. V neki okolici točke $(1, 3, 3)$ pa obstajajo.

Obstaja pa taka podmnožica $\widetilde{\mathcal{S}}$ potenčne množice $\mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, n+1\})$, da ima enačba

$$\sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},j} \frac{q_j^2}{\lambda - a_j} = 0 \qquad \text{za vsak} \quad \mathcal{S} \in \widetilde{\mathcal{S}}$$

le realne rešitve.

Naj bo

$$\widetilde{\mathcal{S}} := \{\{m, m+1, \ldots, k\};\ m \in \{1, 2, \ldots, n+1\} \text{ in } k \in \{m, m+1, \ldots, n+1\}\}\,. \tag{2.8}$$

Kot zgoraj naj bo za poljuben $\mathcal{S} \in \widetilde{\mathcal{S}}$

$$\epsilon_{\mathcal{S},j} = \begin{cases} 1 & ;\ \text{če je } j \in \mathcal{S} \\ -1 & ;\ \text{če je } j \in \{1, 2, \ldots, n+1\} \backslash \mathcal{S}\,. \end{cases}$$

Trditev 15 *Če je $\mathcal{S} \in \widetilde{\mathcal{S}}$ in velja $\sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},j} q_j^2 = 1$ ter je $\prod_{j=1}^{n+1} q_j \neq 0$, ima enačba*

$$\sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},j} \frac{q_j^2}{\lambda - a_j} = 0 \tag{2.9}$$

n realnih rešitev $u_1, \ldots, u_n$. Koreni enačbe $u_1, \ldots, u_n$ so glede na parametre $a_1, \ldots, a_{n+1}$ urejeni:

1. *če je $m=1$, je $\mathcal{S}=\{1,\ldots,k\}$ in velja*
$$a_1 < u_1 < \ldots < u_{k-1} < a_k < a_{k+1} < u_k < \ldots < a_n < u_{n-1} < a_{n+1} < u_n \,. \tag{2.10}$$

2. *če je $m=2,\ldots,n$ in $k=m$, je $\mathcal{S}$ singleton $\mathcal{S}=\{k\}$ za $k=2,\ldots,n$ in velja*
$$\begin{aligned} u_1 < a_1 < u_2 < a_2 < \;\ldots\; < u_{k-1} < a_{k-1} < a_k < a_{k+1} < u_k < a_{k+2} < u_{k+1} < \ldots \\ \ldots\; < a_n < u_{n-1} < a_{n+1} < u_n \,. \end{aligned} \tag{2.11}$$

3. *če je $k=m=n+1$, je $\mathcal{S}=\{n+1\}$ in*
$$u_1 < a_1 < u_2 < a_2 < \ldots < u_{n-1} < a_{n-1} < u_n < a_n < a_{n+1}$$

4. *če je $m=2,\ldots,n$ in $k=m+1,\ldots,n$:*
$$\begin{aligned} u_1 < a_1 < \;\ldots\; < u_{m-1} < a_{m-1} < a_m < u_m < a_{m+1} < u_{m+1} < \ldots \\ \ldots\; < u_{k-1} < a_k < a_{k+1} < u_k < a_{k+2} < u_{k+1} < \ldots < u_{n-1} < a_{n+1} < u_n \,. \end{aligned}$$

5. *če je $m=2,\ldots,n$ and $k=n+1$:*
$$u_1 < a_1 < \ldots < u_{m-1} < a_{m-1} < a_m < u_m < a_{m+1} < u_{m+1} < \ldots < u_{n-1} < a_n < u_n < a_{n+1} \,.$$

Dokaz:

1. neenakost (2.10) smo že pokazali v dokazu Trditve 11.

2. primer singletona $\mathcal{S}=\{1\}$ je vsebovan v prejšnji točki trditve. Za singleton $\mathcal{S}=\{k\}$, kjer je $k\in\{2,\ldots,n\}$, so koreni enačbe (2.9) ničle polinoma
$$U_{\{k\}}(\lambda) = -\sum_{j=1}^{k-1} q_j^2 \prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n+1}(\lambda-a_l) + q_k^2 \prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n+1}(\lambda-a_l) - \sum_{j=k+1}^{n+1} q_j^2 \prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n+1}(\lambda-a_l) \,.$$
Hitro opazimo, da je $\operatorname{sgn}(U_{\{k\}}(a_{k-1})) = \operatorname{sgn}(U_{\{k\}}(a_k)) = \operatorname{sgn}(U_{\{k\}}(a_{k+1}))$. Poleg tega je predznak polinoma $U_{\{k\}}$ v a_j enak
$$\operatorname{sgn}(U_{\{k\}}(a_j)) = \begin{cases} (-1)^{n-j} & ;\ \text{če } j\neq k \\ (-1)^{n-j-1} = (-1)^{n-k-1} & ;\ \text{če } j = k \end{cases} .$$
Zato ima polinom $U_{\{k\}}$ vsaj $k-2$ realnih ničel na intervalu (a_1, a_{k-1}) in vsaj $n-k$ realnih ničel na intervalu (a_{k+1}, a_{n+1}). Torej ima $U_{\{k\}}$ vsaj $n-2$ realnih ničel na intervalu (a_1, a_{n+1}). Ker je $\operatorname{sgn}(U_{\{k\}}(a_{n+1})) = -1$ in je $U_{\{k\}}$ moničen, obstaja realna ničla na untervalu (a_{n+1},∞). Predznak vrednosti polinoma $U_{\{k\}}$ v a_1 je $\operatorname{sgn}(U_{\{k\}}(a_1)) = (-1)^{n-1}$. Ker pa je $U_{\{k\}}$ moničen stopnje n, je $\operatorname{sgn}(U_{\{k\}}(\lambda)) = (-1)^n$ za $\lambda << 0$. Torej je na intervalu $(-\infty, a_1)$ še ena (in hkrati zadnja) ničla in neenakost (2.11) velja.

3. če je $\mathcal{S} = \{n+1\}$, nas zanimajo ničle polinoma

$$U_{\{n+1\}}(\lambda) = -\sum_{j=1}^{n} q_j^2 \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{n+1} (\lambda - a_l) + q_{n+1}^2 \prod_{l=1}^{n} (\lambda - a_l)\,.$$

   Predznaka polinoma $U_{\{n+1\}}$ se v vrednostih $\lambda = a_n$ in $\lambda = a_{n+1}$ ujemata, to je $\mathrm{sgn}(U_{\{n+1\}}(a_n)) = \mathrm{sgn}(U_{\{n+1\}}(a_{n+1}))$. Splošno velja:

$$\mathrm{sgn}(U_{\{n+1\}}(a_j)) = \begin{cases} (-1)^{n-j} & ;\ \text{če } j = 1, \ldots, n \\ 1 & ;\ \text{če } j = n+1 \end{cases}.$$

   Zato ima polinom $U_{\{n+1\}}$ vsaj $n-1$ ničel na intervalu (a_1, a_n). Ker pa je $\mathrm{sgn}(U_{\{n+1\}}(a_1)) = (-1)^{n-1}$ za moničen polinom $U_{\{n+1\}}$ stopnje n, obstaje še ena (in hkrati zadnja) ničla na intervalu $(-\infty, a_1)$.

4. v tem primeru je $\mathcal{S} = \{m, m+1, \ldots, k\}$, kjer je $m \geq 2$ in $\mathcal{S}$ ni singleton. Koreni enačbe (2.9) so ničle polinoma

$$U_{\{m,\ldots,k\}}(\lambda) = -\sum_{j=1}^{m-1} q_j^2 \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{n+1} (\lambda - a_l) + \sum_{j=m}^{k} q_j^2 \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{n+1} (\lambda - a_l) - \sum_{j=k+1}^{n+1} q_j^2 \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{n+1} (\lambda - a_l)\,.$$

   Za $m = 2, \ldots, n$ in $k = m+1, \ldots, n$ velja

$$\mathrm{sgn}(U_{\{m,\ldots,k\}}(a_j)) = \begin{cases} (-1)^{n-j-1} & ;\ \text{če } j = m, \ldots, k \\ (-1)^{n-j} & ;\ \text{če } j = 1, \ldots, m-1 \ \text{ ali } \ j = k+1, \ldots, n+1 \end{cases}. \tag{2.12}$$

   Polinom $U_{\{m,\ldots,k\}}$ ima
   - $m-2$ ničel na intervalu (a_1, a_{m-1}),
   - $k-m$ ničel ne intervalu (a_m, a_k) in
   - $n-k$ ničel na (a_{k+1}, a_{n+1}).

   Torej ima $n-2$ realnih ničel na intervalu (a_1, a_{n+1}). Ker je polinom $U_{\{m,\ldots,k\}}$ moničen in je $\mathrm{sgn}(U_{\{m,\ldots,k\}}(a_{n+1})) = -1$, obstaja še ena ničla polinoma na intervalu (a_{n+1}, ∞). Iz (2.12) vidimo, da je $\mathrm{sgn}(U_{\{m,\ldots,k\}}(a_1)) = (-1)^{n-1}$, polinom $U_{\{m,\ldots,k\}}$ pa je moničen stopnje n, torej mora veljati $\mathrm{sgn}(U_{\{m,\ldots,k\}}(\lambda)) = (-1)^n$ za $\lambda << 0$. Zato ima $U_{\{m,\ldots,k\}}$ še eno (in hkrati zadnjo) ničlo na intervalu $(-\infty, a_1)$.

5. če je $\mathcal{S} = \{m, \ldots, n+1\}$ za $m = 2, \ldots, n$, je polinom $U_{\mathcal{S}}$ enak

$$U_{\{m,\ldots,n+1\}}(\lambda) = -\sum_{j=1}^{m-1} q_j^2 \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{n+1} (\lambda - a_l) + \sum_{j=m}^{n+1} q_j^2 \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{n+1} (\lambda - a_l)\,.$$

   Predznaka polinoma se v vrednostih $\lambda = a_{m-1}$ in $\lambda = a_m$ ujemata in velja

$$\mathrm{sgn}(U_{\{m,\ldots,n+1\}}(a_j)) = \begin{cases} (-1)^{n+1-j} & ;\ \text{če } j \geq m \\ (-1)^{n-j} & ;\ \text{če } j < m \end{cases}. \tag{2.13}$$

   Polinom $U_{\{m,\ldots,n+1\}}$ ima $m-2$ ničel na intervalu (a_1, a_{m-1}) in $n-(m-1) = n-m+1$ ničel na intervalu (a_m, a_{n+1}). Torej ima $n-1$ realnih ničel na intervalu (a_1, a_{n+1}). Kot v prejšnjem primeru je tudi v tem $\operatorname{sgn}(U_{\{m,\dots,n+1\}}(a_1)) = (-1)^{n-1}$. Polinom $U_{\{m,\dots,n+1\}}$ pa je moničen stopnje n, zato je $\operatorname{sgn}(U_{\{m,\dots,n+1\}}(\lambda) = (-1)^n$ za $\lambda << 0$. Torej ima $U_{\{m,\dots,n+1\}}$ še eno (in hkrati zadnjo) ničlo na intervalu $(-\infty, a_1)$.

□

Sedaj lahko razširimo definicijo konično-hiperboloidnih koordinat na hiperboloide $\sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},j} q_j^2 = 1$, kjer je $\mathcal{S} \in \widetilde{\mathcal{S}}$ in velja $\prod_{j=1}^{n+1} q_j \neq 0$.

Definicija 16 *Za poljubno podmnožico*

$$\mathcal{S} \in \widetilde{\mathcal{S}} = \{\{m, m+1, \dots, k\};\ m \in \{1, 2, \dots, n+1\} \textit{ in } k \in \{m, m+1, \dots, n+1\}\}$$

so koreni $u_{\mathcal{S},1}, \dots, u_{\mathcal{S},n}$ enačbe

$$\sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},j} \frac{q_j^2}{\lambda - a_j} = 0$$

konično-hiperboloidne koordinate na hiperboloidu $\sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},j} q_j^2 = 1$.

Primer 17 *V Primeru 14 je*

$$U_{\{1,3\}}(\lambda) = q_1^2(\lambda - a_2)(\lambda - a_3) - q_2^2(\lambda - a_1)(\lambda - a_3) + q_3^2(\lambda - a_1)(\lambda - a_2)\,.$$

Zato je

$$\operatorname{sgn}(U_{\{1,3\}}(a_1)) = 1, \qquad \operatorname{sgn}(U_{\{1,3\}}(a_2)) = 1 \qquad \textit{in} \qquad \operatorname{sgn}(U_{\{1,3\}}(a_3) = 1\,.$$

Za ničli u_1, u_2 polinoma $U_{\{1,3\}}$ velja ena od možnosti:
- $u_1, u_2 \notin \mathbb{R}$,
- $u_1, u_2 \in (-\infty, a_1)$ *ali* $u_1, u_2 \in (a_3, \infty)$,
- $u_1, u_2 \in (a_j, a_{j+1})$; $j = 1, 2$.

Opomba 18 *V zgornji trditvi so pozitivno predznačeni členi $1 \cdot q_j^2$ v vsoti oziroma polinomu*

$$\sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},j} q_j^2 \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n+1} (\lambda - a_l) = U_{\mathcal{S}}(\lambda)$$

vedno indeksirani zaporedno. Ločili smo primere, ko so le ti pisani na začetku vsote (za $j = 1, 2, \dots, k$), na koncu vsote (za $j = m, m+1, \dots, n+1$) ali pa vmes (za $j = m, m+1, \dots, k$). Če pa se med dvema pozitivno predznačenima členoma vrine vsaj en negativno predznačen člen, pa iz splošne oblike polinoma $U_{\mathcal{S}}$ ne moremo sklepati o realnosti/kompleksnosti in legi vsaj dveh ničel polinoma $U_{\mathcal{S}}$. Glej primera 14 in 17.

Poglavje 3

Kompleksifikacija in realne forme

V tem poglavju definiramo Hamiltonove sisteme na hiperboloidih, ki so realne forme kompleksnega Neumannovega sistema. Hamiltonove sisteme $(T^*\mathbb{R}^N, \omega, H)$ lahko kompleksificiramo na več načinov. Nekaj tipov kompleksifikacij za $N = 1$ najdemo v [20]. Za poljubno naravno število N lahko za kompleksifikacijo sistema vzamemo

1. kompleksificiramo le potencialno funkcijo $V(q)$ v Hamiltonjanu $H(q,p) = T(q,p) + V(q)$. Potencialna funkcija je potem kompleksna funkcija $V(Q) = V_0(Q) + iV_1(Q)$.

2. vsaka ravnina (q_j, p_j) za $j = 1, \ldots, N$ postane kompleksna ravnina, to je
$$z_j = p_j + i\omega_j q_j$$
za neko realno konstanto ω_j in je zato
$$\overline{z}_j = p_j - i\omega_j q_j \, .$$

3. vsaka od spremenljivk q_j and p_j postane kompleksna spremenljivka:
$$q_j = q_{j,0} + iq_{j,1} \qquad \text{in} \qquad p_j = p_{j,0} + ip_{j,1} \tag{3.1}$$
ali
$$q_j = q_{j,0} + ip_{j,1} \qquad \text{in} \qquad p_j = p_{j,0} + iq_{j,1} \, .$$

Primer 19 *Če Neumannov sistem kompleksificiramo tako, da vsaka od ravnin (q_j, p_j) postane kompleksna ravnina*
$$z_j = p_j + i\sqrt{a_j} q_j \, ,$$
je Hamiltonova funkcija kompleksnega sistema
$$H(z, \overline{z}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} |z_j|^2 \, ,$$
pri čemer je $|z_j|^2 = z_j \overline{z}_j$.

V zgornjem primeru vidimo, da s kompleksifikacijo drugega tipa Neumannovega sistema dobimo zelo enostavno obliko Hamiltonove funkcije, ki pa ni analitična. Poleg tega bi s kompleksifikacijo radi ohranili obliko Hamiltonovega sistema enačb. Zato uporabimo kompleksifikacijo tretjega tipa v obliki (3.1). Tak način kompleksifikacije na simplektičnih $2N$ dimenzionalnih vektorskih prostorih je opisan v [13]. Ker mi za $2N$ dimenzionalni vektorski prostor vzamemo kotangentni sveženj nad $\mathbb{R}^{n+1}$, to je $T^*\mathbb{R}^{n+1}$, s tem poenostavimo zapise podprostorov in pripadajoče indeksiranje v [13].

3.1 Ambientni prostor

Kot v članku Gerdjikova et al. [13] naj bo (M, ω, H) realen Hamiltonov sistem. Prostor M je $2N$-dimenzionalen vektorski prostor s koordinatami $(q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots, p_N)$, funkcija H je Hamiltonova funkcija sistema (običajno realna analitična funkcija) in $\omega = \sum_{j=1}^{N} dq_j \wedge dp_j$ kanonična 2-forma na M. Za prostor M lahko vzamemo $M = T^*\mathbb{R}^{n+1}$. Naj bodo $q = (q_1, \ldots, q_{n+1})$ koordinate baznega prostora $\mathbb{R}^{n+1}$ in $(q, p) = (q_1, \ldots, q_{n+1}, p_1, \ldots, p_{n+1})$ koordinate kotangentnega svežnja $T^*\mathbb{R}^{n+1}$. Kompleksifikacija realnega Hamiltonovega sistema $(T^*\mathbb{R}^{n+1}, \omega, H)$ je kompleksen sistem $(T^*\mathbb{C}^{n+1}, \omega^{\mathbb{C}}, H^{\mathbb{C}})$. Pri tem realne koordinate $(q, p) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ nadomestimo s kompleksnimi koordinatami $(Q, P) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1}$ in pišemo

$$Q_j = q_{j,0} + i q_{j,1} \qquad \text{and} \qquad P_j = p_{j,0} + i p_{j,1}\,. \tag{3.2}$$

Kompleksna simplektična forma je forma

$$\omega^{\mathbb{C}} = \sum_{j=1}^{n+1} dQ_j \wedge dP_j\,.$$

Hamiltonova funkcija $H^{\mathbb{C}}$ pa je naravna razširitev realnega Hamiltonjana H na $T^*\mathbb{C}^{n+1}$. Označimo s $H_0^{\mathbb{C}}$ in $H_1^{\mathbb{C}}$ realni del in imaginarni del kompleksne funkcije $H^{\mathbb{C}}$ ter z $\omega_0^{\mathbb{C}}$ in $\omega_1^{\mathbb{C}}$ realni del in imaginarni del kompleksne forme $\omega^{\mathbb{C}}$. Ker je

$$\begin{aligned} \omega^{\mathbb{C}} &= \sum_{j=1}^{n+1} dQ_j \wedge dP_j = \sum_{j=1}^{n+1} (dq_{j,0} + i dq_{j,1}) \wedge (dp_{j,0} + i dp_{j,1}) = \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} (dq_{j,0} \wedge dp_{j,0} - dq_{j,1} \wedge dp_{j,1}) + i \sum_{j=1}^{n+1} (dq_{j,1} \wedge dp_{j,0} + dq_{j,0} \wedge dp_{j,1})\,, \end{aligned} \tag{3.3}$$

je

$$\omega_0^{\mathbb{C}} = \sum_{j=1}^{n+1} (dq_{j,0} \wedge dp_{j,0} - dq_{j,1} \wedge dp_{j,1}) \quad \text{in} \quad \omega_1^{\mathbb{C}} = \sum_{j=1}^{n+1} (dq_{j,1} \wedge dp_{j,0} + dq_{j,0} \wedge dp_{j,1})\,.$$

Če je prvotni realen Hamiltonov sistem $(T^*\mathbb{R}^{n+1}, \omega, H)$ popolnoma Liouvilleovo integrabilen, je kompleksificiran Hamiltonov sistem $(T^*\mathbb{C}^{n+1}, \omega^{\mathbb{C}}, H^{\mathbb{C}})$ popolnoma Liouvilleovo integrabilen v kompleksnem. Še več, realen Hamiltonov sistem $(T^*\mathbb{C}^{n+1}, \omega_0^{\mathbb{C}}, H_0^{\mathbb{C}})$ je tudi popolnoma Liouvilleovo integrabilen. Dokaz je v [13].

Naj bo $\mathcal{C}$ involutivni avtomorfizem na $\mathbb{R}^n$. Ker sta edini lastni vrednosti avtomorfizma $\mathcal{C}$ vrednosti 1 in -1, lahko pišemo $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n_+ \oplus \mathbb{R}^n_- \cong \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^{n-k}$, kjer je

$$\mathcal{C}(q) = \begin{cases} q; & q \in \mathbb{R}^n_+ \cong \mathbb{R}^k \\ -q; & q \in \mathbb{R}^n_- \cong \mathbb{R}^{n-k} \end{cases}$$

za nek $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. V bazi lastnih vektorjev je avtomorfizem $\mathcal{C}$ oblike

$$\mathcal{C} : q \to J_k q \qquad \text{za} \quad J_k = \operatorname{diag}\{\underbrace{1, \ldots, 1}_{\text{k}-\text{krat}}, -1, \ldots, -1\}\,.$$

Naj bo $\mathcal{C}^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ naravna razširitev involutivnega avtomorfima $\mathcal{C}$ na kompleksni prostor $\mathbb{C}^n$. Za holomorfni involutivni avtomorfizem $\mathcal{C}^{\mathbb{C}}$ velja

$$\mathcal{C}^{\mathbb{C}}(Q) = \begin{cases} Q; & Q \in \mathbb{C}^n_+ \cong \mathbb{C}^k \\ -Q; & Q \in \mathbb{C}^n_- \cong \mathbb{C}^{n-k} \end{cases}$$

za nek $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Če je $* : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ kompleksna konjugacija ($*(Q) = \overline{Q}$), potem je sestavljena preslikava $\widetilde{\mathcal{C}^{\mathbb{C}}} = \mathcal{C}^{\mathbb{C}} \circ * = * \circ \mathcal{C}^{\mathbb{C}}$ antiholomorfen involutiven avtomorfizem na $\mathbb{C}^n$.

Označimo s $\tau_k^{\mathbb{R}}$ (realen) involutiven avtomorfizem, definiran s predpisom

$$\begin{aligned} \tau_k^{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ q &\longmapsto J_k q \end{aligned}$$

in naj bo τ_k antiholomorfen involutiven avtomorfizem, definiran s

$$\begin{aligned} \tau_k : \mathbb{C}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \\ Q &\longmapsto J_k \overline{Q}\,, \end{aligned} \tag{3.4}$$

pri čemer je (kot zgoraj) $J_k = \mathrm{diag}\{\underbrace{1, \ldots, 1}_{\mathrm{k-krat}}, -1, \ldots, -1\}$. Prostor

$$\mathbb{R}^{n+1}_k := \{(q_{1,0}, \ldots, q_{k,0}, iq_{k+1,1}, \ldots, iq_{n+1,1})\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$$

je množica fiksnih točk preslikave τ_k (glej (3.4)) in je izomorfen prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$ z realnimi koordinatami $\{(q_1, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_{n+1})\}$. Involuciji $\tau_k^{\mathbb{R}}$ in τ_k lahko naravno dvignemo na kotangentna svežnja $T^*\mathbb{R}^{n+1}$ in $T^*\mathbb{C}^{n+1}$. Dobljena dviga zopet označimo s $\tau_k^{\mathbb{R}}$ in τ_k:

$$\begin{aligned} \tau_k^{\mathbb{R}} : T^*\mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow T^*\mathbb{R}^{n+1} \\ (q,p) &\longmapsto (J_k q, J_k p) \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} \tau_k : T^*\mathbb{C}^{n+1} &\longrightarrow T^*\mathbb{C}^{n+1} \\ (Q,P) &\longmapsto (J_k\overline{Q}, J_k\overline{P})\,. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Prostor

$$\begin{aligned} T^*\mathbb{R}^{n+1}_k &= \{(q_{1,0}, \ldots, q_{k,0}, iq_{k+1,1}, \ldots, iq_{n+1,1}, p_{1,0}, \ldots, p_{k,0}, ip_{k+1,1}, \ldots, ip_{n+1,1})\} \cong \\ &\cong \{(q_1, \ldots, q_{n+1}, p_1, \ldots, p_{n+1})\}\,. \end{aligned}$$

je množica fiksnih točk antiholomorfnega involutivnega avtomorfizma τ_k.

Involuciji $\tau_k^{\mathbb{R}}$ in τ_k delujeta na funkcije (realne oziroma kompleksne) s predpisoma:

$$\tau_k^{\mathbb{R}}(f(q,p)) := f(\tau_k^{\mathbb{R}}(q,p)) \qquad \text{in} \qquad \tau_k(f^{\mathbb{C}}(Q,P)) := f^{\mathbb{C}}(\tau_k(Q,P))\,.$$

Definicija 20 *Realna funkcija $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ je $\tau_k^{\mathbb{R}}$-invariantna natanko tedaj, ko je $\tau_k^{\mathbb{R}}(f) = f$.*

Definirajmo še realno formo funkcije:

Definicija 21 *Za realno analitično funkcijo f in pripadajočo naravno kompleksifikacijo $f^{\mathbb{C}}$ je realna forma funkcije $f^{\mathbb{C}}$ glede na involucijo τ_k funkcija*

$$f_k(q,p) := \frac{1}{2}\big(f^{\mathbb{C}}(Q,P) + \tau_k(f^{\mathbb{C}}(Q,P))\big)\Big|_{T^*\mathbb{R}_k^{n+1}}. \tag{3.6}$$

Lema 22 *Realna analitična funkcija $f : T^*\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ je $\tau_k^{\mathbb{R}}$-invariantna natanko tedaj, ko so v razvoju funkcije f v potenčno vrsto le monomi s sodo vsoto eksponentov nad $q_{k+1}, \ldots, q_{n+1}, p_{k+1}, \ldots, p_{n+1}$.*

Dokaz: Dovolj je, da lemo dokažemo za funkcijo $f(q,p) = \prod_{j=1}^{n+1} q_j^{m_j} p_j^{r_j}$, kjer so $m_j, r_j \geq 0$. Če je f $\tau_k^{\mathbb{R}}$-invariantna, je $f(q,p) = f(\tau_k^{\mathbb{R}}(q,p))$. Če upoštevamo involucijo τ_k, je enakost ekvivalentna enačbi

$$f(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = f(q_1,..., q_k, -q_{k+1}, \ldots, -q_n, p_1, \ldots, p_k, -p_{k+1}, \ldots, -p_n)$$

oziroma enačbi

$$\prod_{j=1}^{n+1} q_j^{m_j} p_j^{r_j} = (-1)^{m_{k+1}+\ldots+m_{n+1}+r_{k+1}+\ldots+r_{n+1}} \prod_{j=1}^{n+1} q_j^{m_j} p_j^{r_j}.$$

Zadnja enakost velja natanko tedaj, ko je vsota $m_{k+1} + \ldots + m_{n+1} + r_{k+1} + \ldots + r_{n+1}$ sodo število.

$\square$

Lema 23 *Naj bo $f : T^*\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ realna analitična funkcija, ki je $\tau_k^{\mathbb{R}}$-invariantna, in naj bo $f^{\mathbb{C}}(Q,P) = f_0^{\mathbb{C}}(Q,P) + i f_1^{\mathbb{C}}(Q,P)$ njena naravna kompleksifikacija. Potem je realna forma funcije $f^{\mathbb{C}}$ glede na involucijo τ_k funkcija $f_k(q,p) = f_0^{\mathbb{C}}(Q,P)\Big|_{T^*\mathbb{R}_k^{n+1}}$.*

Dokaz: Zopet je dovolj, da lemo dokažemo za $f(q,p) = \prod_{j=1}^{n+1} q_j^{m_j} p_j^{r_j}$, kjer so $m_j, r_j \geq 0$. Z direktnim računanjem in z uporabo prejšnje leme dobimo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(f^{\mathbb{C}}(Q,P) + \tau_k(f^{\mathbb{C}}(Q,P))) &= \frac{1}{2}\Big(\prod_{j=1}^{n+1} Q_j^{m_j} P_j^{r_j} + (-1)^{m_{k+1}+\ldots+m_n+r_{k+1}+\ldots+r_n} \prod_{j=1}^{n+1} \overline{Q}_j^{m} \overline{P}_j^{r_j}\Big) = \\
&= \frac{1}{2}\Big(\prod_{j=1}^{n+1} Q_j^{m_j} P_j^{r_j} + \prod_{j=1}^{n+1} \overline{Q}_j^{m_j} \overline{P}_j^{r_j}\Big) = \\
&= \frac{1}{2}\Big(\prod_{j=1}^{n+1} Q_j^{m_j} P_j^{r_j} + \overline{\prod_{j=1}^{n+1} Q_j^{m_j} P_j^{r_j}}\Big) = \\
&= f_0^{\mathbb{C}}(Q,P).
\end{aligned}$$

$\square$

Hkrati vidimo, da za τ_k invariantno funkcijo f in njeno kompleksifikacijo $f^{\mathbb{C}}$ velja

$$f_1^{\mathbb{C}}(Q,P) = \frac{1}{2}(f^{\mathbb{C}}(Q,P) - \tau_k(f^{\mathbb{C}}(Q,P))). \tag{3.7}$$

Trditev 24 *Naj bo $f : T^*\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ realna analitična funkcija, ki je $\tau_k^{\mathbb{R}}$-invariantna, in naj bo $f^{\mathbb{C}}(Q,P) = f_0^{\mathbb{C}}(Q,P) + i f_1^{\mathbb{C}}(Q,P)$ njena naravna kompleksifikacija. Realna forma funkcije $f^{\mathbb{C}}$ glede na involucijo τ_k je enostavno $f_k(q,p) = f^{\mathbb{C}}(Q,P)\Big|_{T^*\mathbb{R}_k^{n+1}}$.*

Dokaz: Po prejšnji lemi je dovolj, če pokažemo, da je $f_1^{\mathbb{C}}(Q,P)\Big|_{T^*\mathbb{R}_k^{n+1}} = 0$ za naravno kompleksifikacijo $\tau_k^{\mathbb{R}}$-invariantne funkcije f.

Vzamemo $f^{\mathbb{C}}(Q,P) = \prod_{j=1}^{n+1} Q_j^{m_j} P_j^{r_j}$, kjer je $\sum_{j=k+1}^{n+1} (m_j + r_j)$ sodo število.

Pa naj bosta g in h kompleksni funkciji na $T^*\mathbb{C}^{n+1}$ in pišimo

$$\begin{aligned} g(Q,P) &= g_0(Q,P) + i g_1(Q,P) \\ h(Q,P) &= h_0(Q,P) + i h_1(Q,P)\,. \end{aligned}$$

Njun produkt je kompleksna funkcija

$$\big(gh\big)(Q,P) = \big(g_0(Q,P)h_0(Q,P) - g_1(Q,P)h_1(Q,P)\big) + i\big(g_0(Q,P)h_1(Q,P) + g_1(Q,P)h_0(Q,P)\big)$$

z realnim delom $(gh)_0 = g_0h_0 - g_1h_1$ in imaginarnim delom $(gh)_1 = g_0h_1 + g_1h_0$. Potem velja:

1. Če je $g_1(Q,P)\Big|_{T^*\mathbb{R}_k^{n+1}} = 0$ in $h_1(Q,P)\Big|_{T^*\mathbb{R}_k^{n+1}} = 0$, potem je $(gh)_1\Big|_{T^*\mathbb{R}_k^{n+1}} = 0$.
2. Če je $g_0(Q,P)\Big|_{T^*\mathbb{R}_k^{n+1}} = 0$ in $h_0(Q,P)\Big|_{T^*\mathbb{R}_k^{n+1}} = 0$, potem je $(gh)_1\Big|_{T^*\mathbb{R}_k^{n+1}} = 0$.
3. Če je $g_1(Q,P)\Big|_{T^*\mathbb{R}_k^{n+1}} = 0$ in $h_0(Q,P)\Big|_{T^*\mathbb{R}_k^{n+1}} = 0$, potem je $(gh)_0\Big|_{T^*\mathbb{R}_k^{n+1}} = 0$.

Ta sklep uporabimo $\big(\sum_{j=1}^{n+1}(m_j + r_j) - 1\big)$-krat za kompleksno funkcijo $f^{\mathbb{C}}(Q,P) = \prod_{j=1}^{n+1} Q_j^{m_j} P_j^{r_j}$. Če je $\sum_{j=k+1}^{n+1}(m_j + r_j)$ sodo število, je zagotovo $f_1^{\mathbb{C}}(Q,P)\Big|_{T^*\mathbb{R}_k^{n+1}} = 0$. □

Primer 25 *Hamiltonova funkcija Neumannovega sistema*

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\Big(|q|^2|p|^2 - \langle q,p\rangle^2\Big) + \frac{1}{2}\big(2 - |q|^2\big)\langle q, Aq\rangle$$

je $\tau_k^{\mathbb{R}}$-invariantna fukcija. Res: $\langle q,p\rangle = \sum_{j=1}^{n+1} q_jp_j$, zato

$$\langle J_kq, J_kp\rangle = \sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_j q_j \epsilon_j p_j = \sum_{j=1}^{n+1} q_jp_j\,.$$

Primer 26 *Naj bo $K_{j,l}(q,p) := q_jp_l - q_lp_j$. Funkcija $K_{j,l}$ ni nujno $\tau_k^{\mathbb{R}}$-invariantna. Je pa $\tau_k^{\mathbb{R}}$-invariantna funkcija $K_{j,l}^2$. Zato so integrali Uhlenbenbeckove (glej (1.3)) $\tau_k^{\mathbb{R}}$-invariantni.*

Involucijo $\tau_k^{\mathbb{R}}$ in definicijo $\tau_k^{\mathbb{R}}$-invariantnih funkcij lahko uporabimo tudi na funkcijah več vektorskih spremenljivk, naprimer za Evklidski skalarni produkt $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. Ker je $\langle J_kq, J_k\widetilde{q}\rangle = \langle q, \widetilde{q}\rangle$, je produkt $\langle\ ,\ \rangle$ $\tau_k^{\mathbb{R}}$-invarianten.

Naj bo $\langle q,\widetilde{q}\rangle = \sum_{j=1}^{n+1} q_j\widetilde{q}_j$ standardni skalarni produkt na $\mathbb{R}^{n+1}$, ki definira Evklidsko strukturo na $\mathbb{R}^{n+1}$, in naj bo $|q|^2 = \langle q,q\rangle$ pripadajoča Evklidska metrika. Njuni kompleksifikaciji sta potem

$$\langle Q,\widetilde{Q}\rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{j=1}^{n+1} Q_j\widetilde{Q}_j \qquad \text{in} \qquad |Q|^2_{\mathbb{C}} = \langle Q,Q\rangle_{\mathbb{C}}\,.$$

Opomba 27 *Z direktnim računom hitro dobimo realni del in imaginarni del kompleksnega produkta* $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{C}}$*:*

$$\begin{aligned}\langle Q,\widetilde{Q}\rangle_{\mathbb{C}} &= \sum_{j=1}^{n+1}(q_{j,0}+iq_{j,1})(\widetilde{q}_{j,0}+i\widetilde{q}_{j,1}) = \\ &= \sum_{j=1}^{n+1}(q_{j,0}\widetilde{q}_{j,0}-q_{j,1}\widetilde{q}_{j,1}) + i\sum_{j=1}^{n+1}(q_{j,0}\widetilde{q}_{j,1}+q_{j,1}\widetilde{q}_{j,0})\,.\end{aligned}$$

Torej velja:

$$\mathrm{Re}\big(\langle Q,\widetilde{Q}\rangle_{\mathbb{C}}\big) = \sum_{j=1}^{n+1}(q_{j,0}\widetilde{q}_{j,0}-q_{j,1}\widetilde{q}_{j,1}) \qquad \textit{in} \qquad \mathrm{Im}\big(\langle Q,\widetilde{Q}\rangle_{\mathbb{C}}\big) = \sum_{j=1}^{n+1}(q_{j,0}\widetilde{q}_{j,1}+q_{j,1}\widetilde{q}_{j,0})\,.$$

Kompleksen produkt $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{C}}$ na $\mathbb{C}^{n+1}$, zožen na prostor $\mathbb{R}^{n+1}_k$, je enak zožitvi realnega dela $\mathrm{Re}(\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{C}})$ na prostor $\mathbb{R}^{n+1}_k$, torej je

$$\langle q,\widetilde{q}\rangle_k = \sum_{j=1}^{k} q_j\widetilde{q}_j - \sum_{k+1}^{n+1} q_j\widetilde{q}_j\,.$$

Novi produkt definira psevdo-evklidsko strukturo na $\mathbb{R}^{n+1}_k$ s signaturo $(k, n+1-k)$. Lahko tudi pišemo $\langle q,\widetilde{q}\rangle_k = \sum_{j=1}^{n+1}\epsilon_j q_j\widetilde{q}_j$ za $\epsilon_1 = \ldots = \epsilon_k = 1$ in $\epsilon_{k+1} = \ldots = \epsilon_{n+1} = -1$, ali krajše $\langle q,\widetilde{q}\rangle_k = \langle q, J_k\widetilde{q}\rangle$, pri čemer je $J_k = \mathrm{diag}\{\underbrace{1,\ldots,1}_{k\text{-krat}},-1,\ldots,-1\}$. Indefinitna psevdo-evklidska metrika, definirana z psevdo-evklidskim produktom, je metrika $|q|^2_k = \langle q,q\rangle_k$.

Primer 28 *Za Hamiltonovo funkcijo* $H(q,p) = \frac{1}{2}\big(|q|^2|p|^2 - \langle q,p\rangle^2\big) + \frac{1}{2}(2-|q|^2)\langle q, Aq\rangle$ *Neumannovega sistema (glej (1.1)) je naravna kompleksifikacija kompleksna funkcija*

$$H^{\mathbb{C}}(Q,P) = \frac{1}{2}\Big(|Q|^2_{\mathbb{C}}|P|^2_{\mathbb{C}} - \langle Q,P\rangle^2_{\mathbb{C}}\Big) + \frac{1}{2}\big(2-|Q|^2_{\mathbb{C}}\big)\langle Q, AQ\rangle_{\mathbb{C}}\,.$$

Realna forma kompleksnega Hamiltonjana $H^{\mathbb{C}}$ *glede na involucijo* τ_k *je realna funkcija*

$$H_k(q,p) = \frac{1}{2}\Big(|q|^2_k|p|^2_k - \langle q,p\rangle^2_k\Big) + \frac{1}{2}\big(2-|q|^2_k\big)\langle q, Aq\rangle_k\,.$$

Ker je $\langle\ ,\ \rangle_k : \mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ $\tau_l^{\mathbb{R}}$*-invariantna za vsak* $l\in\{1,\ldots,n+1\}$*, so funkcije* H_k $\tau_l^{\mathbb{R}}$*-invariantne za vsak* $l\in\{1,\ldots,n+1\}$*.*

Kompleksna kanonična 2-forma $\omega^{\mathbb{C}}$ na kotangentnem svežnju $T^*\mathbb{C}^{n+1}$ je v koordinatah (3.2) oblike

$$\omega^{\mathbb{C}} = \sum_{j=1}^{n+1} dQ_j\wedge dP_j = \sum_{j=1}^{n+1}(dq_{j,0}\wedge dp_{j,0} - dq_{j,1}\wedge dp_{j,1}) + i\sum_{j=1}^{n+1}(dq_{j,1}\wedge dp_{j,0} + dq_{j,0}\wedge dp_{j,1})\,.$$

Njena direktna zožitev na prostor $T^*\mathbb{R}^{n+1}_k$ je enaka zožitvi njenega realnega dela na prostor $T^*\mathbb{R}^{n+1}_k$. Realna forma komleksne simplektične 2-forme je simplektična 2-forma

$$\omega_k = \sum_{j=1}^{n+1}\epsilon_j dq_j\wedge dp_j$$

za $\epsilon_1 = \ldots = \epsilon_k = 1$ in $\epsilon_{k+1} = \ldots = \epsilon_n = -1$.

Naravna kompleksifikacija Poissonovega oklepaja $\{f, g\} = \omega(X_f, X_g)$ dveh realnih analitičnih funkcij f in g je Poissonov oklepaj

$$\{f^{\mathbb{C}}, g^{\mathbb{C}}\}_{\mathbb{C}} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial f^{\mathbb{C}}}{\partial Q_j}\frac{\partial g^{\mathbb{C}}}{\partial P_j} - \frac{\partial f^{\mathbb{C}}}{\partial P_j}\frac{\partial g^{\mathbb{C}}}{\partial Q_j}$$

pri čemer sta $f^{\mathbb{C}} = f_0 + if_1$ in $g^{\mathbb{C}} = g_0 + ig_1$ naravni kompleksifikaciji funkcij f in g. Parcialni odvodi po kompleksnih spremenljivkah Q_j oz. P_j so določeni s parcialnimi odvodi po realnih in imaginarnih komponentah spremenljivk:

$$\frac{\partial f^{\mathbb{C}}}{\partial Q_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f^{\mathbb{C}}}{\partial q_{j,0}} - i\frac{\partial f^{\mathbb{C}}}{\partial q_{j,1}}\right) \qquad \text{in} \qquad \frac{\partial f^{\mathbb{C}}}{\partial P_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f^{\mathbb{C}}}{\partial p_{j,0}} - i\frac{\partial f^{\mathbb{C}}}{\partial p_{j,1}}\right).$$

Ker sta kompleksni funkciji $f^{\mathbb{C}}$ in $g^{\mathbb{C}}$ analitični, zanju veljajo Cauchy-Riemannove enačbe:

$$\frac{\partial f_0}{\partial q_{j,0}} = \frac{\partial f_1}{\partial q_{j,1}}, \qquad \frac{\partial f_0}{\partial q_{j,1}} = -\frac{\partial f_1}{\partial q_{j,0}}$$

in

$$\frac{\partial f_0}{\partial p_{j,0}} = \frac{\partial f_1}{\partial p_{j,1}}, \qquad \frac{\partial f_0}{\partial p_{j,1}} = -\frac{\partial f_1}{\partial p_{j,0}}.$$

Analogno lahko pišemo za funkcijo g. Parcialne odvode po kompleksnih spremenljivkah lahko izrazimo s parcialnimi odvodi realnega dela funkcije po realnih spremenljivkah:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f^{\mathbb{C}}}{\partial Q_j} &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f^{\mathbb{C}}}{\partial q_{j,0}} - i\frac{\partial f^{\mathbb{C}}}{\partial q_{j,1}}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f_0}{\partial q_{j,0}} + i\frac{\partial f_1}{\partial q_{j,0}} - i\frac{\partial f_0}{\partial q_{j,1}} + \frac{\partial f_1}{\partial q_{j,1}}\Big) = \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f_0}{\partial q_{j,0}} - i\frac{\partial f_0}{\partial q_{j,1}} - i\frac{\partial f_0}{\partial q_{j,1}} + \frac{\partial f_0}{\partial q_{j,0}}\Big) = \frac{\partial f_0}{\partial q_{j,0}} - i\frac{\partial f_0}{\partial q_{j,1}}
\end{aligned}$$

in

$$\frac{\partial f^{\mathbb{C}}}{\partial P_j} = \frac{\partial f_0}{\partial p_{j,0}} - i\frac{\partial f_0}{\partial p_{j,1}}.$$

Zato lahko pišemo

$$\begin{aligned}
\{f^{\mathbb{C}}, g^{\mathbb{C}}\}_{\mathbb{C}} &= \sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{\partial f_0}{\partial q_{j,0}} - i\frac{\partial f_0}{\partial q_{j,1}}\Big)\Big(\frac{\partial g_0}{\partial p_{j,0}} - i\frac{\partial g_0}{\partial p_{j,1}}\Big) - \Big(\frac{\partial f_0}{\partial p_{j,0}} - i\frac{\partial f_0}{\partial p_{j,1}}\Big)\Big(\frac{\partial g_0}{\partial q_{j,0}} - i\frac{\partial g_0}{\partial q_{j,1}}\Big) = \\
&= \sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{\partial f_0}{\partial q_{j,0}}\frac{\partial g_0}{\partial p_{j,0}} - \frac{\partial f_0}{\partial q_{j,1}}\frac{\partial g_0}{\partial p_{j,1}} - \frac{\partial f_0}{\partial p_{j,0}}\frac{\partial g_0}{\partial q_{j,0}} + \frac{\partial f_0}{\partial p_{j,1}}\frac{\partial g_0}{\partial q_{j,1}}\Big) + \qquad (3.8) \\
&\quad + i\sum_{j=1}^{n}\Big(- \frac{\partial f_0}{\partial q_{j,1}}\frac{\partial g_0}{\partial p_{j,0}} - \frac{\partial f_0}{\partial q_{j,0}}\frac{\partial g_0}{\partial p_{j,1}} + \frac{\partial f_0}{\partial p_{j,1}}\frac{\partial g_0}{\partial q_{j,0}} + \frac{\partial f_0}{\partial p_{j,0}}\frac{\partial g_0}{\partial q_{j,1}}\Big).
\end{aligned}$$

Zožitev zgornjega kompleksificiranega Poissonovega oklepaja na podprostor $T^*\mathbb{R}^{n+1}_k$ za $\tau^{\mathbb{R}}_l$-invariantne realne funkcije in pripadajoče naravne kompleksifikacije ustreza zožitvi realnega dela kompleksnega Poissonovega oklepaja na $T^*\mathbb{R}^{n+1}_k$. Z zožitvijo dobimo zopet realen oklepaj:

$$\{f_k, g_k\}_k = \sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_j\Big(\frac{\partial f_k}{\partial q_j}\frac{\partial g_k}{\partial p_j} - \frac{\partial f_k}{\partial p_j}\frac{\partial g_k}{\partial q_j}\Big). \qquad (3.9)$$

Novi realen Poissonov oklepaj (3.9) očitno izhaja iz realne forme kompleksificirane simplektične forme, to je $\{f_k, g_k\}_k = \omega_k(X_{f_k}, Y_{g_k})$.

Trditev 29 *Če je prvotni realen Hamiltonov sistem $(T^*\mathbb{R}^{n+1}, \omega, H)$ popolnoma Liouvilleovo integrabilen, je realna forma $(T^*\mathbb{R}^{n+1}_k, \omega_k, H_k)$ kompleksificiranega Hamiltonovega sistema tudi popolnoma Liouvilleovo integrabilen Hamiltonov sistem. Če so funkcije $H_1, \ldots, H_n$ prvi integrali prvotnega sistema, so funkcije*

$$H_{j,k} = \frac{1}{2}\big(H_j^{\mathbb{C}} + \tau_k(H_j^{\mathbb{C}})\big)\Big|_{T^*\mathbb{R}^{n+1}_k}; \qquad j = 1, \ldots, n$$

prvi integrali realne hamiltonske forme $(T^*\mathbb{R}^{n+1}_k, \omega_k, H_k)$.

Dokaz je v [13].

Naj bo sedaj $\mathcal{S}$ poljubna podmnožica v $\{1, 2, \ldots, n+1\}$. Kot v prejšnjem poglavju označimo z $J_{\mathcal{S}}$ diagonalno matriko z elementi

$$(J_{\mathcal{S}})_{jj} = \begin{cases} 1 & ; \; j \in \mathcal{S} \\ -1 & ; \; j \in \mathcal{S}^{\mathsf{c}} \, . \end{cases}$$

Definirajmo realen involutiven avtomorfizem $\tau_{\mathcal{S}}^{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ s predpisom $\tau_{\mathcal{S}}^{\mathbb{R}}(q) = J_{\mathcal{S}} q$ in označimo s $\tau_{\mathcal{S}}^{\mathbb{R}}$ tudi njegov dvig

$$\tau_{\mathcal{S}}^{\mathbb{R}} : T^*\mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow T^*\mathbb{R}^{n+1} \quad : \quad (q, p) \longmapsto (J_{\mathcal{S}} q, J_{\mathcal{S}} p)$$

Opomba 30 *Zgornje leme in Trditev 24 veljajo tudi za $\tau_{\mathcal{S}}$-invariantne funkcije f in njihove kompleksifikacije.*

Pripadajoči kompleksen antiholomorfen involutiven avtomorfizem $\tau_{\mathcal{S}} : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ je določen s predpisom $\tau_{\mathcal{S}}(Q) = J_{\mathcal{S}} \overline{Q}$. Avtomorfizem $\tau_{\mathcal{S}}$ lahko naravno dvignemo na kotangentni sveženj in dobljeni dvig zopet označimo s $\tau_{\mathcal{S}}$:

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{S}} : T^*\mathbb{C}^{n+1} &\longrightarrow T^*\mathbb{C}^{n+1} \\ (Q, P) &\longmapsto (J_{\mathcal{S}} \overline{Q}, J_{\mathcal{S}} \overline{P}) \, . \end{aligned} \tag{3.10}$$

Množici fiksnih točk preslikav $\tau_{\mathcal{S}}$ (preslikave na baznem prostoru in njenega dviga na kotangentni sveženj) sta podprostora $\mathbb{R}^{n+1}_{\mathcal{S}}$ in $T^*\mathbb{R}^{n+1}_{\mathcal{S}}$. Zožitev kompleksnega produkta $\langle \; , \; \rangle_{\mathbb{C}}$ na $\mathbb{R}^{n+1}_{\mathcal{S}}$ je produkt $\langle q, \widetilde{q} \rangle_{\mathcal{S}} := \sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},j} q_j \widetilde{q}_j$, pri čemer je

$$\epsilon_{\mathcal{S},j} = \begin{cases} 1 & ; \; j \in \mathcal{S} \\ -1 & ; \; j \in \mathcal{S}^{\mathsf{c}} \, . \end{cases}$$

Analogno velja za funkcije oziroma za realne forme kompleksifikacij funkcij

$$f_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}(f_{\mathbb{C}} + \tau_{\mathcal{S}}(f_{\mathbb{C}}))\Big|_{T^*\mathbb{R}^{n+1}_{\mathcal{S}}} \, ,$$

ter za 2-forme

$$\omega_{\mathcal{S}} = \sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},j} dq_j \wedge dp_j$$

in Poissonove oklepaje

$$\{f_{\mathcal{S}}, g_{\mathcal{S}}\}_{\mathcal{S}} = \sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},j} \Big(\frac{\partial f_{\mathcal{S}}}{\partial q_j} \frac{\partial g_{\mathcal{S}}}{\partial p_j} - \frac{\partial f_{\mathcal{S}}}{\partial p_j} \frac{\partial g_{\mathcal{S}}}{\partial q_j} \Big) .$$

Trditev 29 tako velja tudi za realne hamiltonske forme $(T^*\mathbb{R}^{n+1}_{\mathcal{S}}, \omega_{\mathcal{S}}, H_{\mathcal{S}})$. Pripadajoči prvi integrali sistema so funkcije oblike

$$H_{j,\mathcal{S}} = \frac{1}{2}(H_j^{\mathbb{C}} + \tau_{\mathcal{S}}(H_j^{\mathbb{C}}))\Big|_{T^*\mathbb{R}^{n+1}_{\mathcal{S}}}$$

za $j = 1, \ldots, n$.

3.2 Kosimplektična podmnogoterost

Naj bodo $\{\phi_1, \ldots, \phi_m\}$ gladke funkcije na simplekični mnogoterosti $(T^*\mathbb{R}^{n+1}, \omega)$. Definirajmo preslikavo

$$\begin{aligned} \Phi : T^*\mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (q,p) &\longmapsto (\phi_1(q,p), \ldots, \phi_m(q,p)) . \end{aligned} \tag{3.11}$$

Naj bo $c = (c_1, \ldots, c_m) \in \mathbb{R}^m$ regularna vrednost preslikave Φ. Nivojska množica

$$\Phi^{-1}(c) = \big\{ (q,p) \in T^*\mathbb{R}^{n+1} \,\big|\, (\phi_1(q,p), \ldots, \phi_m(q,p)) = (c_1, \ldots, c_m) \big\}$$

je gladka podmnogoterost v $T^*\mathbb{R}^{n+1}$. Preden bomo kompleksificirali nivojsko množico in definirali realne forme, si oglejmo splošnejšo definicijo zgornje podmnogoterosti in nekaj neposrednih lastnosti. Splošna definicija, lastnosti in Diracov oklepaj ter modificiran Diracov oklepaj so opisani v [8].

Naj bodo $\{\phi_1, \ldots, \phi_m\}$ gladke funkcije na poljubni simplektični mnogoterosti (M, ω) in naj bo

$$\begin{aligned} \Phi : M &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (q,p) &\longmapsto (\phi_1(q,p), \ldots, \phi_m(q,p)) . \end{aligned}$$

Za regularno vrednost $c \in \mathbb{R}^m$ preslikave Φ je nivojska množica $\Phi^{-1}(c)$ gladka podmnogoterost v M.

Definicija 31 *Če je matrika Poissonovih oklepajev $(\{\phi_j, \phi_l\}(m))$ obrnljiva za vsak $m \in \Phi^{-1}(c)$, podmnogoterost $\Phi^{-1}(c)$ imenujemo kosimplektična podmnogoterost mnogoterosti M.*

Trditev 32 *Kosimplektična podmnogoterost simplektične mnogoterosti (M, ω) je simplektična mnogoterost $(\Phi^{-1}(c), \omega_{\Phi^{-1}(c)})$.*

Simplektična forma $\omega_{\Phi^{-1}(c)}$ definira Poissonov oklepaj $\{\ ,\ \}_{\Phi^{-1}(c)}$ na $\mathcal{C}^\infty(\Phi^{-1}(c))$. Naj bo $C = (C_{ij})$ inverzna matrika Poissonovih oklepajev funkcij $\phi_1, \ldots, \phi_m$, to je matrike $(\{\phi_j, \phi_l\})$. Naj bosta $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Na neki odprti okolici podmnogoterosti $\Phi^{-1}(c)$ definiramo Diracov oklepaj

$$\{f, g\}^* = \{f, g\} - \sum_{j,l=1}^{m} \{f, \phi_j\} C_{ij} \{\phi_l, g\} . \tag{3.12}$$

Definrajmo še modificirano funkcijo

$$f^* = f - \sum_{j,l=1}^{m} \{f, \phi_j\} C_{jl} \phi_l . \tag{3.13}$$

Potem velja:

$$\{f\big|_{\Phi^{-1}(c)}, g\big|_{\Phi^{-1}(c)}\}_{\Phi^{-1}(c)} = \{f,g\}^*\Big|_{\Phi^{-1}(c)} = \{f^*, g^*\}\Big|_{\Phi^{-1}(c)}. \tag{3.14}$$

Dokaz je v [8].

V primeru kotangentnega svežnja $T^*\mathbb{R}^{n+1}$ in preslikave (3.11) imamo navadno sodo število funkcij $m = 2k$, ki definirajo kosimplektično podmnogoterost v $T^*\mathbb{R}^{n+1}$. Če so $\phi_1, \ldots, \phi_k$ funkcije na baznem prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$, potem so $\phi_{k+1} = T^*\phi_1, \ldots, \phi_{2k} = T^*\phi_k$ njihovi odvodi.

Naj bo $\phi_j^{\mathbb{C}} = \phi_j^{\mathbb{C}}(Q,P)$ naravna razširitev funkcije ϕ_j na kotangentni sveženj $T^*\mathbb{C}^{n+1}$. Razširitev preslikave Φ oziroma kompleksifikacija je kompleksna preslikava

$$\begin{aligned} \Phi^{\mathbb{C}} : T^*\mathbb{C}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (Q,P) &\longmapsto (\phi_1^{\mathbb{C}}(Q,P), \ldots, \phi_m^{\mathbb{C}}(Q,P)). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Definicija 33 *Kompleksifikacija gladke podmnogoterosti $\Phi^{-1}(c) \subset T^*\mathbb{R}^{n+1}$ je naravno definirana kompleksna podmnogoterost $(\Phi^{\mathbb{C}})^{-1}(c) \subset T^*\mathbb{C}^{n+1}$.*

Naj bo $\tau_{\mathcal{S}}$ antiholomorfni involutivni avtomorfizem na $T^*\mathbb{C}^{n+1}$, kot je definiran v (3.5) .

Definicija 34 *Realna forma kompleksne podmnogoterosti $(\Phi^{\mathbb{C}})^{-1}(c) \subset T^*\mathbb{C}^{n+1}$, definirane s preslikavo (3.15), je podmnogoterost $\Phi_{\mathcal{S}}^{-1}(c)$, ki je definirana s preslikavo*

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{S}} : T^*\mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (q,p) &\longmapsto (\phi_{1,\mathcal{S}}(q,p), \ldots, \phi_{m,\mathcal{S}}(q,p)), \end{aligned}$$

pri čemer je $\phi_{j,\mathcal{S}}(q,p) = \frac{1}{2}(\phi_j^{\mathbb{C}} + \tau_{\mathcal{S}}(\phi_j^{\mathbb{C}}))\Big|_{T^*\mathbb{R}^n_{\mathcal{S}}}(q,p)$ za $j = 1, \ldots, m$.

Oglejmo si primer, ki ga študiramo v disertaciji.

Primer 35 *Kotangentni sveženj nad sfero S^n je gladka podmnogoterost*

$$T^*S^n = \left\{(q,p) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \;\Big|\; |q|^2 = 1\,,\ \langle q,p\rangle = 0\right\} \subset T^*\mathbb{R}^{n+1}.$$

Njegova kompleksifikacija je kompleksna mnogoterost

$$(T^*S^n)^{\mathbb{C}} = T^*(S^n)^{\mathbb{C}} = \left\{(Q,P) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1} \;\Big|\; |Q|^2_{\mathbb{C}} = 1\,,\ \langle Q,P\rangle_{\mathbb{C}} = 0\right\} \subset T^*\mathbb{C}^{n+1}, \tag{3.16}$$

to je t.i. kotangentni sveženj nad kompleksno sfero. Funkciji, ki definirata T^*S^n sta $\phi_1(q,p) = |q|^2 - 1$ in $\phi_2(q,p) = \langle q,p\rangle$. Njuni kompleksifikaciji sta kompleksni funkciji $\phi_1^{\mathbb{C}}(Q,P) = |Q|^2_{\mathbb{C}} - 1$ in $\phi_2^{\mathbb{C}}(Q,P) = \langle Q,P\rangle_{\mathbb{C}}$. Realni formi funkcij glede na involucijo $\tau_{\mathcal{S}}$ sta realni funkciji $\phi_{1,\mathcal{S}}(q,p) = |q|^2_{\mathcal{S}} - 1$ in $\phi_{2,\mathcal{S}}(q,p) = \langle q,p\rangle_{\mathcal{S}}$. Potem je realna forma kompleksne mnogoterosti (3.16) realna mnogoterost

$$T^*\mathcal{H}^n_{\mathcal{S}} = \left\{(q,p) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \;\Big|\; |q|^2_{\mathcal{S}} = 1\,,\ \langle q,p\rangle_{\mathcal{S}} = 0\right\}. \tag{3.17}$$

To je kotangentni sveženj nad hiperboloidom $\mathcal{H}^n_{\mathcal{S}} = \left\{q \in \mathbb{R}^{n+1} \;\Big|\; |q|^2_{\mathcal{S}} = 1\right\}$.

Opomba 36 *Za $\mathcal{S} = \emptyset$ hiperboloid $\mathcal{H}^n_{\mathcal{S}}$ ne obstaja.*

Trditev 37 *Naj bo $\mathcal{S}$ poljubna neprazna podmnožica v $\{1,\dots,n+1\}$. Podmnogoterost*

$$T^*\mathcal{H}^n_{\mathcal{S}} = \Big\{(q,p)\in\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1}\ \Big|\ |q|^2_{\mathcal{S}} = 1\,,\ \langle q,p\rangle_{\mathcal{S}} = 1\Big\}\subset T^*\mathbb{R}^{n+1}$$

je simplektična mnogoterost za simplektično formo $\omega_{\mathcal{S}} = \sum_{j=1}^{n+1}\epsilon_{\mathcal{S},j}dq_j\wedge dp_j$, natančneje za formo $\omega_{\mathcal{S}}\big|_{T^*\mathcal{H}^n_{\mathcal{S}}}$.

Dokaz: Po Definiciji 31 in Trditvi 32 moramo preveriti, ali je matrika Poissonovih oklepajev funkcij, ki definirata $T^*\mathcal{H}^n_{\mathcal{S}}$, obrnljiva v vsaki točki $(q,p)\in T^*\mathcal{H}^n_{\mathcal{S}}$. Izračunajmo torej parcialne odvode funkcij

$$\phi_{1,\mathcal{S}}(q,p) = -1+\sum_{j=1}^{n+1}\epsilon_{\mathcal{S},j}q_j^2 \qquad \text{in} \qquad \phi_{2,\mathcal{S}}(q,p) = \sum_{j=1}^{n+1}\epsilon_{\mathcal{S},j}q_jp_j$$

po vseh spremenljivkah. Očitno je

$$\frac{\partial\phi_{1,\mathcal{S}}}{\partial q_j}(q,p) = 2\epsilon_{\mathcal{S},j}q_j\ ,\quad \frac{\partial\phi_{1,\mathcal{S}}}{\partial p_j}(q,p) = 0\ ,\quad \frac{\partial\phi_{2,\mathcal{S}}}{\partial q_j}(q,p) = \epsilon_{\mathcal{S},j}p_j\ ,\quad \frac{\partial\phi_{2,\mathcal{S}}}{\partial p_j}(q,p) = \epsilon_{\mathcal{S},j}q_j\ .$$

Po definiciji Poissonovega oklepaja je

$$\begin{aligned}\{\phi_{1,\mathcal{S}},\phi_{2,\mathcal{S}}\}(q,p) &= \sum_{j=1}^{n+1}\epsilon_{\mathcal{S},j}\Big(\frac{\partial\phi_{1,\mathcal{S}}}{\partial q_j}\frac{\partial\phi_{2,\mathcal{S}}}{\partial p_j} - \frac{\partial\phi_{2,\mathcal{S}}}{\partial q_j}\frac{\partial\phi_{1,\mathcal{S}}}{\partial p_j}\Big) = \\ &= \sum_{j=1}^{n+1}\epsilon_{\mathcal{S},j}\Big(2\epsilon_{\mathcal{S},j}q_j\epsilon_{\mathcal{S},j}q_j\Big) = \\ &= 2\sum_{j=1}^{n+1}\epsilon_{\mathcal{S},j}q_j^2 \ = \ 2\end{aligned}$$

za vsak $(q,p)\in T^*\mathcal{H}^n_{\mathcal{S}}$. Matrika Poissonovih oklepajev je potemtakem $\big(\{\phi_{j,\mathcal{S}},\phi_{l,\mathcal{S}}\}\big)(q,p) = \begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$, torej obrnljiva za vsak $(q,p)\in T^*\mathcal{H}^n_{\mathcal{S}}$.

□

3.3 Hamiltonov sistem z vezmi

Hamiltonov sistem z vezmi je Hamiltonov sistem, ki je definiran na kosimplektični podmnogoterosti $(\Phi^{-1}(c),\omega\big|_{\Phi^{-1}(c)})$ poljubne simplektične mnogoterosti (M,ω). Pišemo ga v obliki

$$(\Phi^{-1}(c),\omega\big|_{\Phi^{-1}(c)},h\big|_{\Phi^{-1}(c)})$$

oziroma $(\Phi^{-1}(c),\omega,H)$ za primerno modificirano funkcijo H funkcije h.

Primer 38 *Neumannov sistem na n-dimenzionalni sferi je zožitev Hamiltonovega sistema*

$$(T^*\mathbb{R}^{n+1},\omega = \sum_{j=1}^{n+1}dq\wedge dp,h)$$

s Hamiltonovo funkcijo

$$h(q,p) = \frac{1}{2}|p|^2 + \frac{1}{2}\langle q, Aq\rangle\,,$$

ki opisuje gibanje $(n+1)$ *harmoničnih oscilatorjev, torej* $(T^*S^{n+1}, \omega\big|_{T^*S^n}, h\big|_{T^*S^n})$. *Ker bi radi Neumannov sistem zapisali s kanonično simplektično formo na* $T^*\mathbb{R}^{n+1}$, *izračunajmo modifikacijo funkcije* h *glede na* T^*S^n. *Kotangentni sveženj nad* S^n *je kosimplektična podmnogoterost za vezni funkciji* $\phi_1(q,p) = |q|^2 - 1$ *in* $\phi_2(q,p) = \langle q, p\rangle$. *Matrika Poissonovih oklepajev vezi je matrika*

$$(\{\phi_j, \phi_l\}_{T^*\mathbb{R}^{n+1}}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Koeficienti njene inverzne matrike C *so potem:* $C_{11} = 0$, $C_{12} = -\frac{1}{2}$, $C_{21} = \frac{1}{2}$ *in* $C_{22} = 0$. *Po (3.13) je*

$$h^* = h - \{h, \phi_1\}C_{12}\phi_2 - \{h, \phi_2\}C_{21}\phi_1\,.$$

Izračunajmo še manjkajoča Poissonova oklepaja:

$$\{h, \phi_1\} = \sum_{j=1}^{n+1}\left(\frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial \phi_1}{\partial p_j} - \frac{\partial \phi_1}{\partial q_j}\frac{\partial h}{\partial p_j}\right) = \sum_{j=1}^{n+1}\left(0 - 2q_j\frac{1}{2}p_j\right) = -\langle q, p\rangle$$

in

$$\{h, \phi_2\} = \sum_{j=1}^{n+1}\left(\frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial \phi_2}{\partial p_j} - \frac{\partial \phi_2}{\partial q_j}\frac{\partial h}{\partial p_j}\right) = \sum_{j=1}^{n+1}\left(a_j q_j \cdot q_j - p_j q_j\right) = \langle q, Aq\rangle - |p|^2$$

Potem je

$$\begin{aligned} f^*(q,p) &= \frac{1}{2}|p|^2 + \frac{1}{2}\langle q, Aq\rangle - \langle q,p\rangle\frac{1}{2}\langle q,p\rangle - \big(\langle q, Aq\rangle - |p|^2\big)\frac{1}{2}(|q|^2 - 1) = \\ &= \frac{1}{2}|p|^2 + \frac{1}{2}\langle q, Aq\rangle - \frac{1}{2}\langle q,p\rangle^2 - \frac{1}{2}|q|^2\langle q, Aq\rangle + \frac{1}{2}|p|^2|q|^2 + \frac{1}{2}\langle q, Aq\rangle - \frac{1}{2}|p|^2 = \\ &= \frac{1}{2}\big(|q|^2|p|^2 - \langle q,p\rangle^2\big) + \frac{1}{2}(2 - |q|^2)\langle q, Aq\rangle\,. \end{aligned}$$

Preverimo še, da za Neumannov sistem veljajo diferencialne enačbe $\dot{q}_j = \{q_j, f^*\}_{T^*S^n}$ *in* $\dot{p}_j = \{p_j, f^*\}_{TS^n}$. *To sledi iz definicije modificirane funkcije, saj velja*

$$\begin{aligned} \{q_k, f^*\} &= \{q_k, f - \sum_{j,l=1}^{m}\{f, \phi_j\}C_{jl}\phi_l\} = \\ &= \{q_k, f\} - \sum_{j,l=1}^{m}\{q_k, \{f, \phi_j\}C_{jl}\phi_l\} = \{q_k, f\}^* \end{aligned}$$

(glej 3.14). Podobno za p_k.

Če je $M = T^*\mathbb{R}^{n+1}$ in so $(q,p) \in T^*\mathbb{R}^{n+1}$ ambientne koodinate, pišemo $H = H(q,p)$ in ω za kanonično simplektično fomo na $T^*\mathbb{R}^{n+1}$. Kompleksifikacija Hamiltonovega sistema z vezmi je kompleksen sistem z vezmi $((\Phi^{\mathbb{C}})^{-1}(c), \omega^{\mathbb{C}}, H^{\mathbb{C}})$.

Definicija 39 *Naj bo $(\Phi^{-1}(c), \omega, H)$ Hamiltonov sistem z vezmi v ambientni mnogoterosti $T^*\mathbb{R}^{n+1}$ s kanonično simplektično formo $\omega = \sum_{j=1}^{n+1} dq_j \wedge dp_j$ in s $\tau_{\mathcal{S}}^{\mathbb{R}}$-invariantnim Hamiltonjanom H. Realna forma kompleksnega Hamiltonovega sistema z vezmi $\big((\Phi^{\mathbb{C}})^{-1}(c), \omega^{\mathbb{C}}, H^{\mathbb{C}} = H_0 + iH_1\big)$ glede na involucijo $\tau_{\mathcal{S}} : T^*\mathbb{C}^{n+1} \to T^*\mathbb{C}^{n+1}$ je realen Hamiltonov sistem*

$$(\Phi_{\mathcal{S}}^{-1}(c), \omega_{\mathcal{S}}, H_{\mathcal{S}}) \, ,$$

kjer je $H_{\mathcal{S}} = H_0\Big|_{T^*\mathbb{R}^{n+1}_{\mathcal{S}}} = H\Big|_{T^*\mathbb{R}^{n+1}_{\mathcal{S}}}$.

Primer 40 *Realna forma kompleksnega Neumannovega sistema $\big(T^*S^{n\mathbb{C}}, \omega^{\mathbb{C}}, H^{\mathbb{C}}\big)$, pri čemer je kompleksna simplektična forma oblike $\omega^{\mathbb{C}} = \sum_{j=1}^{n+1} dQ_j \wedge dP_j$ in*

$$H^{\mathbb{C}}(Q,P) = \frac{1}{2}\Big(|Q|^2_{\mathbb{C}}|P|^2_{\mathbb{C}} - \langle Q,P\rangle^2_{\mathbb{C}}\Big) + \frac{1}{2}\big(2 - |Q|^2_{\mathbb{C}}\big)\langle Q, AQ\rangle \, ,$$

glede na involucijo $\tau_{\mathcal{S}} : T^*\mathbb{C}^n \to T^*\mathbb{C}^n$, je realen Hamiltonov sistem $\big(T^*\mathcal{H}^n_{\mathcal{S}}, \omega_{\mathcal{S}}, H_{\mathcal{S}}\big)$. Pri tem je $T^*\mathcal{H}^n_{\mathcal{S}} = \{(q,p) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \,\Big|\, |q|^2_{\mathcal{S}} = 1\,,\ \langle q,p\rangle_{\mathcal{S}} = 0\}$, simplektična 2-forma v ambientnih koordinatah je oblike $\omega_{\mathcal{S}} = \sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S}} dq_j \wedge dp_j$ in je Hamiltonova funkcija $H_{\mathcal{S}}$ dana s predpisom

$$H_{\mathcal{S}}(q,p) = \frac{1}{2}\Big(|q|^2_{\mathcal{S}}|p|^2_{\mathcal{S}} - \langle q,p\rangle^2_{\mathcal{S}}\Big) + \frac{1}{2}\big(2 - |q|^2_{\mathcal{S}}\big)\langle q, Aq\rangle_{\mathcal{S}} \, .$$

Da je realna forma kompleksnega Neumannovega sistema dobro definirana, mora veljati $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Realnih form kompleksnega Neumannovega sistema je potemtakem $2^{n+1} - 1$.

Poglavje 4

Laxova enačba in integrabilnost realnih form $\big(T^*\mathcal{H}^n_{\mathcal{S}}, \omega_{\mathcal{S}}, H_{\mathcal{S}}\big)$

Laxova enačba
$$\frac{d}{dt}L(\lambda) = [M(\lambda), L(\lambda)]$$
Hamiltonovega sistema je enačba z elementi $L(\lambda)$, $M(\lambda)$ v zančni algebri $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}[\lambda, \lambda^{-1}]$ in je ekvivalentna Hamiltonovemu sistemu diferencialnih enačb gibanja. Elementi zančne algebre so formalne semi-neskončne Laurentove vrste s koeficienti v $\mathfrak{g}$. Dodani parameter λ imenujemo spektralni parameter.

Recimo, da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ ali pa katera od njenih podalgeber. Oglejmo si, kakšna je rešitev in kaj so ohranitvene količine sistema, zapisanega z Laxovo enačbo. Kot nalogi sta oba primera nakazana v [4]. Pišimo natančneje: $L(\lambda) = L_\lambda(t)$ in $M(\lambda) = M_\lambda(t)$. Naj bo U_λ taka obrnljiva matrika, ki reši diferencialno enačbo $\dot{U}_\lambda = -U_\lambda M_\lambda$. Pri tem smo označili $\dot{U}_\lambda = \frac{d}{dt}(U_\lambda(t))$. Potem sta enačbi $\frac{d}{dt}(U_\lambda L_\lambda U_\lambda^{-1}) = 0$ in $\dot{L}_\lambda = [M_\lambda, L_\lambda]$ ekvivalentni. Res. Ker je U_λ obrnljiva, je $U_\lambda U_\lambda^{-1} = I$. Če odvajamo to enakost (po spremenljivki t), dobimo enakost $\dot{U}_\lambda U_\lambda^{-1} + U_\lambda (U_\lambda^{-1})^\cdot = 0$, zato je
$$(U_\lambda^{-1})^\cdot = -U_\lambda^{-1}\dot{U}_\lambda U_\lambda^{-1}\,.$$
Naslednje enačbe so ekvivalentne:
$$\begin{array}{rrcll}
& \frac{d}{dt}(U_\lambda L_\lambda U_\lambda^{-1}) & = & 0 & \\
& \dot{U}_\lambda L_\lambda U_\lambda^{-1} + U_\lambda \dot{L}_\lambda U_\lambda^{-1} - U_\lambda L_\lambda U_\lambda^{-1}\dot{U}_\lambda U_\lambda^{-1} & = & 0 & \Big/ \cdot U_\lambda \ \text{ in } \ \dot{U}_\lambda = -U_\lambda M_\lambda \\
U_\lambda^{-1}\cdot \Big/ & -U_\lambda M_\lambda L_\lambda + U_\lambda \dot{L}_\lambda + U_\lambda L_\lambda U_\lambda^{-1} U_\lambda M_\lambda & = & 0 & \\
& -M_\lambda L_\lambda + \dot{L}_\lambda + L_\lambda M_\lambda & = & 0 & \\
& \dot{L}_\lambda & = & [M_\lambda, L_\lambda]\,. &
\end{array}$$
Rešitev Laxove enačbe $\dot{L}_\lambda = [M_\lambda, L_\lambda]$ v zančni algebri je torej izospektralni tok
$$L_\lambda(t) = U_\lambda^{-1} L_\lambda(t_0) U_\lambda\,.$$
Ker se lastne vrednosti vzdolž rešitve Laxove enačbe ohranjajo, so tudi $\mathrm{Tr}(A_\lambda^m)$ za vsak m ohranitvene količine sistema.

Opomba 41 *Ker je karakteristični polinom enak*

$$\det(L_\lambda(t_0) - \mu I) = (-1)^r(\mu - \mu_1(\lambda)) \dots (\mu - \mu_r(\lambda)) = \sum_{j=1}^{r} (-1)^j \mathrm{Tr}(L^k_\lambda(t_0))\mu^{r-k},$$

so njegovi koeficienti ohranitvene količine sistema.

4.1 Laxova enačba

Za Neumannov sistem (T^*S^n, ω, H) (glej Uvod) je Hamiltonov sistem diferencialnih enačb (1.2) ekvivalenten Laxovi enačbi $\frac{d}{dt}L(\lambda) = [M(\lambda), L(\lambda)]$, pri čemer je $L(\lambda) = \begin{pmatrix} V(\lambda) & W(\lambda) \\ U(\lambda) & -V(\lambda) \end{pmatrix}$ za Jacobijeve polinome $U(\lambda)$, $V(\lambda)$ in $W(\lambda)$ in je $M(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda + |p|^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Kompleksificiran Neumannov sistem $((T^*S^n)^{\mathbb{C}}, \omega^{\mathbb{C}}, H^{\mathbb{C}})$, opisan v prejšnjem poglavju, ustreza Hamiltonovemu sistemu diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= P \\ \dot{P} &= -AQ - (|P|^2_{\mathbb{C}} - \langle Q, AQ \rangle_{\mathbb{C}})Q\,. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ta sistem je ekvivalenten Laxovi enačbi

$$\frac{d}{dt}L^{\mathbb{C}}(\lambda) = [M^{\mathbb{C}}(\lambda), L^{\mathbb{C}}(\lambda)] \tag{4.2}$$

pri čemer je $L^{\mathbb{C}}(\lambda) = \begin{pmatrix} V^{\mathbb{C}}(\lambda) & W^{\mathbb{C}}(\lambda) \\ U^{\mathbb{C}}(\lambda) & -V^{\mathbb{C}}(\lambda) \end{pmatrix}$ za Jacobijeve polinome s kompleksnimi koeficienti

$$\begin{aligned} U^{\mathbb{C}}(\lambda) &= A(\lambda) \sum_{j=1}^{n+1} \frac{Q_j^2}{\lambda - a_j} \\ V^{\mathbb{C}}(\lambda) &= A(\lambda) \sum_{j=1}^{n+1} \frac{-Q_j P_j}{\lambda - a_j} \\ W^{\mathbb{C}}(\lambda) &= A(\lambda) \sum_{j=1}^{n+1} \Big(-1 + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{-P_j^2}{\lambda - a_j} \Big) \end{aligned} \tag{4.3}$$

in $M^{\mathbb{C}}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda + |P|^2_{\mathbb{C}} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Trditev 42 *Hamiltonovemu sistemu $(T^*\mathcal{H}^n_{\mathcal{S}}, \omega_{\mathcal{S}}, H_{\mathcal{S}})$, ki je realna forma kompleksnega Neumannovega sistema $(T^*S^{n\mathbb{C}}, \omega^{\mathbb{C}}, H^{\mathbb{C}})$ glede na involucijo $\tau_{\mathcal{S}} : T^*\mathbb{C}^{n+1} \to T^*\mathbb{C}^{n+1}$, pripadata Hamiltonov sistem diferencialnih enačb*

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -Aq - (|p|^2_{\mathcal{S}} - \langle q, Aq \rangle_{\mathcal{S}})q\,. \end{aligned} \tag{4.4}$$

in Laxova enačba $\frac{d}{dt}L_{\mathcal{S}}(\lambda) = [M_{\mathcal{S}}(\lambda), L_{\mathcal{S}}(\lambda)]$ *za Laxov par*

$$L_{\mathcal{S}}(\lambda) = \begin{pmatrix} V_{\mathcal{S}}(\lambda) & W_{\mathcal{S}}(\lambda) \\ U_{\mathcal{S}}(\lambda) & -V_{\mathcal{S}}(\lambda) \end{pmatrix} \quad \textit{and} \quad M_{\mathcal{S}}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda + |p|^2_{\mathcal{S}} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Koeficienti matrike $L_{\mathcal{S}}(\lambda)$ *so polinomi*

$$\begin{aligned} U_{\mathcal{S}}(\lambda) &= A(\lambda)\sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},j}\frac{q_j^2}{\lambda - a_j} \\ V_{\mathcal{S}}(\lambda) &= A(\lambda)\sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},j}\frac{-q_j p_j}{\lambda - a_j} \\ W_{\mathcal{S}}(\lambda) &= A(\lambda)\Big(-1 + \sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},j}\frac{-p_j^2}{\lambda - a_j}\Big) \end{aligned} \tag{4.5}$$

pri čemer je $\epsilon_{\mathcal{S},j} = 1$*, če je* $j \in \mathcal{S}$*, in* $\epsilon_{\mathcal{S},j} = -1$*, če je* $j \in \mathcal{S}^{\mathsf{c}}$*.*

Opomba 43 *Polinoma* $U_{\mathcal{S}}$ *in* $W_{\mathcal{S}}$ *sta monična stopenj* n *in* $n+1$*. Polinom* $V_{\mathcal{S}}$ *v spošnem ni moničen in ima stopnjo* $n-1$*.*

Opomba 44 *Za* $\mathcal{S} = \{1, 2, \ldots, n+1\}$ *je Hamiltonov sistem* $(T^*\mathcal{H}^n_{\mathcal{S}}, \omega_{\mathcal{S}}, H_{\mathcal{S}})$ *prvoten Neumann sistem z Jacobijevimi polinomi* $U(\lambda)$*,* $V(\lambda)$ *in* $W(\lambda)$ *kot v (1.7). V tem primeru je* $\epsilon_{\mathcal{S},j} = 1$ *za vsak* j*.*

Opomba 45 *Trditev je neodvisna od urejenosti konstant vzmeti* $a_1, \ldots, a_{n+1}$*. Zato je dovolj, da trditev dokažemo za poljubno podmnožico oblike* $\mathcal{S} = \{1, \ldots, k\}$*.*

Dokaz: Pokažimo najprej, da sistem diferencialnih enačb

$$\dot{q} = p\,, \qquad \dot{p} = -Aq - (|p|^2_k - \langle q, Aq\rangle_k)q$$

pripada Hamiltonovemu sistemu $(T^*\mathcal{H}^n_k, \omega_k, H_k)$. Spomnimo se, da je $\omega_k = \sum_{j=1}^{n+1}\epsilon_j dq_j \wedge dp_j$ in

$$H_k(q,p) \;=\; \frac{1}{2}\big(|q|^2_k|p|^2_k - \langle q,p\rangle^2_k\big) + \frac{1}{2}(2 - |q|^2_k)\langle q, Aq\rangle_k\,.$$

Za sistem na $T^*\mathbb{R}^{n+1}_k$ je dovolj zapisati diferencialne enačbe

$$\begin{aligned} \dot{q_j} &= \{q_j, H_k\}_{kT^*\mathcal{H}^n_k} \\ \dot{p_j} &= \{p_j, H_k\}_{kT^*\mathcal{H}^n_k} \end{aligned}$$

za Poissonov oklepaj $\{f,g\}_k = \sum_{j=1}^{n+1}\epsilon_j\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j}\right)$. Z direktnim računanjem dobimo, da je

$$\begin{aligned} \{q_j, H_k\}_k &= \sum_{l=1}^{n+1}\epsilon_l\left(\frac{\partial q_j}{\partial q_l}\frac{\partial H_k}{\partial p_l} - \frac{\partial q_j}{\partial p_l}\frac{\partial H_k}{\partial q_l}\right) \;=\; \epsilon_j\frac{\partial H_k}{\partial p_j} = \\ &= \epsilon_j\cdot\frac{1}{2}\left(|q|^2_k\cdot 2\epsilon_j p_j - 2\langle q,p\rangle_k\epsilon_j q_j\right) \;=\; |q|^2_k p_j - \langle q,p\rangle_k q_j \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}
\{p_j, H_k\}_k &= \sum_{l=1}^{n+1} \epsilon_l \left(\frac{\partial p_j}{\partial q_l}\frac{\partial H_k}{\partial p_l} - \frac{\partial p_j}{\partial p_l}\frac{\partial H_k}{\partial q_l} \right) = -\epsilon_j \frac{\partial H_k}{\partial q_j} = \\
&= -\epsilon_j \cdot \frac{1}{2}\left(|p|_k^2 \cdot 2\epsilon_j q_j - 2\langle q, p\rangle_k \epsilon_j p_j\right) - \epsilon_j \cdot \frac{1}{2}\left(-2\epsilon_j q_j \langle q, Aq\rangle_k + (2-|q|_k^2) 2\epsilon_j a_j q_j\right) = \\
&= -|p|_k^2 q_j + \langle q, p\rangle_k p_j + \langle q, Aq\rangle_k q_j - (2-|q|_k^2) a_j q_j \, .
\end{aligned}$$

Ker na kotangentnem svežnju $T^*\mathcal{H}^n_k$ velja $|q|_k^2 = 1$ in $\langle q, p\rangle_k = 0$, je sistem diferencialnih enačb enostavno

$$\begin{aligned}
\dot{q}_j &= p_j \\
\dot{p}_j &= -a_j q_j - \Big(|p|_k^2 - \langle q, Aq\rangle_k\Big) q_j \, .
\end{aligned}$$

Na kotangentnem svežnju $T^*\mathbb{C}^{n+1}$ imamo kompleksne koordinate $(Q_1, \dots, Q_{n+1}, P_1, \dots, P_{n+1})$ in pišemo $Q_j = q_{j,0} + iq_{j,1}$ in $P_j = p_{j,0} + ip_{j,1}$. Množica fiksnih točk involucije $\tau_k : T^*\mathbb{C}^{n+1} \to T^*\mathbb{C}^{n+1}$ je podmnožica točk $(Q_1, \dots, Q_{n+1}, P_1, \dots, P_{n+1})$ v $T^*\mathbb{C}^{n+1}$, za katere je

$$\begin{aligned}
q_{1,1} = \ldots = q_{k,1} = g_{k+1,0} = \ldots = q_{n+1,0} &= 0 \\
p_{1,1} = \ldots = p_{k,1} = p_{k+1,0} = \ldots = p_{n+1,0} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Kompleksen Hamiltonov sistem (4.1) in kompleksna Laxova enačba (4.2) sta ekvivalentna za vse kompleksne spremenljivke $Q_1, \dots, Q_{n+1}, P_1, \dots, P_{n+1}$, torej sta ekvivalentna tudi pri pogoju (4.6). Če identificiramo koordinate

$$\{(q_{1,0}, \dots, q_{k,0}, iq_{k+1,1}, \dots, iq_{n+1,1}, p_{1,0}, \dots, p_{k,0}, ip_{k+1,1}, \dots, ip_{n+1,1})\} \cong \{(q_1, \dots, q_{n+1}, p_1, \dots, p_n)\}$$

v $T^*\mathbb{R}^{n+1}_k$ s koordinatami $(q_1, \dots, q_{n+1}, p_1, \dots, p_{n+1}) \in T^*\mathbb{R}^{n+1}$, so prve enačbe Hamiltonovega sistema (4.1) enostavno

$$\dot{q} = p \, ,$$

drugi sklop enačb pa

$$\dot{p} = -Aq - (|p|_k^2 - \langle q, Aq\rangle_k) q \, .$$

Oglejmo si še matriki Laxove enačbe (4.2), zoženi na $T^*\mathbb{R}^{n+1}_k$. Matrika $M^{\mathbb{C}}(\lambda)$ je očitno matrika $M_k(\lambda)$ iz trditve. Nazorno, za matriko $L^{\mathbb{C}}(\lambda)$ pa si oglejmo izraze Q_j^2, P_j^2 in $Q_j P_j$:

$$\begin{aligned}
Q_j^2\big|_{T^*\mathbb{R}^{n+1}_k} &= (q_{j,0} + iq_{j,1})^2\big|_{T^*\mathbb{R}^{n+1}_k} = \epsilon_j q_j^2 \\
P_j^2\big|_{T^*\mathbb{R}^{n+1}_k} &= (p_{j,0} + ip_{j,1})^2\big|_{T^*\mathbb{R}^{n+1}_k} = \epsilon_j p_j^2 \\
Q_j P_j\big|_{T^*\mathbb{R}^{n+1}_k} &= (q_{j,0} + iq_{j,1})(p_{j,0} + ip_{j,1})\big|_{T^*\mathbb{R}^{n+1}_k} = \epsilon_j q_j p_j
\end{aligned}$$

za $\epsilon_1 = \ldots = \epsilon_k = 1$ in $\epsilon_{k+1} = \ldots = \epsilon_{n+1} = -1$. Potem so koeficienti zožitve matrike $L^{\mathbb{C}}(\lambda)$ na kotangentni sveženj $T^*\mathbb{R}^{n+1}_k$ res polinomi $U_k(\lambda)$, $V_k(\lambda)$ and $W_k(\lambda)$. Oblika matrike $L_k(\lambda)$ sledi neposredno iz Trditve 24. Ker sta ekvivalentna kompleksna Laxova enačba in kompleksen Hamiltonov sistem diferencialnih enačb, sta potem ekvivalentna tudi Laxova enačba $\frac{d}{dt} L_k(\lambda) = [M_k(\lambda), L_k(\lambda)]$ in sistem diferencialnih enačb (4.4).

$\square$

4.2 Prvi integrali

Z Laxovo enačbo $\frac{d}{dt}L_{\mathcal{S}}(\lambda) = [M_{\mathcal{S}}(\lambda), L_{\mathcal{S}}(\lambda)]$ realne forme kompleksnega Neumannovega sistema je definirana spektralna krivulja s karakteristično enačbo $\det(L_{\mathcal{S}}(\lambda) - \mu I) = 0$. Če uporabimo oznake za koeficiente matrike $L_{\mathcal{S}}(\lambda)$ kot v Trditvi 42, je karakteristična enačba

$$\det\begin{pmatrix} V_{\mathcal{S}}(\lambda) - \mu & W_{\mathcal{S}}(\lambda) \\ U_{\mathcal{S}}(\lambda) & -V_{\mathcal{S}}(\lambda) - \mu \end{pmatrix} = 0\,,$$

oziroma

$$\mu^2 = U_{\mathcal{S}}(\lambda)W_{\mathcal{S}}(\lambda) + V_{\mathcal{S}}^2(\lambda)\,.$$

Kot v primeru Neumannovega sistema označimo z $f_{\mathcal{S}}(\lambda)$ polinom $f_{\mathcal{S}}(\lambda) := U_{\mathcal{S}}(\lambda)W_{\mathcal{S}}(\lambda) + V_{\mathcal{S}}^2(\lambda)$. S preoblikovanjem polinoma $f_{\mathcal{S}}(\lambda)$ (kot v [23]) dobimo ohranitvene količine sistema v znanih oblikah

$$\begin{aligned}
f_{\mathcal{S}}(\lambda) &= A^2(\lambda)\Big(\sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},j}\frac{q_j^2}{\lambda - a_j}\Big(-1 + \sum_{l=1}^{n+1}\epsilon_{\mathcal{S},l}\frac{-p_l^2}{\lambda - a_l}\Big) + \Big(\sum_{j=1}^{n+1}\epsilon_{\mathcal{S},j}\frac{-q_j p_j}{\lambda - a_j}\Big)^2\Big) = \\
&= A^2(\lambda)\Big(-\sum_{j=1}^{n+1}\epsilon_{\mathcal{S},j}\frac{q_j^2}{\lambda - a_j} - \sum_{j,l=1}^{n+1}\epsilon_{\mathcal{S},j}\epsilon_{\mathcal{S},l}\frac{q_j^2 p_l^2}{(\lambda-a_j)(\lambda-a_l)} + \sum_{j,l=1}^{n+1}\epsilon_{\mathcal{S},j}\epsilon_{\mathcal{S},l}\frac{q_j p_j q_l p_l}{(\lambda-a_j)(\lambda-a_l)}\Big) = \\
&= A^2(\lambda)\Big(-\sum_{j=1}^{n+1}\epsilon_{\mathcal{S},j}\frac{q_j^2}{\lambda - a_j} - \sum_{\substack{j,l=1\\ l\neq j}}^{n+1}\epsilon_{\mathcal{S},j}\epsilon_{\mathcal{S},l}\frac{q_j^2 p_l^2}{(\lambda-a_j)(\lambda-a_l)} + \sum_{\substack{j,l=1\\ l\neq j}}^{n+1}\epsilon_{\mathcal{S},j}\epsilon_{\mathcal{S},l}\frac{q_j p_j q_l p_l}{(\lambda-a_j)(\lambda-a_l)}\Big) = \\
&= A^2(\lambda)\Bigg(-\sum_{j=1}^{n+1}\epsilon_{\mathcal{S},j}\frac{q_j^2}{\lambda - a_j} - \sum_{\substack{j=1\\ l>j}}^{n+1}\epsilon_{\mathcal{S},j}\epsilon_{\mathcal{S},l}\frac{q_j^2 p_l^2 - 2q_j p_j q_l p_l + q_l^2 p_j^2}{(\lambda - a_j)(\lambda - a_l)}\Bigg) = \qquad (4.7) \\
&= A^2(\lambda)\Bigg(-\sum_{j=1}^{n+1}\epsilon_{\mathcal{S},j}\frac{q_j^2}{\lambda - a_j} - \sum_{\substack{j=1\\ l\neq j}}^{n+1}\epsilon_{\mathcal{S},j}\epsilon_{\mathcal{S},l}\frac{K_{j,l}^2}{(\lambda - a_j)(a_j - a_l)}\Bigg) = \\
&= A^2(\lambda)\Big(-\sum_{j=1}^{n+1}\epsilon_{\mathcal{S},j}\frac{1}{\lambda - a_j}\Big(q_j^2 + \sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n+1}\epsilon_{\mathcal{S},l}\frac{K_{j,l}^2}{a_j - a_l}\Big)\Big) = \\
&= A^2(\lambda)\Big(-\sum_{j=1}^{n+1}\epsilon_{\mathcal{S},j}\frac{G_j}{\lambda - a_j}\Big).
\end{aligned}$$

za $G_{\mathcal{S},j} := q_j^2 + \sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n+1}\epsilon_{\mathcal{S},l}\frac{K_{j,l}^2}{a_j - a_l}$.

Lema 46 *Ohranitvene količine $G_{\mathcal{S},j}$ za $j = 1, \ldots, n+1$ so natanko*

$$G_{\mathcal{S},j} \;=\; \epsilon_{\mathcal{S},j}F_{j,\mathcal{S}} \;\stackrel{def}{=}\; \epsilon_{\mathcal{S},j}\frac{1}{2}(F_j^{\mathbb{C}} + \tau_{\mathcal{S}}(F_j^{\mathbb{C}}))\Big|_{T^*\mathbb{R}_{\mathcal{S}}^{n+1}}\,,$$

pri čemer so funkcije F_j prvi integrali Neumannovega sistema na T^*S^n (glej (1.3)).

Dokaz: Po Trditvi 24 moramo preveriti, da je $G_{\mathcal{S},j}$ do znaka natanko zožitev kompleksificiranega prvega integrala $F_j^{\mathbb{C}}$ Neumannovga sistema na prostor $T^*\mathbb{R}^{n+1}_{\mathcal{S}}$. Zapišimo kompleksificiran integral $F_j^{\mathbb{C}}$ v obliki

$$F_j^{\mathbb{C}}(Q,P) = (q_{j,0} + iq_{j,1})^2 + \sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n+1} \frac{\big((q_{j,0}+iq_{j,1})(p_{l,0}+ip_{l,1}) - (q_{l,0}+iq_{l,1})(p_{j,0}+ip_{j,1})\big)^2}{a_j - a_l}\,.$$

Za zožitev funkcije $F_j^{\mathbb{C}}$ na $T^*\mathbb{R}^{n+1}_{\mathcal{S}}$ potem velja:

1. če je $j \in \mathcal{S}$, ima zožen integral obliko

$$F_{j,\mathcal{S}}(q,p) = q_j^2 + \sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},l} \frac{(q_j p_l - q_l p_j)^2}{a_j - a_l} = q_j^2 + \sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},l} \frac{K_{j,l}^2}{a_j - a_l}\,,$$

2. če je $j \in \{1,\dots,n+1\} \setminus \mathcal{S}$, pa dobimo

$$F_{j,\mathcal{S}}(q,p) = -q_j^2 - \sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},l} \frac{(q_j p_l - q_l p_j)^2}{a_j - a_l} = -\Big(q_j^2 + \sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},l} \frac{K_{j,l}^2}{a_j - a_l}\Big)\,.$$

□

Izrek 47 *Funkcije*

$$G_{\mathcal{S},j}(q,p) = q_j^2 + \sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},l} \frac{K_{j,l}^2}{a_j - a_l}\ ; \qquad j = 1,2,\dots,n+1 \tag{4.8}$$

so prvi integrali Hamiltonovega sistema $(T^*\mathcal{H}^n_{\mathcal{S}}, \omega_{\mathcal{S}}, H_{\mathcal{S}})$. Na kotangentnem svežnju $T^*\mathcal{H}^n_{\mathcal{S}}$ veljata enakosti $\sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},j} G_{\mathcal{S},j} = 1$ in $\sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},j} a_j G_{\mathcal{S},j} = 2H_{\mathcal{S}}$.

Preden pokažemo zgornji izrek, se spomnimo leme, ki je dokazana v [23].

Lema 48 *Naj bo (N,ω_N) simplektična podmnogoterost v (M,ω) in naj bodo f,g,h funkcije na M, pri čemer je $df \neq 0$ in $f = 0$ na N. Če za Poissonov oklepaj na M velja $\{f,g\} = \{f,h\} = 0$, potem za Poissonov oklepaj na N velja: $\{g,h\}_N = 0$.*

Dokaz: Po zgornji lemi so $G_{\mathcal{S},j}$ prvi integrali sistema, če velja $\{G_{\mathcal{S},j}, G_{\mathcal{S},l}\}_{\mathcal{S}} = 0$ in $\{\phi_{1,\mathcal{S}}, G_{\mathcal{S},j}\}_{\mathcal{S}} = 0$ za funkcijo $\phi_{1,\mathcal{S}} = |q|^2_{\mathcal{S}} - 1$, ki definira hiperboloid $\mathcal{H}^n_{\mathcal{S}}$. Naj bo

$$\psi_{\mathcal{S},j}(q,p) := \sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},l} \frac{K_{j,l}^2(q,p)}{a_j - a_l}\,.$$

Potem lahko pišemo $G_{\mathcal{S},j}(q,p) = q_j^2 + \psi_{\mathcal{S},j}(q,p)$.
V nadaljevanju dokaza bomo zaradi preglednosti izračunov spuščali argumente funkcij. Oglejmo si parcialna odvoda funkcije $K_{j,l}^2$ po spremenljivkah q_m in p_m:

$$\frac{\partial K_{j,l}^2}{\partial q_m} = \frac{\partial (q_j p_l - q_l p_j)^2}{\partial q_m} = \begin{cases} -2K_{j,m}p_j & ;\ m = l \\ 2K_{m,l}p_l & ;\ m = j \\ 0 & ;\ m \notin \{j,l\} \end{cases} \tag{4.9}$$

in

$$\frac{\partial K_{j,l}^2}{\partial p_m} = \frac{\partial (q_j p_l - q_l p_j)^2}{\partial p_m} = \begin{cases} 2K_{j,m}q_j & ;\ m = l \\ -2K_{m,l}q_l & ;\ m = j \\ 0 & ;\ m \notin \{j,l\} \end{cases} . \tag{4.10}$$

Pokažimo najprej enakost $\{\phi_{1,\mathcal{S}}, G_{\mathcal{S},j}\}_{\mathcal{S}} = 0$. Ker je

$$\{\phi_{1,\mathcal{S}}, G_{\mathcal{S},j}\}_{\mathcal{S}} = \sum_{l=1}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},j} \left(\frac{\partial \phi_{1,\mathcal{S}}}{\partial q_l} \frac{\partial G_{\mathcal{S},j}}{\partial p_l} - \frac{\partial \phi_{1,\mathcal{S}}}{\partial p_l} \frac{\partial G_{\mathcal{S},j}}{\partial q_l} \right)$$

in je $\frac{\partial \phi_{1,\mathcal{S}}}{\partial p_l} = 0$ za vsak $l = 1, \ldots, n+1$, izračunajmo le parcialne odvode funkcije $G_{\mathcal{S},j}$ po spremenljivki p_l:

$$\frac{\partial G_{\mathcal{S},j}}{\partial p_l} = \frac{\partial \psi_{\mathcal{S},j}}{\partial p_l} = \begin{cases} 2\epsilon_{\mathcal{S},l} \dfrac{K_{j,l} q_j}{a_j - a_l} & ;\ l \neq j \\ -2 \displaystyle\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},m} \dfrac{K_{j,m} q_m}{a_j - a_m} & ;\ l = j \end{cases} \tag{4.11}$$

Potem je

$$\begin{aligned} \{\phi_{1,\mathcal{S}}, G_{\mathcal{S},j}\}_{\mathcal{S}} &= 2 \sum_{l=1}^{n+1} q_l \frac{\partial G_{\mathcal{S},j}}{\partial p_l} = \\ &= 2 \Big(-2q_j \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},m} \frac{K_{j,m} q_m}{a_j - a_m} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n+1} q_l 2\epsilon_{\mathcal{S},l} \frac{K_{j,l} q_j}{a_j - a_l} \Big) \ = \ 0 \,. \end{aligned}$$

Preden izračunamo $\{G_{\mathcal{S},j}, G_{,\mathcal{S},l}\}_{\mathcal{S}}$ pa si oglejmo nekaj pomožnih oklepajev:

$$\{K_{j,l}, K_{k,m}\}_{\mathcal{S}} = 0 \qquad \text{če je} \quad \{j,l\} \cap \{k,m\} = \emptyset$$

in

$$\{K_{j,l}, K_{j,m}\}_{\mathcal{S}} = \epsilon_{\mathcal{S},j} K_{l,m} \,.$$

Za $l \neq j$ potem velja

$$\begin{aligned}
\{\psi_{\mathcal{S},j}, \psi_{\mathcal{S},l}\}_{\mathcal{S}} &= 4 \sum_{\substack{\alpha\neq j\\ \beta\neq l}} \frac{\epsilon_{\mathcal{S},\alpha}}{a_j - a_\alpha} \frac{\epsilon_{\mathcal{S},\beta}}{a_l - a_\beta} K_{j,\alpha} K_{l,\beta} \{K_{j,\alpha}, K_{l,\beta}\}_{\mathcal{S}} = \\
&= 4 \sum_{\substack{\alpha\neq j\\ \beta\neq l}} \frac{\epsilon_{\mathcal{S},\alpha}}{a_j - a_\alpha} \frac{\epsilon_{\mathcal{S},\beta}}{a_l - a_\beta} \left\{ \begin{array}{rl} \epsilon_{\mathcal{S},\alpha} K_{j,l} K_{j,\alpha} K_{l,\alpha} & ;\ \alpha = \beta \\ -\epsilon_{\mathcal{S},j} K_{\alpha,l} K_{j,\alpha} K_{l,j} & ;\ j = \beta \\ -\epsilon_{\mathcal{S},l} K_{j,\beta} K_{j,l} K_{l,\beta} & ;\ l = \alpha \end{array} \right. = \\
&= 4K_{j,l} \sum_{\substack{\alpha\neq j\\ \text{or } l}} \frac{\epsilon_{\mathcal{S},\alpha}\epsilon_{\mathcal{S},\alpha}\epsilon_{\mathcal{S},\alpha}}{(a_j - a_\alpha)(a_l - a_\alpha)} K_{j,\alpha} K_{l,\alpha} - 4K_{l,j} \sum_{\alpha\neq j} \frac{\epsilon_{\mathcal{S},\alpha}\epsilon_{\mathcal{S},j}\epsilon_{\mathcal{S},j}}{(a_j - a_\alpha)(a_l - a_j)} K_{\alpha,l} K_{j,\alpha} - \\
&\quad -4K_{j,l} \sum_{\beta\neq l} \frac{\epsilon_{\mathcal{S},l}\epsilon_{\mathcal{S},\beta}\epsilon_{\mathcal{S},l}}{(a_j - a_l)(a_l - a_\beta)} K_{j,\beta} K_{l,\beta} = \\
&= 4K_{j,l} \sum_{\substack{\alpha\neq j\\ \text{or } l}} \epsilon_{\mathcal{S},\alpha} \Big(\frac{1}{(a_j - a_\alpha)(a_l - a_\alpha)} - \frac{1}{(a_l - a_j)(a_j - a_\alpha)} - \frac{1}{(a_j - a_l)(a_l - a_\alpha)} \Big) K_{j,\alpha} K_{l,\alpha} \\
&= 4K_{j,l} \sum_{\substack{\alpha\neq j\\ \text{or } l}} \epsilon_{\mathcal{S},l} \frac{a_l - a_j - (a_l - a_\alpha) + a_j - a_\alpha}{(a_j - a_\alpha)(a_l - a_\alpha)(a_l - a_j)} K_{j,\alpha} K_{l,\alpha} \ = \ 0\,.
\end{aligned}$$

Še enkrat uporabimo (4.11) in dobimo

$$\begin{aligned}
\{G_{\mathcal{S},j}, G_{\mathcal{S},l}\}_{\mathcal{S}} &= \{q_j^2, q_l^2\}_{\mathcal{S}} + \{q_j^2, \psi_{\mathcal{S},l}\}_{\mathcal{S}} + \{\psi_{\mathcal{S},j}, q_l^2\}_{\mathcal{S}} = \\
&= 0 + \epsilon_{\mathcal{S},j} 2q_j \frac{\partial \psi_{\mathcal{S},l}}{\partial p_j} - \epsilon_{\mathcal{S},l} 2q_l \frac{\partial \psi_{\mathcal{S},j}}{\partial p_l} = \\
&= \epsilon_{\mathcal{S},j} 2q_j \epsilon_{\mathcal{S},j} \frac{2K_{l,j} q_l}{a_l - a_j} - \epsilon_{\mathcal{S},l} \epsilon_{\mathcal{S},l} \frac{2K_{j,l} q_j}{a_j - a_l} 2q_l \ = \ 0\,.
\end{aligned}$$

Na kotangentnem svežnju $T^*\mathcal{H}^n_{\mathcal{S}}$ je $\sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},j} q_j^2 = 1$ in $\sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},j} q_j p_j = 0$. Če uporabimo ti dve dejstvi ter vsoti $\sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},j} G_j$ in $\sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_{\mathcal{S},j} a_j G_j$ smiselno preoblikujemo, je obe enakosti, ki jih v trditvi napovemo, enostavno pokazati:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_j G_j &= \sum_{j=1}^{n+1} \Big(\epsilon_j q_j^2 + \sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n+1} \epsilon_j \epsilon_l \frac{K_{j,l}^2}{a_j - a_l} \Big) = \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_j q_j^2 + \sum_{\substack{j,l=1\\ l\neq j}}^{n+1} \epsilon_j \epsilon_l \frac{K_{j,l}^2}{a_j - a_l} = \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_j q_j^2 + \sum_{j<l} \epsilon_j \epsilon_l \Big(\frac{K_{j,l}^2}{a_j - a_l} - \frac{K_{l,j}^2}{a_l - a_j} \Big) = \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_j q_j^2 \ = \ 1
\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_j a_j G_j &= \sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_j a_j q_j^2 + \sum_{\substack{j,l=1\\ l\neq j}}^{n+1} \epsilon_j a_j \epsilon_l \frac{K_{j,l}^2}{a_j - a_l} = \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_j a_j q_j^2 + \sum_{j<l} \epsilon_j \epsilon_l K_{j,l}^2 \Big(\frac{a_j}{a_j - a_l} + \frac{a_l}{a_l - a_j} \Big) = \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_j a_j q_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^{n+1} \epsilon_j \epsilon_l \big(q_j p_l - q_l p_j \big)^2 = \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_j a_j q_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^{n+1} \epsilon_j \epsilon_l \big(q_j^2 p_l^2 + q_l^2 p_j^2 - 2 q_j p_j q_l p_l \big) = \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_j a_j q_j^2 + \sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_j q_j^2 \sum_{l=1}^{n+1} \epsilon_l p_l^2 - \Big(\sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_j q_j p_j \Big)^2 = \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_j a_j q_j^2 + \sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_j p_j^2 \; = \; 2H \,.
\end{aligned}$$

□

4.3 Dve družini integralov Neumannovega sistema

Naj bodo $F_j(q,p)$ integrali Uhlenbeckove

$$F_j(q,p) \;=\; G_{\{1,\ldots,n+1\},j} \;=\; q_j^2 + \sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n+1} \frac{K_{j,l}^2}{a_j - a_l} \tag{4.12}$$

za Neumannov sistem na sferi (glej (1.3)). Drugi sistem integralov Neumannovega sistema dobimo z Laxovo enačbo v matričnih polinomih, katerih koeficienti so $(n+1) \times (n+1)$ matrike. Tako Laxovo enačbo in prve integrale najdemo v članku avtorja T. Ratiu [26].

Preden eksplicitno zapišemo integrale iz omenjene druge družine in poiščemo zvezo med integrali obeh družin, vpeljimo nekaj smiselnih oznak. Naj bosta Q in K matriki

$$Q = (q_j q_l) = \begin{pmatrix} q_1 q_1 & \ldots & q_1 q_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n+1} q_1 & \ldots & q_{n+1} q_{n+1} \end{pmatrix}, \qquad K = (K_{j,l}) = \begin{pmatrix} K_{1,1} & \ldots & K_{1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n+1,1} & \ldots & K_{n+1,n+1} \end{pmatrix},$$

pri čemer je $K_{j,l} = q_j p_l - q_l p_j$. Naj bo $A = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_{n+1})$ diagonalna matrika. Prvi integrali v involuciji druge družine, ki so rezultat v [26], so funkcije na $sym \times \mathfrak{so}(n+1)$ oblike

$$f_k(Q,K) = \frac{1}{2(k+1)} \mathrm{Tr} \left(- \sum_{i=0}^{k} A^i Q A^{k-i} + \sum_{\substack{i+r+s=k-1\\ i,r,s\geq 0}} A^i K A^r K A^s \right) \qquad \text{za} \quad k = 1, \ldots, n\,. \tag{4.13}$$

Ker bi radi primerjali integrale $F_j(q,p)$ z integrali $f_k(Q,K)$, moramo integrale f_k zapisati kot funkcije spremenljivk q in p, to je $f_k(Q(q,p),K(q,p)) = I_k(q,p)$

Pred tem elegantno zmnožimo matrike, ki jih potrebujemo v (4.13). Matrika A^m je diagonalna matrika

$$A^m = \begin{pmatrix} a_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & a_{n+1}^m \end{pmatrix} .$$

Koeficient v j-ti vrstici in m-tem stolpcu matrike A^iQ je $(A^iQ)_{jm} = a_j^i q_j q_m$, matrike A^iQA^{k-i} pa $(A^iQA^{k-i})_{jm} = a_j^i a_m^{k-i} q_j q_m$. Potem so diagonalni elementi matrike A^iQA^{k-i} enaki $(A^iQA^{k-i})_{jj} = a_j^k q_j^2$ in je zato

$$\mathrm{Tr}\Big(-\sum_{i=0}^{k} A^iQA^{k-i}\Big) = -(k+1)\sum_{j=1}^{n+1} a_j^k q_j^2 .$$

Za drugo vsoto v (4.13) je pravtako $(KA^s)_{jm} = a_m^s K_{j,m}$ in $(A^iKA^r)_{jm} = a_j^i a_m^r K_{j,m}$ in zato

$$(A^iKA^rKA^s)_{jm} = \sum_{l=1}^{n+1} (A^iKA^r)_{jl} \cdot (KA^s)_{lm} = \sum_{l=1}^{n+1} a_j^i a_l^r a_m^s K_{j,l} K_{l,m} .$$

Potemtakem je

$$\mathrm{Tr}(A^iKA^rKA^s) = \sum_{j=1}^{n+1} (A^iKA^rKA^s)_{jj} = -\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{l=1}^{n+1} a_j^{i+s} a_l^r K_{j,l}^2$$

in lahko zapišemo integrale I_k v obliki

$$I_k(q,p) = f_k(Q(q,p),K(q,p)) = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1} a_j^k q_j^2 - \frac{1}{2(k+1)} \sum_{\substack{i+r+s=k-1 \\ i,r,s\geq 0}} \left(\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{l=1}^{n+1} a_j^{i+s} a_l^r K_{j,l}^2\right) . \tag{4.14}$$

Trditev 49 *Za integrale Uhlenbeckove $F_j(q,p)$ in integrale $I_k(q,p) = f_k(Q(q,p),K(q,p))$ po T. Ratiu veljajo naslednje zveze*

$$-2I_k(q,p) = \sum_{j=1}^{n+1} a_j^k F_j(q,p) \qquad \textit{za} \quad k = 1,\dots,n . \tag{4.15}$$

Dokaz: Za $k=1$ je $I_1(q,p) = -H(q,p)$ (glej [26]). Po Izreku 47 zgoraj pa vemo, da je $\sum_{j=1}^{n+1} a_j G_j = 2H$.

Preverimo enakosti še za $k > 1$. Če v (4.14) zamenjamo vrstni red seštevanja in pišemo $r =$

$k-1-(i+s)$ ter s tem $i+s$ postane tekoči indeks (od 0 do $l-1$), je

$$\begin{aligned}
I_k(q,p) &= -\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n+1} a_j^k q_j^2 + \frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{l=1}^{n+1} K_{j,l}^2 \sum_{\substack{i+s=0\\ i,s\geq 0}}^{k-1} a_j^{i+s} a_l^{k-1-(i+s)}\right) = \\
&= -\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n+1} a_j^k q_j^2 + \frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{l>j} K_{j,l}^2 \sum_{m=0}^{k-1}(k+1) a_j^m a_l^{k-1-m}\right) = \\
&= -\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n+1} a_j^k q_j^2 + \sum_{j=1}^{n+1}\sum_{l>j} K_{j,l}^2 \sum_{m=0}^{k-1} a_j^m a_l^{k-1-m}\right) .
\end{aligned}$$

Drugi enačaj zgoraj je upravičen zaradi simetrije med a_j in a_l ter enakosti $K_{j,l}^2 = K_{l,j}^2$. Za $k>1$ lahko razstavimo izraz $a_j^k - a_l^k = (a_j - a_l)\sum_{m=0}^{k-1} a_j^m a_l^{k-1-m}$. Potem je

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n+1} a_j^k G_j &= \sum_{j=1}^{n+1} a_j^k q_j^2 + \sum_{j=1}^{n+1}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n+1} \frac{a_j^k K_{j,l}^2}{a_j - a_l} = \sum_{j=1}^{n+1} a_j^k q_j^2 + \sum_{j=1}^{n+1}\sum_{l>j} \frac{(a_j^k - a_l^k) K_{j,l}^2}{a_j - a_l} = \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} a_j^k q_j^2 + \sum_{j=1}^{n+1}\sum_{l>j} K_{j,l}^2 \sum_{m=0}^{k-1} a_j^m a_l^{k-1-m}
\end{aligned}$$

in trditev je s tem dokazana.

$\square$

Poglavje 5

Izrek Adlerja, Kostanta in Symesa

V tem pogavju ponovimo teorijo izreka Adlerja, Kostanta in Symesa (krajše AKS izreka). Naj bo $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra in $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$. Z AKS konstrukcijo dobimo Hamiltonove sisteme in prve integrale sistema na dualu Liejeve algebre $\mathfrak{a}^*$ (glej [5], [27]). Uporaba AKS izreka na zančni algebri $\widetilde{\mathfrak{gl}}(r, \mathbb{C})$ in na njenih podalgebrah je obširno opisana v [1], [2], [16]. Poseben primer sistemov v [1], [2], [16] je tudi Neumannov sistem v zančni algebri $\mathfrak{a}^* = \widetilde{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{R})^{+*}$. Poglavje zaključimo z domnevo, kako spremeniti splošno teorijo, da bodo realne forme Neunnovega sistema le posebni primeri velike nove družine integrabilnih sistemov.

5.1 R-matrika, Hamiltonov sistem in prvi integrali

Naj bo $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ Liejev algebra, to je končno dimenzionalen vektorski prostor (realen ali kompleksen), na katerem je definiran bilinaren antisimetričen Liejev oklepaj $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, ki ustreza Jacobijevi identiteti $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ za vsak $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Označimo z $R : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ linearno preslikavo na $\mathfrak{g}$ in definirajmo nov bilinearen antisimetričen oklepaj

$$\begin{aligned} [\ ,\ ]_R : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ (X, Y) &\longmapsto [X, Y]_R = [RX, Y] + [X, RY] \end{aligned}$$

in ga imenujmo R-oklepaj. Za R-oklepaj v splošnem ne velja Jacobijeva identiteta. V [27] je dan potreben in zadosten pogoj, da R-oklepaj usreza Jacobijevi identiteti:

Trditev 50 *Naj bo $B_R(X, Y) := [RX, RY] - R([RX, Y] + [X, RY])$. Za R-oklepaj $[\ ,\ ]_R$ velja Jacobijeva identiteta natanko tedaj, ko za poljubne $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ velja enakost*

$$[B_R(X, Y), Z] + [B_R(Y, Z), X] + [B_R(Z, X), Y] = 0\,. \tag{5.1}$$

Opomba 51 $B_R(X, Y) = [RX, RY] - R[X, Y]_R$.

Dokaz: Oglejmo si najprej izraz $[X, [Y, Z]_R]_R$. Upoštevamo definicijo R-oklepaja in dobimo:

$$\begin{aligned} [X, [Y, Z]_R]_R &= [RX, [Y, Z]_R] + [X, R[Y, Z]_R] = \\ &= [RX, [RY, Z]] + [RX, [Y, RZ]] + [X, R[Y, Z]_R]\,. \end{aligned}$$

Oglejmo si še enačbe, ki so ekvivalentne enačbi (5.1). Pri naslednjih zaporednih ekvivalencah bomo upošteveli definicijo B_R, bilinearnost oklepaja $[\ ,\ ]$, Jacobijevo identiteto za $[\ ,\ ]$, antisimetričnost oklepaja $[\ ,\ ]$ in enakost zgoraj:

$$
\begin{aligned}
[[RX,RY]-R[X,Y]_R,Z]+[[RY,RZ]-R[Y,Z]_R,X]+[[RZ,RX]-R[Z,X]_R,Y] &= 0 \\
[[RX,RY],Z]-[R[X,Y]_R,Z]+ & \\
+[[RY,RZ],X]-[R[Y,Z]_R,X]+[[RZ,RX],Y]-[R[Z,X]_R,Y] &= 0 \\
-[[RY,Z],RX]-[[Z,RX],RY]-[R[X,Y]_R,Z]-[[RZ,X],RY]-[[X,RY],RZ]- & \\
-[R[Y,Z]_R,X]-[[RX,Y],RZ]-[[Y,RZ],RX]-[R[z,x]_R,Y] &= 0 \\
[RX,[RY,Z]]+[RX,[Y,RZ]]+[X,[Y,Z]_R]+[RY,[RZ,X]]+[RY,[Z,RX]]+ & \\
+[Y,R[Z,X]_R]+[RZ,[RX,Y]]+[RZ,[X,RY]]+[Z,R[X,Y]_R] &= 0 \\
[X,[Y,Z]_R]_R+[Y,[Z,X]_R]_R+[Z,[X,Y]_R]_R &= 0\,.
\end{aligned}
$$

□

Predpostavimo sedaj, da za R-oklepaj $[\ ,\ ]_R$ velja Jacobijeva identiteta. Potem je $(\mathfrak{g},[\ ,\ ]_R)$ Liejeva algebra. Oklepaj $[\ ,\ ]$ definira Poissonov oklepaj na dualu Liejeve algebre $\mathfrak{g}^*$ s predpisom

$$\{f,g\}(\xi)=\langle\xi,[df(\xi),dg(\xi)]\rangle \qquad \text{za}\ \ f,g\in\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)\,. \tag{5.2}$$

Analogno R-oklepaj $[\ ,\ ]_R$ definira nov R-Poissonov oklepaj $\mathfrak{g}^*$ s predpisom:

$$\{f,g\}_R(\xi):=\langle\xi,[df(\xi),dg(\xi)]_R\rangle=\langle\xi,[Rdf(\xi),dg(\xi)]\rangle+\langle\xi,[df(\xi),Rdg(\xi)]\rangle \tag{5.3}$$

za $f,q\in\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$. Za poljubno funkcijo $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ označimo z X_f^R Hamiltonovo vektorsko polje glede na Poissonovo strukturo $\{\ ,\ \}_R$.

Definicija 52 *Funkcija φ na $\mathfrak{g}^*$ je Casimirjeva invariantna funkcija, če Poissonovo komutira z vsemi funkcijami na $\mathfrak{g}^*$, to je $\{\varphi,f\}=0$ za vsako funkcijo f na g^*.*

Hamiltonovo vektorsko polje X_φ^R za Casimirjevo invariantno funkcijo φ na $(\mathfrak{g}^*,\{\ ,\ \})$ ima posebno in enostavno obliko.

Trditev 53

1. *Če je φ Casimirjeva funkcija na Poissonovi mnogoterosti $(\mathfrak{g}^*,\{\ ,\ \})$, je Hamiltonovo vektorsko polje $X_\varphi^R(\xi)$, ki pripada φ glede na $\{\ ,\ \}_R$, oblike*

$$X_\varphi^R(\xi)=\mathrm{ad}^*_{Rd\varphi(\xi)}(\xi)\,. \tag{5.4}$$

2. *Če sta φ in ϕ Casimirjevi funkciji na $(\mathfrak{g}^*,\{\ ,\ \})$, velja*

$$\{\varphi,\phi\}=\{\varphi,\phi\}_R=0\,. \tag{5.5}$$

Dokaz: Če je φ Casimirjeva funkcija, potem je $\langle \xi, [d\varphi(\xi), X]\rangle = 0$ za vsak $X \in \mathfrak{g}$. Po definiciji Poissonovega oklepaja $\{\ ,\ \}_R$ (glej (5.3)) je

$$\{\varphi, f\}_R = \langle \xi, [Rd\varphi(\xi), df(\xi)]\rangle + \langle \xi, [d\varphi(\xi), Rdf(\xi)]\rangle = \langle \xi, [Rd\varphi(\xi), df(\xi)]\rangle \,.$$

Hamiltonovo vektorsko polje X^R_φ je določeno z enačbo $\{\varphi, f\}_R = \langle X^R_\varphi, df\rangle$, ki velja za vsak $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$. Po definiciji ad^* delovanja je $\langle \mathrm{ad}^*_X \xi, Y\rangle = \langle \xi, [X, Y]\rangle$ za vsak $X, Y \in \mathfrak{g}$. Torej velja

$$\begin{aligned} \langle X^R_\varphi, df\rangle &= \{\varphi, f\}_R = \\ &= \langle \xi, [Rd\varphi(\xi), df(\xi)]\rangle = \\ &= \langle \mathrm{ad}^*_{Rd\varphi(\xi)}, df\rangle \end{aligned}$$

za vsak $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ in točka 1. trditve je dokazana. Točka 2. je očitna, saj je tudi $\langle \xi, [d\phi(\xi), X]\rangle = 0$ za vsak $X \in \mathfrak{g}$.

□

Trditev nam torej podaja Hamiltonov sistem (točka 1. trditve) in njegove prve integrale (točka 2.).

Naj bo Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ direktna vsota dveh Liejevih algeber

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \qquad \text{(direktna vsota vektorskih prostorov)} \tag{5.6}$$

in označimo s P_+ in P_- projekciji na podprostora $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{b}$. Za vsak $X \in \mathfrak{g}$ naj bo $X_+ = P_+(X)$ in $X_- = P_-(X)$. Linearna preslikava R na Liejevi algebri $\mathfrak{g}$ naj bo dana s predpisom

$$R := \frac{1}{2}(P_+ - P_-)\,. \tag{5.7}$$

Z direktnim računanjem oklepaja $[X, Y]_R$ dobimo enakost $[X, Y]_R = [X_+, Y_+] - [X_-, Y_-]$. Tako definiran oklepaj $[\ ,\ ]_R$ je Liejev oklepaj na $\mathfrak{g}$ oziroma je $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_R)$ Liejeva algebra.

Posledica 54 *Če je φ Casimirjeva funkcija na Liejevi algebri $(\mathfrak{g}^*, \{\ ,\ \})$, potem velja*

$$X^R_\varphi(\xi) = -\mathrm{ad}^*_{d\varphi(\xi)_-}(\xi) \tag{5.8}$$

Dokaz: Pokazati moramo, da je

$$\mathrm{ad}^*_{Rd\varphi(\xi)}(\xi) = -\mathrm{ad}^*_{d\varphi(\xi)_-}(\xi)\,.$$

Za Casimirjevo funkcijo φ velja $\langle \xi, [d\varphi(\xi), X]\rangle = 0$ za vsak $X \in \mathfrak{g}$. Po definiciji ad-delovanja in ad^*-delovanja je $\mathrm{ad}_Y(X) = [Y, X]$ in $\langle \mathrm{ad}^*_Y \xi, X\rangle = \langle \xi, \mathrm{ad}_{-Y} X\rangle = -\langle \xi, [X, Y]\rangle = \langle \xi, [Y, X]\rangle$. Zato je

$$\langle \xi, [d\varphi(\xi), X]\rangle = \langle \mathrm{ad}^*_{d\varphi(\xi)}\xi, X\rangle = 0\,.$$

Ker je $\langle \mathrm{ad}^*_{d\varphi(\xi)}\xi, X\rangle = 0$ za vsak $X \in \mathfrak{g}$, je $\mathrm{ad}^*_{d\varphi(\xi)}(\xi) = 0$. Zaradi dekompozicije Liejeve algebre $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ lahko pišemo

$$\mathrm{ad}^*_{d\varphi(\xi)}\xi = \mathrm{ad}^*_{d\varphi(\xi)_+}(\xi) + \mathrm{ad}^*_{d\varphi(\xi)_-}(\xi)\,,$$

torej je $\mathrm{ad}^*_{d\varphi(\xi)_-}(\xi) = -\mathrm{ad}^*_{d\varphi(\xi)_+}(\xi)$. Za vsak $X \in \mathfrak{g}$ je potem

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{ad}^*_{Rd\varphi(\xi)}(\xi), X\rangle &= \langle X^R_\varphi(\xi), X\rangle = \\
&= \langle \xi, [d\varphi(\xi), X]_R\rangle = \\
&= \langle \xi, [d\varphi(\xi)_+, X_+] - [d\varphi(\xi)_-, X_-]\rangle = \\
&= \langle \xi, [d\varphi(\xi)_+, X_+]\rangle - \langle \xi, [d\varphi(\xi)_-, X_-\rangle = \\
&= \langle \mathrm{ad}^*_{d\varphi(\xi)_+}(\xi), X_+\rangle - \langle \mathrm{ad}^*_{d\varphi(\xi)_-}(\xi), X_-\rangle = \\
&= -\langle \mathrm{ad}^*_{d\varphi(\xi)_-}(\xi), X_+\rangle - \langle \mathrm{ad}^*_{d\varphi(\xi)_-}(\xi), X_-\rangle = \\
&= \langle -\mathrm{ad}^*_{d\varphi(\xi)_-}(\xi), X\rangle
\end{aligned}$$

in posledica je s tem dokazana.

□

Predpostavimo, da imamo dano invariantno simetrično bilinearno formo $\langle\ ,\ \rangle$, s katero lahko identificiramo $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{g}^*$

Posledica 55 (Izrek Adlerja, Kostanta in Symesa (AKS)) *Naj bo $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra, ki je opremljena z invariantno nedegenerirano simetrično bilinearno formo. Naj bo vektorski prostor $\mathfrak{g}$ direktna vsota Liejevih algeber $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} = \mathfrak{g}$, tako da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}^\perp + \mathfrak{b}^\perp$ in $\mathfrak{b}^\perp \cong \mathfrak{a}^*$. Naj bo $\Gamma \subset \mathfrak{b}^\perp$ unija koadjungiranih orbit v $\mathfrak{a}^*$ in naj bo Casimirjeva funkcija f definirana na neki okolici množice Γ. Funkciji f lahko priredimo Hamiltonov sistem*

$$\dot{x} = [x, (\nabla_x f)_-]\,. \tag{5.9}$$

Vse Casimirjeve funkcije v okolici množice Γ paroma komutirajo.

5.2 Zančna algebra, Laxova enačba

Zančna algebra $\widetilde{\mathfrak{gl}}(r,\mathbb{C}) = \mathfrak{gl}(r,\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[\lambda,\lambda^{-1}]$ je Liejeva algebra semi-neskončnih formalnih Laurentovih vrst spremenljivke λ in s koeficienti v $\mathfrak{gl}(r,\mathbb{C})$. Če je $X(\lambda) \in \widetilde{\mathfrak{gl}}(r,\mathbb{C})$, potem je

$$X(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{m} X_j\lambda^j \qquad \text{za} \quad X_j \in \mathfrak{gl}(r,\mathbb{C})\,.$$

Za $X(\lambda) \in \widetilde{\mathfrak{gl}}(r,\mathbb{C})$ bomo pisali $X_0 = (X(\lambda))_0$. Liejev oklepaj na $\widetilde{\mathfrak{gl}}(r,\mathbb{C})$ elementov $X(\lambda)$ in $Y(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{k} Y_j\lambda^j$ naj bo definiran z

$$[X(\lambda), Y(\lambda)] = \sum_{j=-\infty}^{m+k} \sum_{i+l=j} [X_i, Y_l]\lambda^j$$

Pišimo krajše $\mathfrak{gl}(r,\mathbb{C}) = \mathfrak{gl}_r$ in $\widetilde{\mathfrak{gl}}(r,\mathbb{C}) = \widetilde{\mathfrak{gl}}_r$. Naj bo vektorski prostor $\widetilde{\mathfrak{gl}}_r$ direktna vsota

$$\widetilde{\mathfrak{gl}}_r = \widetilde{\mathfrak{gl}}_r^+ \oplus \widetilde{\mathfrak{gl}}_r^-$$

(kot v (5.6)), kjer je $\widetilde{\mathfrak{gl}}_r^+$ podalgebra matričnih polinomov spremenljivke λ in $\widetilde{\mathfrak{gl}}_r^-$ podalgebra vrst oblike $\sum_{j=-\infty}^{-1} X_j\lambda^j$. Na Liejevi algebri $\widetilde{\mathfrak{gl}}_r$ definirajmo nedegeneriran, ad-invarianten notranji produkt:

$$\langle X(\lambda), Y(\lambda)\rangle = \mathrm{Tr}((X(\lambda)Y(\lambda))_0)\,,$$

pri čemer je $(X(\lambda)Y(\lambda))_0$ konstantni člen v vrsti $X(\lambda)Y(\lambda)$ (glej zgoraj). Pri tem velja še

$$\langle X(\lambda), Y(\lambda)\rangle = \mathrm{res}_{\lambda=0}\mathrm{Tr}(\lambda^{-1}X(\lambda)Y(\lambda))$$

in lahko identificiramo

$$(\widetilde{\mathfrak{gl}}_r^+)^* \cong (\widetilde{\mathfrak{gl}}_r^-)^\perp = \lambda\widetilde{\mathfrak{gl}}_r^- \,. \tag{5.10}$$

Naj bodo $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ različna kompleksna števila. Za poljuben polinom $X(\lambda) \in \widetilde{\mathfrak{gl}}_r^+$ je $X(a_j) \in \mathfrak{gl}_r$. Definirajmo homomorfizem Liejevih algeber

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \widetilde{\mathfrak{gl}}_r^+ &\longrightarrow \mathfrak{gl}_r^{n+1} \\ X(\lambda) &\longmapsto \big(X(a_1), X(a_2), \ldots, X(a_{n+1})\big)\,. \end{aligned}$$

Če identificiamo $(\mathfrak{gl}_r^{n+1})^* \cong \mathfrak{gl}_r^{n+1}$ in $(\widetilde{\mathfrak{gl}}_r^+)^* \cong \lambda\widetilde{\mathfrak{gl}}_r^-$, je dualna preslikava $\mathcal{A}^* : \mathfrak{gl}_r^{n+1} \to \lambda\widetilde{\mathfrak{gl}}_r^-$ dana s predpisom

$$\mathcal{A}^*(Y_1, \ldots, Y_{n+1}) = \lambda\sum_{j=1}^{n+1}\frac{Y_j}{\lambda - a_j} = \sum_{k=0}^{\infty}\Bigg(\sum_{j=1}^{n+1}Y_j a_j^k\Bigg)\lambda^{-k}\,. \tag{5.11}$$

Naj bo $M^{N,r}$ prostor $N \times r$ kompleksnih matrik in naj bo

$$M = \{(F, G) \in M^{N,r} \times M^{N,r}\}$$

simplektičen vektorski prostor s simplektično formo $\omega = \mathrm{Tr}(dF \wedge dG^T)$. Naj bo (za $m \le N$)

$$G_r^m = \underbrace{Gl(r,\mathbb{C}) \times \ldots \times Gl(r,\mathbb{C})}_{m-\text{krat}}$$

in kot smo že pisali zgoraj

$$\mathfrak{g}_r^m = \mathfrak{gl}_r^m = \underbrace{\mathfrak{g}_r \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_r}_{m-\text{krat}}\,.$$

Matrika A naj bo diagonalna matrika z večkratnimi lastnimi vrednostmi $\{a_j \mid j = 1, \ldots, n+1\}$. Pripadajoče večkratnosti naj bodo $\{k_j \mid j = 1, \ldots, n+1\}$ in naj velja $k_1 + \ldots + k_{n+1} = N$. Naj bosta matriki $F, G \in M^{N,r}$ pisani v bločni obliki

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_j \\ \vdots \\ F_{n+1} \end{pmatrix} \qquad \text{in} \qquad G = \begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_j \\ \vdots \\ G_{n+1} \end{pmatrix}$$

za $F_j, G_j \in M^{k_j,r}$. Grupa G_r^{n+1} deluje na $M^{N,r} \times M^{N,r}$ predpisom

$$(g(F,G))_j = (F_j g_j^{-1}, G_j g_j^T)$$

za $g = (g_1, \ldots, g_{n+1}) \in G_r^{n+1}$ in njeno delovanje ohranja simplektično formo. Oznčimo z $\sigma_r^{n+1} : \mathfrak{g}_r^{n+1} \to \chi(M^{N,r} \times M^{N,r})$ pripadajoče infinitezimalno delovanje in temu prirejeno momentno preslikavo

$$J_r^{n+1} : M^{N,r} \times M^{N,r} \longrightarrow (\mathfrak{g}_r^{n+1})^*\,,$$

za katero velja

$$J_r^{n+1}(F,G)(X_1,\ldots,X_{n+1}) = -\sum_{j=1}^{n+1}\mathrm{Tr}(F_jX_jG_j^T)\,.$$

S komponiranjem $\sigma_r = \sigma_r^{n+1}\circ\mathcal{A}$ dobimo infinitezimalno delovanje $\widetilde{\mathfrak{gl}}_r^+$ na $M^{N,r}\times M^{N,r}$. Pripadajoča momentna preslikava je potem

$$\begin{aligned}\widetilde{J}_r : M^{N,r}\times M^{N,r} &\longrightarrow (\widetilde{\mathfrak{gl}}_r^+)^*\\ (F,G) &\longmapsto \lambda\sum_{j=1}^{n+1}\frac{G_j^TF_j}{a_j-\lambda}\end{aligned}$$

Označimo z $\widetilde{\mathfrak{g}}_A \subset (\widetilde{\mathfrak{gl}}_r^+)^*$ sliko momentne preslikave $\widetilde{J}_r$, z $\mathcal{I}(\widetilde{\mathfrak{g}}^*)$ kolobar ad^*-invariantnih funkcij (Casimirjevih funkcij) in naj bo

$$\mathcal{I}_{AKS}^Y := \mathcal{I}(\widetilde{\mathfrak{g}}^*)\big|_{\lambda Y+\widetilde{\mathfrak{g}}_A}$$

zožitev kolobarja na $\lambda Y + \widetilde{\mathfrak{g}}_A$ za določen $Y\in\mathfrak{gl}_r$. Naj bo še

$$\mathcal{N}(\lambda) \;=\; \lambda Y + \lambda\sum_{j=1}^{n+1}\frac{G_j^TF_j}{a_j-\lambda} \;\in\; \lambda Y + \widetilde{\mathfrak{g}}_A\,. \tag{5.12}$$

Po izreku Adlerja, Kostanta in Symesa velja:

Izrek 56

1. *Če je $\phi\in\mathcal{I}_{AKS}^Y$, je*
$$X_\phi(\mathcal{N}) = \frac{d\mathcal{N}}{dt} = [(d\phi)_+,\mathcal{N}] = -[(dH)_-,\mathcal{N}]\,. \tag{5.13}$$
2. *Za $\phi_1,\phi_2\in\mathcal{I}_{AKS}^Y$ velja: $\{\phi_1,\phi_2\}=0$.*

5.3 Laxova enačba Neumannovega sistema

Naj bo $r=2$, $N=n+1$ in $A=\mathrm{diag}(a_1,...,a_{n+1})$ za različne realne vrednosti $a_1,...,a_{n+1}$. Bloki F_j in G_j matrik $F,G\in M^{n+1,2}$ so (1×2) matrike. Na $M^{n+1,2}\times M^{n+1,2}$ delujemo z grupo $H=\{(d_1I_2,...,d_{n+1}I_2); d_j\in\mathbb{C}\backslash 0\}\subset G_2^{n+1}$. Redukcija algebre $\widetilde{\mathfrak{gl}}(2,\mathbb{C})$ na $\widetilde{\mathfrak{gl}}(2,\mathbb{R})$ je dana pogojema $F=\overline{F}$ in $G=\overline{G}$. Reducirana grupa H je grupa $\{(d_1I_2,...,d_{n+1}I_2); d_j\in\mathbb{C}\backslash 0\}$. Z redukcijo $\widetilde{\mathfrak{gl}}(2,\mathbb{R})$ na $\widetilde{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{R})$ pa je

$$F=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} q_1 & p_1\\ \vdots & \vdots\\ q_{n+1} & p_{n+1}\end{pmatrix}\qquad \text{in}\qquad G=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} p_1 & -q_1\\ \vdots & \vdots\\ p_{n+1} & -q_{n+1}\end{pmatrix}$$

za $(q_1,\ldots,q_{n+1},p_1,\ldots,p_{n+1})\in\mathbb{R}^{2n+2}$. Potem je

$$\widetilde{J}_2(F,G) = \frac{\lambda}{2}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{\lambda-a_j}\begin{pmatrix}-q_jp_j & -p_j^2\\ q_j^2 & q_jp_j\end{pmatrix}\,.$$

Če za Y izberemo matriko

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

ta ustreza pogojema na koordinatah: $|q|^2 = 1$ in $\langle q, p\rangle = 0$. Potem je

$$\mathcal{N}(\lambda) = \lambda Y + \widetilde{J}_2(F, G) ,$$

kar je ravno matrika Laxovega para za Neumannov sistem.

5.4 Hamiltonov sistem $(T^*\mathcal{H}_k^n, \omega_k, H_k)$ in nadaljnji študij

Vprašanje: Kako iz teorije zgoraj pridelati Hamiltonov sistem $(T^*\mathcal{H}_k^n, \omega_k, H_k)$ s pripadajočo matriko iz Laxovega para

$$\mathcal{N}(\lambda) = \lambda Y + \widetilde{J}_2(G, H) = \lambda \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{2} \left(\sum_{j=1}^{k} \begin{pmatrix} \frac{-q_j p_j}{\lambda - a_j} & \frac{-p_j^2}{\lambda - a_j} \\ \frac{q_j^2}{\lambda - a_j} & \frac{q_j p_j}{\lambda - a_j} \end{pmatrix} - \sum_{j=k+1}^{n+1} \begin{pmatrix} \frac{-q_j p_j}{\lambda - a_j} & \frac{-p_j^2}{\lambda - a_j} \\ \frac{q_j^2}{\lambda - a_j} & \frac{q_j p_j}{\lambda - a_j} \end{pmatrix} \right) ?$$

Predloga: 1. Če je $M^{N,r}$ prostor $N \times r$ kompleksnih matrik in

$$M = \{(F, G) \in M^{N,r} \times M^{N,r}\},$$

za simplektično formo na M vzamemo $\omega_k = dF \wedge d(J_k G^T)$, pri čemer je

$$J_k = \mathrm{diag}\{\underbrace{1, \ldots, 1}_{\text{k−krat}}, -1, \ldots, -1\} \in M^{N,N} .$$

2. Izberemo neko drugo delovanje grupe G_r^n na M, ki ohranja simplektično strukturo na M.

Poglavje 6

Algebraično geometrijska orodja

Laxova enačba

$$\frac{d}{dt}L(\lambda) = [M(\lambda), L(\lambda)]$$

je vez med Hamiltonovim sistemom nekega mehanskega problema in algebraično geometrijo. Recimo, da je $L(\lambda)$ $r \times r$-matrika, katere koeficienti so polinomi v spremenljivki $\lambda \in \mathbb{C}$. S karakteristično enačbo

$$\det(L(\lambda) - \mu I) = 0$$

je določena algebraična krivulja v $\mathbb{C}^2$, ki je r-listni krov nad $\mathbb{C}$ (ter z ustrezno kompaktifikacijo r listni krov z razvejišči nad $\mathbb{P}^1$). Če je $r = 2$ in dobljeno krivuljo ustrezno kompaktificiramo, dobimo hipereliptično krivuljo, ki je 2-listni krov z razvejišči nad $\mathbb{P}^1$. Take kompaktne krivulje imenujemo spektralne krivulje.

Riemannova ploskev X je (kompakta povezana) kompleksna analitična mnogoterost (kompleksne) dimenzije 1. Holomorfen sveženj premic L nad Rimannovo ploskvijo X je 2-dimenzionalna kompleksna mnogoterost L skupaj s holomorfno projekcijo $\pi : L \to X$, tako da velja

1. za vsako točko $x \in X$ je vlakno $\pi^{-1}(x)$ 1-dimenzionalen vektorski prostor

2. za vsako točko $x \in X$ obstajata njena okolica U in homeomorfizem φ_U (lokalna trivializacija), da diagram

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & U \times \mathbb{C} \\ & \pi\searrow \quad \swarrow \mathrm{pr}_U & \\ & U & \end{array}$$

   komutira

3. preslikava $\varphi_V \circ \varphi_U^{-1}$ je oblike

$$(x, v) \longmapsto (x, g_{VU}(x)v)$$

   za neničelno holomofno prehodno preslikavo g_{VU}.

Holomorfen prerez svežnja premic L nad X je taka holomorfna preslikava $s : X \to L$, da je $\pi \circ s = \mathrm{Id}_X$. To pomeni, da je za vsak $x \in X$ slika $s(x)$ v vlaknu $\pi^{-1}(x)$. Prostor vseh prerezov svežnja premic L je vektorski prostor in ga označimo z $H^0(X, L)$. Če je Riemannova ploskev X kompaktna, je $H^0(X, L)$ končno dimenzionalen. Dokaz najdemo v [15].

Izomorfnostni razred svežnjev premic je natanko določen z elementom grupe $H^1(X, \mathcal{O}^*)$. Iz znanega kratkega eksaktnega zaporedja

$$0 \to \frac{H^1(X, \mathcal{O})}{H^1(X, \mathbb{Z})} \to H^1(X, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^2(X, \mathbb{Z}) \to 0$$

definiramo stopnjo svežnja premic.

Definicija 57 *Stopnja svežnja premic L je $\deg(L) = \delta[L]$. Imenujemo ga tudi prvi Chernov razred.*

Poseben primer svežnja premic je kanonični sveženj K; to je kotangentni sveženj oziroma sveženj holomorfnih 1-form nad X. Rod g kompaktne Riemannove ploske je dimenzija vektorskega prostora prerezov kanoničnega svežnja: $\mathrm{rod}(X) = g = \dim H^0(X, K)$.

Naj bo z

$$\mathcal{C}_{aff} = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C};\ P(\lambda, \mu) = 0\}$$

podana afina krivulja v $\mathbb{C}^2$. Tako afino krivuljo lahko dopolnimo in normaliziramo do kompaktne Riemannove ploskve $\mathcal{C}$: obstajata končni podmnožici $E_{aff} \subset \mathcal{C}_{aff}$ in $E \subset \mathcal{C}$, da je $\mathcal{C}_{aff} - E_{aff} = \mathcal{C} - E$.

Primer 58 (Hipereliptična krivulja) *Naj bodo $c_1, c_2, \ldots, c_{2g+1}$ različna kompleksna števila in definirajmo polinom*

$$f(\lambda) = \prod_{j=1}^{2g+1} (\lambda - c_j)\,. \tag{6.1}$$

Afina krivulja v $\mathbb{C}^2$ naj bo množica

$$\mathcal{C}_{aff} = \{(\lambda, \mu);\ \mu^2 = f(\lambda)\}\,.$$

Ker so $c_1, c_2, \ldots, c_{2g+1}$ različna števila, je polinom $P(\lambda, \mu) = \mu^2 - f(\lambda)$ ireducibilen in je $\mathcal{C}_{aff}$ gladka krivulja. Ker želimo dodati točke v neskončnosti, pišimo $U_0 = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$ in $U_1 = \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$. Definirajmo holomorfen sveženj premic nad $\mathbb{P}^1$ z naslednjo prehodno preslikavo: naj bodo (λ, μ) koordinate v $U_0 \times \mathbb{C}$ in (λ', μ') koordinate v $U_1 \times \mathbb{C}$. Za prehodno preslikavo vzemimo $g_{10}(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{g+1}}$ (oziroma $g_{01}(\lambda) = \lambda^{g+1}$). S prehodno preslikavo smo dobili sveženj premic $\mathcal{O}(g+1)$. Na preseku $(U_0 \cap U_1) \times \mathbb{C}$ koordinate (λ', μ') izrazimo z (λ, μ): $\lambda' = \frac{1}{\lambda}$ in $\mu' = \frac{\mu}{\lambda^{g+1}}$. Če obe zvezi uporabimo in koordinati λ in μ v enakosti $\mu^2 = \prod_{j=1}^{2g+1}(\lambda - c_j)$ ustrezno zamenjamo, dobimo enačbo hipereliptične krivulje v drugi karti $U_1 \times \mathbb{C}$:

$$\mu'^2 = \lambda' \prod_{j=1}^{2g+1} (1 - \lambda' c_j)\,. \tag{6.2}$$

Hipereliptična krivulja $\mathcal{C}$ je dvolistni krov nad $\mathbb{P}^1$ z $2g+2$ razvejišči. Rezvejiščne točke hipereliptične krivulje so: $(c_1, 0), \ldots, (c_{2g+1}, 0)$ in $(\infty, 0)$.

Opomba 59 *Če je v zgornjem primeru $\lambda = \infty \Leftrightarrow \lambda' = 0$ in $\mu' = 0$. Točka $(\infty, 0)$ je razvejiščna točka hipereliptične krivulje $\mathcal{C}$.*

Opomba 60 *Če je $\mu^2 = \prod_{j=1}^{2g+2}(\lambda - b_j)$ za $b_i \neq b_j$, če je $i \neq j$, enačba definira gladko kompleksno krivuljo z $2g+2$ razvejišči. S prehodno preslikavo na preseku lokalnih kart dobimo zvezo $\lambda' = \frac{1}{\lambda}$ in $\mu' = \frac{\mu}{\lambda^{g+1}}$.Na lokalni karti $U_1 \times \mathbb{C}$ je kompleksna krivulja definirana z enačbo $\mu'^2 = \prod_{j=1}^{2g+2}(1 - b_j\lambda')$ in ima $2g+2$ razvejišč $(b_j, 0) \in U_0 \times \mathbb{C}$. Če je $\lambda = \infty \Leftrightarrow \lambda' = 0$, obstajata dve točki za $\lambda' = 0$, to je pri $\mu'_1 = 1$ in pri $\mu'_2 = -1$.*

Opomba 61 *Naravno število g v (6.1) in v Opombi 60 je rod krivulje $\mathcal{C}$. Topološko je $\mathcal{C}$ sfera z g ročaji. Skica hipereliptične krivulje je v [23].*

6.1 Riemannova ploskev, delitelji in Jacobijev torus

Spomnimo se definicije delitelja na Riemannovi ploskvi in definicije Jacobijevega torusa. Zveza med delitelji in Jacobijevim torusom je natančno opisana v [14]. Krajše povzetke najdemo v [5], [11], [32].

Delitelj (divizor) na Riemannovi ploskvi X je lokalno končna formalna vsota $\sum_j m_j P_j$, pri čemer so P_j točke na X in je $m_j \in \mathbb{Z}$ za vsak j. Če je Riemannova ploskev X kompaktna, je delitelj D na X formalna vsota

$$D = \sum_{j \in J} m_j P_j$$

za neko končno množico J. Označimo z $\mathrm{Div}(X)$ množico vseh deliteljev na X. Množica $\mathrm{Div}(X)$ je prosta Abelova grupa. Stopnja delitelja $D = \sum_{j\ inJ} m_j P_j$ je število

$$\deg(D) = \deg\left(\sum_{j \in J} m_j P_j\right) = \sum_{j \in J} m_j \in \mathbb{Z}\,.$$

Za poljubno meromorfno funkcijo f na X naj bo (f) delitelj

$$(f) = (f)_0 - (f)_\infty = \text{ število ničel}(f) - \text{število polov}(f)\,.$$

Podobno lahko definiramo za meromorfne 1-forme. Če je $D \in \mathrm{Div}(X)$ in je $D = (f)$ za neko meromorfno funkcijo na X, potem je D glavni delitelj. Če je $D \in \mathrm{Div}(X)$ in je $D = (\beta)$ za neko neničelno meromorfno 1-formo, potem je D kanonični delitelj. Na kompaktni povezani Riemannovi ploskvi X je

$$\deg(f) = 0 \qquad \text{and} \qquad \deg(\beta) = 2g - 2$$

za vsako meromorfno funkcijo f in vsako meromorfno 1-formo β na X. Označimo z $\mathrm{Div}^d(X) \subset \mathrm{Div}(X)$ podmnožico deliteljev stopnje d. Delitelj $D = \sum m_j P_j$ je efektiven (pozitiven), če je $m_j \geq 0$ za vsak j. Označimo z $\mathrm{Div}_+(X)$ množico vseh efektivnih deliteljev v $\mathrm{Div}(X)$, z $\mathrm{Div}_+^d(X)$ pa množico vseh efektivnih deliteljev stopnje d.

Grupa $\mathrm{Div}(X)$ je naravno izomorfna grupi $H^0(X, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)$. Res, če je $f \in H^0(X, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)$, to je f je globalni prerez kvocientnega snopa $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$, je ta definiran na odprtem pokrtju $\{U_\alpha\}$ z meromorfnimi neničelnimi funkcijami f_α in z neničelnimi holomorfnimi kvocientnimi (racionalnimi) funkcijami $\frac{f_\alpha}{f_\beta}$ na presekih $U_\alpha \cap U_\beta$. Zato je $(f_\alpha)_0 = (f_\beta)_0$ in $(f_\alpha)_\infty = (f_\beta)_\infty$. Vsakemu globalnemu prerezu $f \in H^0(X, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)$ priredimo delitelja $D = (f_\alpha)$. Obratno, za vsak delitelj $D = \sum_{j\in J} m_j P_j$ lahko najdemo odprto pokritje $\{U_\alpha\}$, da je D lokalno definiran s funkcijami $f_\alpha \in \mathcal{M}^*(U_\alpha)$, tako da je $\frac{f_\alpha}{f_\beta}$ holomorfna funcija na preseku $U_\alpha \cap U_\beta$.

Na $\mathrm{Div}(X)$ definiramo evivalenčno relacijo: $D \sim D' \Leftrightarrow$ ko obstaja taka meromorfna funkcija f, da je $D - D' = (f)$. Kvocienta grupa grupe $\mathrm{Div}(X)$ glede na relacijo $\sim$ se imenuje Picardova grupa

$$\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Div}(X)/_\sim\,.$$

Množica ekvivalenčnih razredov v $\mathrm{Pic}(X)$ stopnje d je $\mathrm{Pic}^d(X) = \mathrm{Div}^d(X)/_\sim$. Množica $\mathrm{Pic}^0(X)$ je podgrupa v $\mathrm{Pic}(X)$.

Za vsako kompleksno krivuljo (kompaktno povezano Riemannovo ploskev) X rodu $g > 0$ obstaja (simplektična) baza $A_1, \ldots, A_g, B_1, \ldots, B_g$ za homološko grupo $H_1(X, \mathbb{Z})$. Naj bo $\beta_1, \ldots, \beta_g$ baza vektorskega prostora prerezov kanoničnega svežnja $H^0(X, K)$. Obstaja naravna integralska preslikava, ki povezuje $H_1(X, \mathbb{Z})$ in $H^0(X, K)^*$:

$$\begin{array}{rcl} H_1(X, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^0(X, K)^* \\ \gamma & \longmapsto & (\beta \mapsto \int_\gamma \beta). \end{array} \tag{6.3}$$

Vemo, da je $H^0(X, K)^* \cong \mathbb{C}^g$ (glej dokaz v [17]) ter da je slika zgrnje preslikave mreža $\Lambda \cong \mathbb{Z}^{2g}$. Jacobijev torus ali krajše Jacobjan je definiran kot kvocient $\mathrm{Jac}(X) = H^0(X, K)^*/\Lambda$.

Opomba 62 *Velja $H^0(X, K)^* \cong H^1(X, \mathcal{O})$ (Serrejeva dualnost).*

Po Abel-Jacobijevem izreku obstaja izomorfizem

$$\mathrm{Pic}^0(X) \longrightarrow \mathrm{Jac}(X)$$

ki ga porodi Abel-Jacobijeva preslikava

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{Ab}: & \mathrm{Div}^0(X) & \longrightarrow & H^0(X, K)^*/\Lambda \\ & \sum_{j=1}^{g} P_j - \sum_{j=1}^{g} Q_j & \longmapsto & (\beta \to \sum_{j=1}^{g} \int_{Q_j}^{P_j} \beta)\,. \end{array}$$

Preslikava Ab je surjektivna, njeno jedro pa je množica glavnih deliteljev.

Enostavno lahko pokažemo, da je grupa $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ izomorfna Picardovi grupi, to je

$$H^1(X, \mathcal{O}^*) \cong \mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Div}(X)/_\sim\,.$$

Iz teorije svežnjev premic (na kompleksni krivulji X) vemo, da je ekvivalenčni razred svežnjev premic določen z elementom $g_{\alpha,\beta}$ grupe $H^1(X, \mathcal{O}^*)$, to je s kolekcijo holomorfni funkcij $g_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}^*$ na odprtem pokritju $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ krivulje X. Svežnja premic, določena s kolekcijama $g_{\alpha\beta}, h_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$, sta izomorfna natanko tedaj, ko velja $h_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta} g_{\alpha\beta}$ za $f_\alpha \in \mathcal{O}^*(U_\alpha)$ in $f_\beta \in \mathcal{O}^*(U_\beta)$. Za dokaz zgornjega izomorfizma definiramo preslikavo

$$\begin{array}{rcl} [\ ] \quad : \quad \mathrm{Div}(X) & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{O}^*) \\ D = \{U_\alpha, f_\alpha\} & \longmapsto & [D] = \left\{ g_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta} \right\}. \end{array}$$

Preslikava $[\ ]$ je dobro definirana, je homomorfizem grup $(\mathrm{Div}(X), +)$ in $(H^1(X, \mathcal{O}^*), \otimes)$ in je surjektivna. Sveženj premic $[D]$ pa je trivialen natanko tedaj, ko je D glavni delitelj.

Izrek 63 *(Riemann-Rochev izrek za svežnje premic) Če je L sveženj premic na kompaktni Riemanovi ploskvi X in $\mathrm{rod}(X) = g$, potem je*

$$\dim H^0(X, L) - \dim H^1(X, L) = \deg L + 1 - g\,.$$

Dokaz Riemann-Rochevega izreka za vektorske svežnje lahko najdemo v [17], v Hitchinovem prispevku.

Opomba 64 $\deg(D) = \deg(s) = \deg(L)$.

Oglejmo si še zelo dobro poznano kratko eksaktno zaporedje snopov

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}^* \to 0\,.$$

Kratkemu eksaktnemu zaporedju snopov pripada dolgo eksaktno zaporedje kohomoloških grup. Tako dobimo naslednje znano eksaktno zaporedje

$$0 \;\to\; \frac{H^1(X,\mathcal{O})}{H^1(X,\mathbb{Z})} \;\to\; H^1(X,\mathcal{O}^*) \;\to\; H^2(X,\mathbb{Z}) \;\to\; 0$$

oziroma ekvivalentno eksaktno zaporedje

$$0 \;\to\; \frac{\mathbb{C}^g}{\mathbb{Z}^{2g}} \;\to\; \mathrm{Pic}(X) \stackrel{\deg}{\to} \mathbb{Z} \;\to\; 0\,.$$

Vidimo, da je $\mathrm{Jac}(X) = \ker\{\deg : \mathrm{Pic}(X) \to \mathbb{Z}\}$. Poleg tega pa tudi, da je $\mathrm{Jac}^d(X) := \mathrm{Pic}^d(X)$ (prostor ekvivalenčnih razredov svežnjev premic stopnje d) kompleksen torus.

6.2 Algebraična konstrukcija $\mathrm{Jac}(\mathcal{C}) \setminus \Theta$ hipereliptične krivulje

Naj bo $\mathcal{C}$ hipereliptiča krivulja, ki je v lokalni karti podana kot afina algebraična krivulja

$$\mathcal{C}_{aff} = \{(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2;\ \mu^2 = f(\lambda)\}$$

za polinom f stopnje $2n+1$. Iz monografije [23] ponovimo nekaj trditev in izrazimo afino podmnožico $\mathrm{Jac}(\mathcal{C}) \setminus \Theta$ s podmnožico deliteljev.

Naj bo ι preslikava na hipereliptični krivulji, ki je v lokalnih koordinatah dana z

$$\begin{array}{rcl} \iota : \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ (\lambda,\mu) & \longmapsto & (\lambda,-\mu)\,. \end{array}$$

Lema 65 *Naj bodo $P_1,\ldots,P_{n+1}$ različne točke na krivulji $\mathcal{C}$ in naj bo $P_j \neq \infty$ za vsak $j = 1,\ldots,n+1$ in $P_j \neq \iota P_l$ za $j \neq l$. Za delitelj $D = \sum_{j=1}^{n+1} P_j$ obstajajo točke $Q_1,\ldots,Q_n$ na $\mathcal{C}$, da je*

$$\sum_{j=1}^{n+1} P_j \sim \infty + \sum_{j=1}^{n} Q_j\,.$$

Opomba 66 *Točk Q_j mora biti ravno n, saj imajo vse meromorfne funkcije na $\mathcal{C}$ stopnjo 0.*

Dokaz: Naj bodo $P_1,\ldots,P_{n+1}$ poljubne (različne) točke na $\mathcal{C}$ in naj velja $P_j \neq \infty$ za vsak $j = 1,\ldots,n+1$ ter $P_j \neq \iota P_l$, če je $j \neq l$. Po definiciji ekvivalentnosti dveh deliteljev je $D = \sum_{j=1}^{n+1} P_j \sim \infty + \sum_{j=1}^{n} Q_j$ natanko tedaj, ko obstaja meromorfna funkcija g na $\mathcal{C}$, da je $\infty + \sum_{j=1}^{n} Q_j - \sum_{j=1}^{n+1} P_j = (g)$. To pa pomeni, da morajo biti P_j poli funkcije g ter ∞ in Q_j ničle funkcije g. Pokažimo, da tako funkcijo g lahko skonstruiramo.

Naj bo ϕ polinom stopnje $\deg(\phi) \leq n$, ki je določen z vrednostmi $\phi(\lambda(P_j)) = \mu(P_j)$. Če točke P_j niso razvejiščne točke krivulje $\mathcal{C}$; $\mu^2 = f(\lambda)$, definirajmo funkcijo

$$h : (\lambda, \mu) \longmapsto \frac{\mu + \phi(\lambda)}{\prod_{j=1}^{n+1}(\lambda - \lambda(P_j))}, \tag{6.4}$$

Če je točka P_k razvejiščna točka, faktor $(\lambda - \lambda(P_k))$ nadomestimo s faktorjem .... !!! Točke $P_1, \ldots, P_{n+1}$ na $\mathcal{C}$ naj bodo v lokalnih koordinatah (λ, μ) določene z (λ_j, μ_j), to je $\lambda_j = \lambda(P_j)$ in $\mu_j = \mu(P_j)$ za $j = 1, 2, \ldots, n+1$. Velja:

a) funkcija h ima enostavne pole v P_j, saj je

$$h(\lambda_j, \mu_j) = \frac{\mu_j + \phi(\lambda_j)}{\prod_{l=1}^{n+1}(\lambda_j - \lambda_l)} = \frac{2\mu_j}{\prod_{l=1}^{n+1}(\lambda_j - \lambda_l)} .$$

Če P_j ni razvejiščna točka, je $\mu_j \neq 0$ in je le en od faktorjev v imenovalcu enak 0. Če pa je P_j razvejiščna točka, ima števec funkcije h v P_j ničlo prvega reda, imenovalec pa ničlo drugega reda (to sledi iz zveze $\mu = \pm\sqrt{f(\lambda)}$ in lastnosti $f(\lambda_j) = 0$ za razvejišče).

b) števec in imenovalec v (6.4) imata oba vrednost 0 v točki ιP_j. Res, saj je

$$\phi(\lambda(P_j)) = \phi(\lambda_j) = \phi(\lambda(\iota P_j)) = \mu_j$$

in ima števec v točki ιP_j vrednost $\mu(\iota P_j) + \phi(\lambda(\iota P_j)) = -\mu_j + \mu_j = 0$. V imenovalcu pa ima eden od faktorjev vrednost $\lambda(\iota P_j) - \lambda(P_j) = 0$.

c) točka ∞ je ničla funkcije h. Res, saj je

$$(\mu)_\infty = (2n+1) \cdot \infty \qquad \text{in} \qquad (\phi(\lambda))_\infty \leq 2n \cdot \infty ,$$

ker je ϕ polinom stopnje $\leq n$. Imenovalec funkcije h pa je v točki ∞ določen z deliteljem

$$(\prod_{j=1}^{n+1}(\lambda - \lambda(P_j)))_\infty = (2n+2) \cdot \infty .$$

Funkcijo h lahko enostavno dopolnimo do meromorfne funkcije g, ki ima ničle v točkah $Q_1, \ldots, Q_n$.

□

Lema 67 *Za vsak delitelj D stopnje 0 obstajajo točke $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{C}$, da je*

$$D \sim \sum_{j=1}^{n} P_j - g \cdot \infty .$$

Dokaz: Naj bosta a in b poljubni vrednosti spremenljivke λ in naj bosta P_a in P_b točki na krivulji $\mathcal{C}$, tako da velja $\lambda(P_a) = a$ in $\lambda(P_b) = b$. Potem velja

$$P_a + \iota P_a = \left(\frac{\lambda - a}{\lambda - b}\right)_0 \sim \left(\frac{\lambda - a}{\lambda - b}\right)_\infty = P_b + \iota P_b$$

in

$$P_a + \iota P_a = (t-a)_0 \sim (t-a)_\infty = 2 \cdot \infty\,.$$

Delitelj D stopnje 0 lahko pišemo kot razliko pozitivnih deliteljev iste stopnje, to je

$$D = \sum_{j=1}^{m} P_j - \sum_{j=1}^{m} S_j\,.$$

Potem velja enakost

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j=1}^{m}(P_j + \iota S_j) - \sum_{j=1}^{m}(S_j + \iota S_j) \sim \\ &\sim \sum_{j=1}^{m}(P_j + \iota S_j) - 2m \cdot \infty\,. \end{aligned}$$

Če je $2m = n$, je lema dokazana. Če je $2m < n$, lahko dodamo točke v neskončnosti s predznakoma plus in minus. Če je $2m > n$ uporabimo prejšnjo lemo in po korakih premaknemo $2m - n$ točk v ∞.

□

Lema 68 *Naj bo dan tak delitelj $D = \sum_{j=1}^{n} P_j$, da je $P_j \neq \infty$ za vsak j in $P_j \neq \iota P_l$ če je $j \neq l$. Potem ne obstaja nekonstantna racionalna funkcija na $\mathcal{C}$ s poli $P_1, \ldots, P_n$*

Polinom $p = p(\lambda, \mu)$ v lokalnih afinih koordinatah je globalno meromorfna funkcija na $\mathcal{C}$, s poli v točki ∞. Delitelj, ki šteje pole, je potem oblike

$$(p)_\infty = v_\infty(p) \cdot \infty\,.$$

Za polinom $p(\lambda, \mu) = \lambda$ je $v_\infty(\lambda) = 2$, za polinom $p(\lambda, \mu) = \mu$ pa je $v_\infty(\mu) = 2n + 1$.

Opomba 69 *Ker je na krivulji $\mathcal{C}$ v lokalnih afinih koordinatah $\mu^2 = f(\lambda)$, je vsak polinom p na $\mathcal{C}$ v koordinatah (λ, μ) oblike $p(\lambda, \mu) = \phi(\lambda) + \mu\psi(\lambda)$ za primerna polinoma ϕ in ξ.*

Dokaz: (**Leme 68**) Pa recimo, da taka funkcija h obstaja. Potem ima funkcija

$$h \cdot \prod_{j=1}^{n}(\lambda - \lambda(P_j))$$

pole le v točki ∞ in velja

$$h \cdot \prod_{j=1}^{n}(\lambda - \lambda(P_j)) = \phi(\lambda) + \mu\psi(\lambda)\,.$$

za primerna polinoma ϕ in ψ. Vemo, da je $v_\infty(\mu) = 2n + 1$, da je $v_\infty(\phi)$ sodo število in je zato $v_\infty(\mu\psi) = v_\infty(\mu) + v_\infty(\psi) \neq v_\infty(\phi)$. Ker funkcija h nima pola v točki ∞, je

$$0 = v_\infty(h) = v_\infty\left(\frac{\phi + \mu\psi}{\prod_{j=1}^{n}(\lambda - \lambda(P_j))}\right) \geq v_\infty(\mu) + v_\infty(\psi) - 2n = 1 + v_\infty(\psi) \geq 1\,.$$

To je protislovje za $\psi(\lambda) \neq 0$, zato je $\psi(\lambda) = 0$ in je $h = h(\lambda)$. Ker so po predpostavki P_j poli funkcije h, so tudi ιP_j poli funkcije h. Protislovje. □

Naj do $\mathrm{Symm}^d\mathcal{C}$ simetrični produkt krivulje $\mathcal{C}$ za poljubno naravno število d, to je

$$\mathrm{Symm}^d\mathcal{C} := \mathcal{C}^d/S_d = \underbrace{\mathcal{C} \times \ldots \times \mathcal{C}}_{d\text{-krat}}/S_d$$

za simetrično grupo S_d. Element simetričnega produkta $\mathrm{Symm}^d(\mathcal{C})$ označimo z $\langle P_1, \ldots, P_d\rangle$, kjer so $P_1, \ldots, P_d$ točke na $\mathcal{C}$. Obstaja naravna bijekcija med simetričnim produktom $\mathrm{Symm}^d(\mathcal{C})$ in množico pozitivnih deliteljev stopnje d:

$$\begin{array}{rcl} I_d : \mathrm{Symm}^d\mathcal{C} & \longrightarrow & \mathrm{Div}^d_+(\mathcal{C}) \\ \langle P_1, \ldots, P_d\rangle & \longmapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^{d} P_j. \end{array}$$

Po Lemi 67 zgoraj je za $d = n$ preslikava

$$\begin{array}{rcl} I : \mathrm{Symm}^n\mathcal{C} & \longrightarrow & \mathrm{Jac}(\mathcal{C}) = \mathrm{Div}^0(\mathcal{C})/_\sim \\ \langle P_1, \ldots, P_n\rangle & \longmapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} P_j - n \cdot \infty \end{array}$$

surjektivna.

Spomnimo se, da je theta delitelj Θ podmnožica v $\mathrm{Jac}(\mathcal{C})$ ki je podana z

$$\Theta = \{D = \sum_{j=1}^{n-1} P_j - (n-1) \cdot \infty\}\,. \tag{6.5}$$

Sedaj lahko pokažemo trditev

Trditev 70 *Množica*

$$Z := \big\{D = \sum_{j=1}^{n} P_j \,\Big|\, P_j \neq \infty \;\; \textit{za vsak } j \;\; \textit{in} \;\; P_j \neq \iota P_l \;\; \textit{če je} \;\; j \neq l\big\} \subset Z$$

je izomorfna množici $\mathrm{Jac}(\mathcal{C}) \setminus \Theta$. *Izomorfizem je zožitev preslikave* I *na podmnožico* $Z \subset \mathrm{Symm}^n\mathcal{C}$.

Dokaz: Pokazati moramo, da je zožitev preslikave I na podmnožico Z injektivna. Naj bosta $D, D' \in Z$ in naj velja $I(D) = I(D')$. Potem je $I(D) - I(D') = D - D' = (h)$ za neko racionalno funkcijo h. Toda poli funkcije h so določeni z $D = \sum_{j=1}^{n} P_j$ in po prejšnji trditvi je h konstantna funkcija. Zato je $D = D'$.
Theta delitelj Θ je slika delitelja $\sum_{j=1}^{n-1} P_j + \infty$. Če pa je $D = \sum_{j=1}^{n} P_j$ in je $P_j = \iota P_l$ za $j \neq l$, potem je $P_j + P_l \cong 2 \cdot \infty$ in zato $\sum_{j=1}^{n} P_j - n \cdot \infty \in \Theta$.

$\square$

6.3 Mumfordov sistem

Mumfordov sistem je kompleksen Hamiltonov sistem, ki je karakteriziran z Laxovo enačbo

$$\frac{d}{dt}L^{\mathbb{C}}(\lambda) = [M^{\mathbb{C}}(\lambda), L^{\mathbb{C}}(\lambda)]\,.$$

Pri tem je $L^{\mathbb{C}}(\lambda) = \begin{pmatrix} V^{\mathbb{C}}(\lambda) & W^{\mathbb{C}}(\lambda) \\ -U^{\mathbb{C}}(\lambda) & V^{\mathbb{C}}(\lambda) \end{pmatrix}$, elementi te matrike pa so polinomi

$$\begin{array}{rcl} U^{\mathbb{C}}(\lambda) & = & \lambda^n + \widetilde{u}_1\lambda^{n-1} + \ldots + \widetilde{u}_n \\ V^{\mathbb{C}}(\lambda) & = & \widetilde{v}_1\lambda^{n-1} + \ldots + \widetilde{v}_n \\ W^{\mathbb{C}}(\lambda) & = & \lambda^{n+1} + \widetilde{w}_1\lambda^n + \widetilde{w}_2\lambda^{n-1} + \ldots + \widetilde{w}_{n+1} \end{array} \tag{6.6}$$

s kompleksnimi koeficienti $\widetilde{u}_j$, $\widetilde{v}_l$, $\widetilde{w}_m$ (glej [23], [18], [19]). Krajše bomo pisali: $\widetilde{u} = (\widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_n)$, $\widetilde{v} = (\widetilde{v}_1, \ldots, \widetilde{v}_n)$ in $\widetilde{w} = (\widetilde{w}_1, \ldots, \widetilde{w}_{n+1})$. Polinoma $U^{\mathbb{C}}$ in $W^{\mathbb{C}}$ sta monična. Njuni stopnji sta n in $n+1$. Stopja polinoma $V^{\mathbb{C}}$ pa je $n-1$ (in ni nujno moničen). Prostor vseh matrik $L^{\mathbb{C}}(\lambda)$ oziroma trojic polinomov $(U^{\mathbb{C}}(\lambda), V^{\mathbb{C}}(\lambda), W^{\mathbb{C}}(\lambda))$ je $\mathbb{C}^{3n+1}$. Laxova enačba porodi družino hipereliptičnih spektralnih krivulj $\mathcal{C}$, ki so (v lokalnih koordinatah) določene z enačbo $\mu^2 = f(\lambda)$ za polinom

$$f(\lambda) = -\det(L(\lambda)) = U^{\mathbb{C}}(\lambda)W^{\mathbb{C}}(\lambda) + (V^{\mathbb{C}}(\lambda))^2\,.$$

Če zapišemo polinom f v obliki

$$f(\lambda) = \lambda^{2n+1} + H_1\lambda^{2n} + H_2\lambda^{2n-1} + \ldots + H_{2n}\lambda + H_{2n+1}\,,$$

so koeficienti H_j funkcije $H_j = H_j(\widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{w})$ za vsak $j = 1, \ldots, 2n+1$. Funkcije H_j so ohranitvene količine sistema. Vemo, da so funkcije $H_1, \ldots, H_{g+1}$, Casimirjeve invariantne funkcije in da so funkcije $H_{g+2}, \ldots, H_{2g+1}$ prvi integrali sistema, ki določajo komutativna Hamiltonova vektorska polja $X_{H_{g+2}}, \ldots, X_{H_{2g+1}}$.

Naj bo Φ momentna preslikava Mumfordovega sistema, definirana z

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{C}^{3n+1} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{2n+1} \\ (\widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{w}) & \longmapsto & (H_1(\widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{w}), \ldots, H_{2n+1}(\widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{w})) \end{array}$$

Označimo z $h = (h_1, \ldots, h_{2n+1}) \in \mathbb{C}^{2n+1}$ vrednost momentne preslikave Φ in z $\mathcal{C}_h$ himereliptično krivuljo, ki je lokalno definirana z enačbo $\mu^2 = f_h(\lambda)$, pri čemer je f_h polinom s konstantnimi koeficienti

$$f_h(\lambda) = \lambda^{2n+1} + h_1\lambda^{2n} + \ldots + h_{2n}\lambda + h_{2n+1}\,.$$

Trditev 71 *Če je spektralna krivulja $\mathcal{C}_h$, katere afina krivulja je določena z enačbo $\mu^2 = f_h(\lambda)$, gladka, je nivojska množica $\Phi^{-1}(h)$ izomorfna* $\mathrm{Jac}(\mathcal{C}) \setminus \Theta$.

Dokaz trditve je v [23]. Mi ga bomo le na kratko orisali. Če so $u_1, \ldots, u_n$ ničle (pazi, to so spremenljivke) polinoma $U^{\mathbb{C}}$, pišemo $U^{\mathbb{C}}(\lambda) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda - u_j)$. Ker velja enakost $f_h(\lambda) = U^{\mathbb{C}}(\lambda)W^{\mathbb{C}}(\lambda) + (V^{\mathbb{C}}(\lambda))^2$ in je $U^{\mathbb{C}}(u_j) = 0$, je vrednost $v_j := V^{\mathbb{C}}(u_j)$ določena z $V^{\mathbb{C}}(u_j) = \pm\sqrt{f_h(u_j)}$. Če so ničle polinoma $U^{\mathbb{C}}$ paroma različne, je polinom $V^{\mathbb{C}}$ interpolacijski polinom skozi točke $(u_j, v_j) \in \mathcal{C}_h$, to je

$$V^{\mathbb{C}}(\lambda) := \sum_{j=1}^{n} v_j \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{n} \frac{\lambda - u_l}{u_j - u_l}\,.$$

Po konstrukciji je polinom $f_h(\lambda) - (V^{\mathbb{C}}(\lambda))^2$ deljiv s poinomom $U^{\mathbb{C}}(\lambda)$, saj so $u_1, \ldots, u_n$ tudi ničle polinoma $f_h(\lambda) - (V^{\mathbb{C}}(\lambda))^2$:

$$f_h(\lambda) - (V^{\mathbb{C}}(\lambda))^2\Big|_{\lambda=u_j} = f_h(u_j) - (V^{\mathbb{C}}(u_j))^2 = f_h(u_j) - f_h(u_j) = 0\,.$$

Zato lahko definiramo $W^{\mathbb{C}}(\lambda) := \big(f_h(\lambda) - (V^{\mathbb{C}}(\lambda))^2\big)/U^{\mathbb{C}}(\lambda)$.

Opomba 72 *Če ničle $u_1, \ldots, u_n$ niso paroma različne in ima ničla u_j večkratnost n_j, je polinom $V^{\mathbb{C}}(\lambda)$ enolično definiran z določeno vrednostjo odvodov, to je*

$$\frac{d^l}{d\lambda^l}\Big(V^{\mathbb{C}}(\lambda) - \sqrt{f(\lambda)}\Big)\Big|_{\lambda=u_j} = 0 \qquad za \quad 0 \le l \le n_j - 1\,.$$

Nivojska množica $\Phi^{-1}(h)$ momentne preslikave Φ za regularno vrednost h je množica

$$\begin{aligned}
&\Phi^{-1}(h) = \\
&= \Big\{(\widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{w}) \in \mathbb{C}^{3n+1} \,\Big|\, U^{\mathbb{C}}(\lambda)W^{\mathbb{C}}(\lambda) + (V^{\mathbb{C}}(\lambda))^2 = f_h(\lambda)\Big\} \cong \qquad (6.7)\\
&\cong \Big\{(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{C}^{2n} \,\Big|\, U^{\mathbb{C}}(\lambda) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda - u_j) \text{ in } v_j = V^{\mathbb{C}}(u_j) \text{ za } j = 1, \ldots, n\Big\}\Big/ S_n\,.
\end{aligned}$$

Pri tem simetrična grupa S_n deluje na množico

$$\begin{aligned}
N &= \Big\{(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{C}^{2n} \,\Big|\, U^{\mathbb{C}}(\lambda) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda - u_j) \text{ in } v_j = V^{\mathbb{C}}(u_j) \text{ za } j = 1, \ldots, n\Big\} = \\
&= \Big\{((u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_n)) \in \mathbb{C}^{2n} \,\Big|\, U^{\mathbb{C}}(\lambda) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda - u_j) \text{ in } v_j = V^{\mathbb{C}}(u_j) \text{ za } j = 1, \ldots, n\Big\}
\end{aligned}$$

s predpisom

$$\begin{aligned}
S_n \times N &\longrightarrow N \\
\big(s, ((u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_n))\big) &\longmapsto (s(u_1, \ldots, u_n), s(v_1, \ldots, v_n))\,.
\end{aligned}$$

Po Abel-Jacobijevemu izreku vemo, da je $\mathrm{Jac}(\mathcal{C}) \cong \mathrm{Div}^0(X)/_\sim$, po Trditvi 70 pa imamo izomorfizem med $\mathrm{Jac}(\mathcal{C}) \setminus \Theta$ in množico deliteljev

$$\mathrm{Jac}(\mathcal{C}) \setminus \Theta \cong \mathrm{Div}^n_{+,0}(\mathcal{C}) = \Big\{D = \sum_{j=1}^{n} P_j \,\Big|\, P_j \neq \infty \text{ za vsak } j \text{ in } P_j \neq \iota(P_l) \text{ če je } j \neq l\Big\}\,.$$

Izomorfizem med nivojsko množico momentne preslikave $\Phi^{-1}(h)$ in množico deliteljev $\mathrm{Div}^n_{+,0}(\mathcal{C})$ je torej preslikava

$$\begin{aligned}
\Phi^{-1}(h) &\longrightarrow \mathrm{Div}^n_{+,0}(\mathcal{C}) \\
(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n) &\longmapsto \sum_{j=1}^{n} P_j
\end{aligned}$$

za $P_j = (u_j, v_j) \in \mathcal{C}_h$.

Poglavje 7

Geometrija nivojskih množic

Znano je, da je regularna nivojska množica momentne preslikave Neumannovega sistema $\mathbb{Z}_2^n$-kratni krov realnega torusa. To je natanko realni del afinega dela $\mathrm{Jac}(\mathcal{C}_h) \setminus \Theta$ Jacobijevega torusa $\mathrm{Jac}(\mathcal{C}_h)$. Dokaz je v [23]. Vsaki točki $(q, p) \in T^*S^n$ lahko priredimo trojico polinomov

$$\pi : (q, p) \to (U(\lambda), V(\lambda), W(\lambda)) \in \mathbb{C}^{3n+1}$$

s predpisom

$$\begin{aligned} U(\lambda) &= A(\lambda) \sum_{j=1}^{n+1} \frac{q_j^2}{\lambda - a_j} \\ V(\lambda) &= A(\lambda) \sum_{j=1}^{n+1} \frac{-q_j p_j}{\lambda - a_j} \\ W(\lambda) &= A(\lambda) \sum_{j=1}^{n+1} \Big(-1 + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{-p_j^2}{\lambda - a_j} \Big) . \end{aligned} \tag{7.1}$$

Pri tem obstaja naravna razširitev na kompleksificiran kotangentni sveženj $T^*S^{n\mathbb{C}}$, to je

$$\pi_{\mathbb{C}} : (Q, P) \to (U^{\mathbb{C}}(\lambda), V^{\mathbb{C}}(\lambda), W^{\mathbb{C}}(\lambda))$$

s predpisom (4.3). Preslikava $\pi_{\mathbb{C}}$ je surjektivna. Njena praslika za določeno vrednost $(U^{\mathbb{C}}, V^{\mathbb{C}}, W^{\mathbb{C}}) \in \mathbb{C}^{3n+1}$, pri čemer $U^{\mathbb{C}}$, $V^{\mathbb{C}}$ in $W^{\mathbb{C}}$ nimajo skupne ničle v a_k, je podmnožica

$$\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(U, V, W) = \{(J_{\mathcal{S}} Q, J_{\mathcal{S}} P) \,\Big|\, U^{\mathbb{C}}_{Q,P}(\lambda), V^{\mathbb{C}}_{Q,P}(\lambda), W^{\mathbb{C}}_{Q,P}(\lambda) \text{ kot v } (4.3)\} .$$

Pri tem je $J_{\mathcal{S}}$ diagonalna matrika z neničelnimi koeficienti: $(J_{\mathcal{S}})_{jj} = 1$, če je $j \in \mathcal{S}$ in $(J_{\mathcal{S}})_{jj} = -1$, če je $j \in \{1, 2, \ldots, n+1\} \setminus \mathcal{S}$ za poljubno $\mathcal{S} \subseteq \{1, 2, .., n+1\}$.

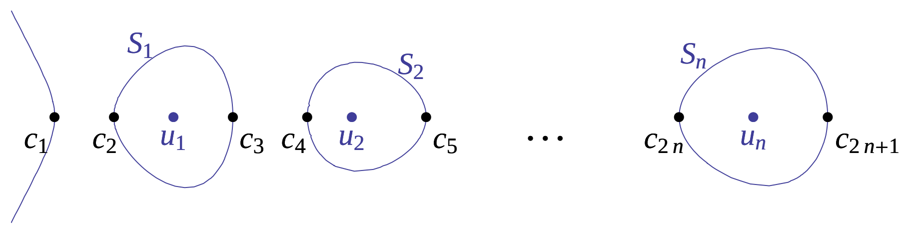
Naslednj lema nam poda pogoje (potrebne in zadostne) na spektralni krivulji kompleksnega Neumannovega sistema, pri katerih so koordinate (Q, P) realne:

Lema 73 *Koordinate $Q = (Q_1, \ldots, Q_{n+1})$ in $P = (P_1, \ldots, P_{n+1})$ so realne ($Q_j = q_j$ in $P_j = p_j$) natanko tedaj, ko so koeficienti polinomov $U^{\mathbb{C}}$, $V^{\mathbb{C}}$ in $W^{\mathbb{C}}$ realni in so ničle $a_1, \ldots, a_{n+1}$ polinoma $f_h(\lambda) = -A(\lambda) \prod_{j=1}^{n} (\lambda - b_j)$ in ničle $u_1, \ldots, u_n$ polinoma $U^{\mathbb{C}}$ urejene v vrstnem redu $a_1 < u_1 < a_2 < u_2 < \ldots < a_n < u_n < a_{n+1}$, ter je $b_1 \in (-\infty, u_1)$ in $b_j \in (u_j, u_{j+1})$ za vsak $j = 2, \ldots, n$.*

Dokaz je v [23]. Če označimo s $c_1 < c_2 < \ldots < c_{2n+1}$ urejene ničle polinoma $f_h(\lambda)$, za urejene ničle $u_1 < \ldots < u_n$ polinoma $U^{\mathbb{C}} = U$ potem velja $u_j \in (c_{2j}, c_{2j+1})$ za vsak $j = 1, \ldots, n$ (glej Sliko 7.1). Po zgornji Lemi je $c_{2n+1} = a_{n+1}$ in je ali $(c_{2j-1}, c_{2j}) = (a_j, b_j)$ ali $(c_{2j-1}, c_{2j}) = (b_j, a_j)$.

S kompleksno konjugacijo $(\lambda, \mu) \longrightarrow (\overline{\lambda}, \overline{\mu})$ na spektralni krivulji $\mathcal{C}_h$ dobimo antiholomorfno involucjo na $\mathrm{Jac}(\mathcal{C}_h)$ s predpisom $\sum_{j=1}^n P_j - n\infty \longrightarrow \sum_{j=1}^n \overline{P}_j - n\infty$. Potem je realni del $\mathrm{Jac}(\mathcal{C}_h)_{\mathbb{R}}$ množica fiksnih točk involucije na $\mathrm{Jac}(\mathcal{C}_h)$ in je

$$\mathrm{Jac}(\mathcal{C}_h)_{\mathbb{R}} \setminus \Theta = \Big\{ \sum_{j=1}^{n} P_j - n \cdot \infty \,\Big|\, P_j \neq \infty,\ P_j \neq \iota(P_l) \text{ za } j \neq l \text{ in } \sum \overline{P}_j = \sum P_j \Big\} \tag{7.2}$$



Slika 7.1: Realni del spektralne krivulje $\mu^2 = f_h(\lambda)$

Iz (7.1), (6.8), (4.11), (6.7) in Lemme 73 sledi, da so povezane komponente regularne nivojske množice momentne preslikave (1.5) torusi $S_1 \times \ldots \times S_n$.

Trditev 74 *Kompleksne koordinate $Q = (Q_1, \ldots, Q_{n+1})$ in $P = (P_1, \ldots, P_{n+1})$ so zaporedoma enake $(q_1, \ldots, q_k, iq_{k+1}, \ldots, iq_{n+1})$ in $(p_1, \ldots, p_k, ip_{k+1}, \ldots, ip_{n+1})$ natanko tedaj, ko so koeficienti polinomov $U^{\mathbb{C}}$, $V^{\mathbb{C}}$ in $W^{\mathbb{C}}$ realni in*

a) za $k = 1$ so ničle $a_1, \ldots, a_{n+1}$ polinoma $f_h(\lambda) = -A(\lambda)B(\lambda)$ in ničle $u_{1,1}, \ldots, u_{1,n}$ polinoma $U^{\mathbb{C}}$ urejene v naslednjem vrstnem redu

$$a_1 < a_2 < u_{1,1} < a_3 < u_{1,2} < a_4 < \ldots < u_{1,n-2} < a_n < u_{1,n-1} < a_{n+1} < u_{1,n} \tag{7.3}$$

ter je $b_j \in (u_j, u_{j+1})$ za vsak $j = 1, 2, \ldots, n-1$ in je $b_n \in (u_n, \infty)$.

b) za $2 \leq k \leq n$ so ničle $a_1, \ldots, a_{n+1}$ polinoma $f_h(\lambda)B(\lambda)$ in ničle $u_{k,1}, \ldots, u_{k,n}$ polinoma $U^{\mathbb{C}}(\lambda)$ urejene v vrstnem redu

$$\begin{aligned} a_1 < u_{k,1} < a_2 < u_{k,2} < \ \ &\ldots\ \ < a_{k-1} < u_{k,k-1} < a_k < a_{k+1} < u_{k,k} < a_{k+2} < \ldots \\ &\ldots\ \ < u_{k,n-2} < a_n < u_{k,n-1} < a_{n+1} < u_{k,n} \end{aligned} \tag{7.4}$$

ter je $b_{j+1} \in (u_j, u_{j+1})$ za vsak $j = 1, \ldots, k-2$, $b_j \in (u_j, u_{j+1})$ za vsak $j = k, \ldots, n-1$, $b_1 \in (-\infty, u_1)$ in $b_n \in (u_n, \infty)$.

Dokaz: Če je $Q = (q_1, \ldots, q_k, iq_{k+1}, \ldots, iq_{n+1})$ in $P = (p_1, \ldots, p_k, ip_{k+1}, \ldots, ip_{n+1})$, so polinomi $U^{\mathbb{C}}$, $V^{\mathbb{C}}$ in $W^{\mathbb{C}}$ realni (imajo realne koeficiente) in velja $U^{\mathbb{C}}(\lambda) = U_k(\lambda) = A(\lambda) \sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_j \frac{q_j^2}{\lambda - a_j}$ za $\epsilon_1 = \ldots = \epsilon_k = 1$ in $\epsilon_{k+1} = \ldots = \epsilon_{n+1} = -1$.

Za $k = 1$ so ničle polinoma U_1 glede na konstante $a_1, \ldots, a_{n+1}$ urejene

$$a_1 < a_2 < u_{1,1} < a_3 < u_{1,2} < \ldots < a_n < u_{1,n-1} < a_{n+1} < u_{1,n}\,, \tag{7.5}$$

kar smo že videli v (2.10). Ker je $f_h(\lambda) = U_1(\lambda)W_1(\lambda) + V_1^2(\lambda)$ in zato $f_h(u_{1,j}) = V_1^2(u_{1,j}) > 0$, ničle $b_1, \ldots, b_{n-1}$ ($\neq a_j$) polinoma f_h ležijo na intervalu $(u_{1,1}, u_{1,n})$. Natančneje je $b_j \in (u_{1,j}, u_{1,j+1})$ za $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Ker pa je $f(u_{1,n}) > 0$ in hkrati $f_h(\lambda) < 0$ za $\lambda >> 0$ obstaja še ena (in hkrati zadnja) ničla b_n na intervalu $(u_{1,n}, \infty)$.

Za $k \geq 2$ so ničle polinoma U_k glede na konstante $a_1, \ldots, a_{n+1}$ urejene kot v (2.10). Ker velja neenakost $f_h(u_{k,j}) > 0$, obstaja še $n-2$ ničel $b_2, \ldots, b_{n-1}$ ($\neq a_j$) polinoma f_h na intervalu $(u_{k,1}, u_{k,n})$. Natančneje je $b_{j+1} \in (u_{k,j}, u_{k,j+1})$ za $j = 1, 2, \ldots, k-2$ in $b_j \in (u_{k,j}, u_{k,j+1})$ za $j = k, \ldots, n-1$. Zaradi neenakosti $f_h(u_{k,1}) > 0$ in ker velja $f_h(\lambda) > 0$ za $\lambda << 0$, ima polinom f_h še eno ničlo $b_1 \in (-\infty, u_{k,1})$. Ker pa je $f_h(u_{k,n}) > 0$, toda $f_h(\lambda) < 0$ za $\lambda >> 0$, obstaja še ena (in hkrati zadnja) ničla $b_n \in (u_{k,n}, \infty)$ polinoma f_h.

Dokaz v obratni smeri je enak za vse $k = 1, \ldots, n$. Po predpostavki so polinomi $U^{\mathbb{C}}$, $V^{\mathbb{C}}$ in $W^{\mathbb{C}}$ realni (imajo realne koeficiente) in so ničle polinomov $U^{\mathbb{C}}$ in f_h urejene kot v (7.3) ali (7.4). Z razcepom na parcialne ulomke je

$$U^{\mathbb{C}}(\lambda) = A(\lambda) \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\alpha_j}{\lambda - a_j} = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \prod_{l \neq j} (\lambda - a_l)$$

za realne koeficiente α_j. Ker je polinom $U^{\mathbb{C}}$ moničen stopnje n, iz lege ničel $u_{k,j}$ sledi

$$\operatorname{sgn}(U^{\mathbb{C}}(a_j)) = \begin{cases} (-1)^{n-j} & ; \text{ if } j = k+1, \ldots, n+1 \\ (-1)^{n-j+1} & ; \text{ if } j = 1, \ldots, k\,. \end{cases} \tag{7.6}$$

Po drugi strani pa je $U^{\mathbb{C}}(a_j) = \alpha_j \prod_{l \neq j} (a_j - a_l)$ in zato

$$\operatorname{sgn}(U^{\mathbb{C}}(a_j)) = \operatorname{sgn}(\alpha_j)(-1)^{n-j+1}\,. \tag{7.7}$$

Z enačenjem predznakov v (7.6) in (7.7) vidimo, da mora biti $\operatorname{sgn}(\alpha_j) = 1$ za $j = 1, \ldots, k$, zato ima enačba $Q_j^2 = \alpha_j$ za $j = 1, \ldots, k$ realna korena. Za $j = k+1, \ldots, n+1$ pa velja $\operatorname{sgn}(\alpha_j) = -1$, zato ima enačba $Q_j^2 = \alpha_j$ za $j = k+1, \ldots, n+1$ imaginarna korena. Enako lahko pokažemo, da je $P = (p_1, \ldots, p_k, ip_{k+1}, \ldots, ip_{n+1})$. V tem primeru si ogledamo predznak vrednosti polinoma $W^{\mathbb{C}}$ v točki a_j. Z razcepom polinoma $W^{\mathbb{C}}$ na parcialne ulomke dobimo

$$W^{\mathbb{C}}(\lambda) = A(\lambda)\big(-1 + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{-\gamma_j}{\lambda - a_j}\big) = -A(\lambda) + \sum_{j=1}^{n} (-\gamma_j) \prod_{l \neq j} (\lambda - a_j)$$

za realne koeficiente γ_j. Od tod vidimo, da je

$$\operatorname{sgn}(W^{\mathbb{C}}(a_j)) = -\operatorname{sgn}(\gamma_j)(-1)^{n-j+1}\,.$$

Ker pa velja enakost $U^{\mathbb{C}}(a_j)W^{\mathbb{C}}(a_j) + (V^{\mathbb{C}}(a_j))^2 = 0$ in velja (7.6), je

$$\operatorname{sgn}(W^{\mathbb{C}}(a_j)) = \begin{cases} (-1)^{n-j+1} & ; \text{ if } j = k+1, \ldots, n+1 \\ (-1)^{n-j} & ; \text{ if } j = 1, \ldots, k\,. \end{cases}$$

Z enačenjem obeh $\operatorname{sgn}(W^{\mathbb{C}}(a_j))$ dobimo, da je $\operatorname{sgn}(\gamma_j) = 1$ za $j = 1, \ldots, k$. Zato ima enačba $P_j^2 = \gamma_j$ le realne korene. Podobno dobimo, da je $\operatorname{sgn}(\gamma_j) = -1$ za $j = k+1, \ldots, n+1$ in enačba $P_j^2 = \gamma_j$ ima le imaginarne korene.

□

Spomnimo se prvega glavnega izreka (glej v Uvodu), ki ga bomo sedaj lahko dokazali:

Izrek 4 *Povezane komponente regularne nivojske množice momentne preslikave Hamiltonovega sistema* $(T^*\mathcal{H}_k^n, \omega_k, H_k)$ *za* $k = 1, 2, \ldots, n+1$ *so torusi* $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$.

Dokaz: Naj bodo $c_1 < c_2 < \ldots < c_{n+1}$ urejene ničle polinoma f_h in naj bodo $u_{k,1} = u_1, \ldots, u_{k,n} = u_n$ ničle polinoma U_k, katerih lege (glede na $c_1, \ldots, c_{2n+1}$) so prikazane na Sliki 7.1. V tem primeru je realna krivulja na Sliki 7.1 realni del spektralne krivulje glede na involucijo τ_k. Ker veljajo enakosti (6.8), Trditev 42 in trditev zgoraj, je Izrek 4 dokazan.

□

Podobno trditev lahko pokažemo še za eno družino realnih form kompleksnega Neumannovega sistema. To je družina, ki pripada involucijam oblike $\tau_{\mathcal{S}}$ za $\mathcal{S} = \{k\}$, kjer je $k = 2, 3, \ldots, n+1$. Primer $\mathcal{S} = \{1\}$ pa je že vključen v prejšnji trditvi. V nadaljevanju bomo pisali $u_{\{k\},1} = u_1, \ldots, u_{\{k\},n} = u_n$.

Trditev 75 *Kompleksne koordinate Q and P so zaporedoma enake* $(iq_1, \ldots, iq_{k-1}, q_k, iq_{k+1}, \ldots, iq_{n+1})$ *in* $(ip_1, \ldots, ip_{k-1}, p_k, ip_{k+1}, \ldots, ip_{n+1})$ *natanko tedaj, ko so koeficienti polinomov* $U^{\mathbb{C}}$, $V^{\mathbb{C}}$ *in* $W^{\mathbb{C}}$ *realni in so ničle polinoma* f_h *in ničle* $u_1, \ldots, u_n$ *polinoma* $U^{\mathbb{C}}$ *urejene:*

a) če je $k = 2, \ldots, n$, *je*

$$\begin{aligned} u_1 < a_1 < u_2 < a_2 < \quad & \ldots \quad < u_{k-1} < a_{k-1} < a_k < a_{k+1} < u_k < a_{k+2} < u_{k+1} < \ldots \\ & \ldots \quad < a_n < u_{n-1} < a_{n+1} < u_n \end{aligned}$$

ter je $b_j \in (u_j, u_{j+1})$ *za* $j = 1, \ldots, n-1$ *in* $b_n \in (u_n, \infty)$.

b) če je $k = n+1$, *je*

$$u_1 < a_1 < u_2 < a_2 < \ldots < u_{n-1} < a_{n-1} < u_n < a_n < a_{n+1}$$

ter $b_j \in (u_j, u_{j+1})$ *za* $j = 1, \ldots, n-1$ *in* $b_n \in (u_n, \infty)$.

Dokaz: Če so za $k = 2, \ldots, n+1$ kompleksne koordinate enake

$$Q = (iq_1, \ldots, iq_{k-1}, q_k, iq_{k+1}, \ldots, iq_{n+1}) \quad \text{in} \quad P = (ip_1, \ldots, ip_{k-1}, p_k, ip_{k+1}, \ldots, ip_{n+1}),$$

imajo polinomi $U^{\mathbb{C}}$, $V^{\mathbb{C}}$ in $W^{\mathbb{C}}$ realne koeficiente in je $U^{\mathbb{C}}(\lambda) = U_{\{k\}}(\lambda) = A(\lambda) \sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_{\{k\},j} \frac{q_j^{2,}}{\lambda - a_j}$, kjer je $\epsilon_{\{k\},k} = 1$ in $\epsilon_{\{k\},j} = -1$ za $j \neq k$. Zato so lege ničel polinoma $U_{\{k\}}$ glede na konstante $a_1, \ldots, a_{n+1}$, take, kot v Trditvi 15 točka 2 in točka 3 (torej enaka zgornjima urejenostima). Ker je $f_h(\lambda) = U_{\{k\}}(\lambda) W_{\{k\}}(\lambda) + V_{\{k\}}^2(\lambda)$ in je zato $f_h(u_j) > 0$, pa velja:

a) če je $k = 2, \ldots, n$, na intervalih (u_i, u_{i+1}) pa leži liho število (ena ali tri) ničel a_j, je $b_j \in (u_j, u_{j+1})$ za $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Ker je $f(u_n) > 0$ in $f_h(\lambda) < 0$ za $\lambda >> 0$, obstaja še ena (in hkrati zadnja) ničla $b_n \in (u_n, \infty)$.

b) če je $k = n+1$, na intervalih (u_i, u_{i+1}) leži po ena ničla a_j, je $b_j \in (u_j, u_{j+1})$ za $j = 1, \ldots, n-1$. Ker je $f(u_n) > 0$ in $f_h(\lambda) < 0$ za $\lambda >> 0$, na intervalu (u_n, ∞) pa sta dve ničli a_n in a_{n+1} polinoma f_h, obstaja še ena (in hkrati zadnja) ničla $b_n \in (u_n, \infty)$.

Obratno, naj imajo polinomi $U^{\mathbb{C}}$, $V^{\mathbb{C}}$ in $W^{\mathbb{C}} = W$ realne koeficiente ter $U^{\mathbb{C}}$ in f_h urejene ničle, kot je določeno v trditvi. Z razcepom na parcialne ulomke je

$$U^{\mathbb{C}}(\lambda) \;=\; A(\lambda) \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\alpha_j}{\lambda - a_j} \;=\; \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \prod_{l \neq j} (\lambda - a_l),$$

pri čemer so α_j realni. Ker je $U^{\mathbb{C}}$ moničen stopnje n, iz lege njegovih ničel glede na $a_1, \ldots, a_{n+1}$ sledi

$$\operatorname{sgn}(U(a_j)) = \begin{cases} (-1)^{n-j} & ; \text{če je } \; j = 1, \ldots, k-1 \quad \text{in} \quad j = k+1, \ldots, n+1 \\ (-1)^{n-j+1} & ; \text{če je } \; j = k\,. \end{cases} \tag{7.8}$$

Po drugi strani pa je $U(a_j) = \alpha_j \prod_{l \neq j}(a_j - a_l)$ in zato

$$\operatorname{sgn}(U(a_j)) = \operatorname{sgn}(\alpha_j)(-1)^{n-j+1}\,. \tag{7.9}$$

S primerjavo (7.8) in (7.9) vidimo, da je $\operatorname{sgn}(\alpha_k) = 1$, zato ima enačba $Q_k^2 = \alpha_k$ realna korena. Za $j \neq k$ pa je $\operatorname{sgn}(\alpha_j) = -1$, zato ima enačba $Q_j^2 = \alpha_j$ imaginarna korena. Podobno lahko pokažemo, da je $P = (ip_1, \ldots, ip_{k-1}, p_k, ip_{k+1}, \ldots, ip_{n+1})$ iz predznakov vrednosti polinoma $W^{\mathbb{C}}$ v točkah a_j. Ker je

$$W^{\mathbb{C}}(\lambda) \;=\; A(\lambda)\big(-1 + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{-\gamma_j}{\lambda - a_j}\big) \;=\; -A(\lambda) + \sum_{j=1}^{n}(-\gamma_j)\prod_{l \neq j}(\lambda - a_j)\,, \tag{7.10}$$

je $\operatorname{sgn}(W^{\mathbb{C}}(a_j)) = -\operatorname{sgn}(\gamma_j)(-1)^{n-j+1}$. Iz enakosti $U^{\mathbb{C}}(a_j)W^{\mathbb{C}}(a_j) + (V^{\mathbb{C}}(a_j))^2 = 0$ in enakosti (7.8) pa je

$$\operatorname{sgn}(W(a_j)) = \begin{cases} (-1)^{n-j+1} & ; \text{če je } \; j = 1, \ldots, k-1 \quad \text{in} \quad j = k+1, \ldots, n+1 \\ (-1)^{n-j} & ; \text{če je } \; j = k\,. \end{cases}$$

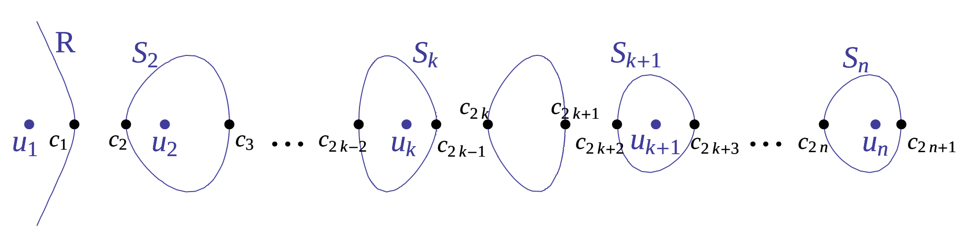
Torej je $\operatorname{sgn}(\gamma_k) = 1$ in ima enačba $P_k^2 = \gamma_k$ realna korena, ter je $\operatorname{sgn}(\gamma_j) = -1$ za $j \neq k$ in ima enačba $P_j^2 = \gamma_j$ imaginarna korena. $\square$

Ponovimo še drugi glavni izrek (glej v Uvodu):

Izrek 5 *Povezane komponente regularne nivojske množice momentne preslikave Hamiltonovega sistema* $(T^*\mathcal{H}^n_{\{k\}}, \omega_{\{k\}}, H_{\{k\}})$ *za* $k = 2, \ldots, n+1$ *so nekompaktne množice* $T^{n-1} \times \mathbb{R} = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{(n-1)-krat} \times \mathbb{R}$.

Dokaz: Zopet naj bodo $c_1 < c_2 < \ldots < c_{2n+1}$ urejene ničle polinoma f_h in naj bodo $u_1, \ldots, u_n$ ničle polinoma $U_{\{k\}}$. Lege ničel so prikazane na Sliki 7.2. Realna krivulja na Sliki 7.2 je realni del spektralne krivulje glede na involucijo $\tau_{\{k\}}$. Iz enakosti (6.8), Trditve 42 in trditve zgoraj so povezane komponente regularne nivojske množice momentne preslikave sistema $(T^*\mathcal{H}^n_{\{k\}}, \omega_{\{k\}}, H_{\{k\}})$ za $k = 2, 3, \ldots, n+1$ izomorfne nekompaktni množici $\mathbb{R} \times T^{n-1} \cong R \times S_2 \times \ldots \times S_n$.

$\square$



Slika 7.2: Realni del spektralne krivulje $\mu^2 = f_h(\lambda)$ glede na involucijo $\tau_{\{k\}}$

Primer 76 (nadaljevanje Primera 13) *Za hiperboloid* $-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ *je*

$$U_{\{2,3\}}(\lambda) = -q_1^2(\lambda - a_2)(\lambda - a_3) + q_2^2(\lambda - a_1)(\lambda - a_3) + q_3^2(\lambda - a_1)(\lambda - a_2)\,.$$

Za ničli u_1 *in* u_2 *polinoma* $U_{\{2,3\}}$ *velja*

$$u_1 < a_1 < a_2 < u_2 < a_3\,. \tag{7.11}$$

Vrednosti polinoma f_h *iz karakteristične enačbe (spektralne krivulje) sta za* $\lambda = u_1$ *in* $\lambda = u_2$ *nenegativni. Pišimo polinom* f_h *v obliki*

$$f_h(\lambda) = -(\lambda - a_1)(\lambda - a_2)(\lambda - a_3)(\lambda - b_1)(\lambda - b_2)\,.$$

Iz neenakosti (7.11) ter vrednosti $f_h(u_1) \geq 0$ *in* $f_h(u_2) \geq 0$ *lega ničel* b_1 *in* b_2 *polinoma* f_h *ni natanko določena. Velja pa ena od treh možnosti:* $b_1, b_2 \in (\infty, u_1)$ *ali* $b_1, b_2 \in (u_1, u_2)$ *ali* $b_1, b_2 \in (u_2, \infty)$.

V primeru Hamiltonovega sistema $(T^*\mathcal{H}^2_{\{2,3\}}, \omega_{\{2,3\}}, H_{\{2,3\}})$ *bi bilo torej smiselno študirati topologijo Arnold-Liouvilleovih množic glede na lego regularne vrednosti momentne preslikave v bifurkacijskem diagramu.*

Poglavje 8

Zaključek

V disertaciji smo definirali realne forme Hamiltonovih sistemov z vezmi. Z antiholomorfnimi involutivnimi avtomorfizmi $\tau_{\mathcal{S}}$ (glej (3.10)) smo skonstruirali $2^{n+1}-1$ realnih form kompleksnega C. Neumannovega sistema na T^*S^n. Pokazali smo, da so novi Hamiltonovi sistemi $(T^*\mathcal{H}^n_{\mathcal{S}}, \omega_{\mathcal{S}}, H_{\mathcal{S}})$ na hiperboloidih Arnold-Liouvilleovo integrabilni. Ker smo znali enostavno poiskati tudi Laxove enačbe novih sistemov, smo lahko eksplicitno zapisali družine prvih integralov. Skozi študij topologije Arnold-Liouvilleovih množic realnih form kompleksnega Neumannovega sistema smo definirali konično-hiperboloidne koordinate na enakoosnih hiperboloidih, ki so razširitev definicije eliptično-sferičnih koordinat na sferi S^n. Videli smo, da lahko na enem enakoosnem hiperboloidu obstaja več družin konično-hiperboloidnih koordinat. Na primeru smo videli, da za dano signaturo hiperboloida in pri poljubni permutaciji konstant $a_1, \ldots, a_{n+1}$, konično-hiperboloidne koordinate ne obstajajo nujno. Pokazali smo, da za množice oblike $\mathcal{S} = \{m, m+1, \ldots, k\}$, $m = 1, 2, \ldots, n+1$ in $k = m, m+1, \ldots, n+1$, konično-hiperboloidne koordinate vedno obstajajo in njihov obstoj ni odvisen od izbire konstant $a_1, \ldots, a_{n+1}$.

Laxova enačba Hamiltonovega sistema določa družino spektralnih krivulj. Ker je kompleksen Neumannov sistem primer Mumfordovega sistema, je Arnold-Liouvilleova množica, to je regularna nivojska množica momentne preslikave kompleksnega Neumannovega sistema, izomorfna množici deliteljev

$$\mathrm{Div}^n_{+,0}(\mathcal{C}) = \Big\{ D = \sum_{j=1}^{n} P_j \;\Big|\; P_j \neq \infty \text{ za vsak } j \,,\; P_j \neq \iota(P_l) \text{ če je } j \neq l \Big\} \,.$$

Pri tem je $P_j \cong (u_j, v_j) \in \mathcal{C}$ za ničle u_j Jacobijevega polinoma $U^{\mathbb{C}}$ (glej 4.3). Za dve družini realnih form kompleksnega Neumannovega sistema, to je za $(T^*\mathcal{H}^n_k, \omega_k, H_k)$ oziroma $(T^*\mathcal{H}^n_{\{k\}}, \omega_{\{k\}}, H_{\{k\}})$, smo pokazali, da so Arnold-Liouvilleove množice izomorfne kompaktnim torusom T^n oziroma nekompaktnim množicam $\mathbb{R} \times T^{n-1}$. Zgornje navedeno je strnjeno v članku [25].

V primeru Neumannovga sistema (in pripadajočih realnih form) so Hamiltonova funkcija in integrali Uhlenbeckove (in ustrezne realne forme integralov Uhlenbeckove) polinomi s sodimi stopnjami monomov. To so posebni primeri $\tau_k^{\mathbb{R}}$-invariantnih funkcij (glej Definicijo 20). V Poglavju 3 smo navedli in pokazali nekaj lastnosti $\tau_k^{\mathbb{R}}$-invariantnih funkcij, njihovih kompleksifikacij in pripadajočih realnih form (Lema 22, Lema 23, Trditev 24). Poiskali in dokazali smo še zvezo med integrali Uhlenbeckove in družino prvih integralov v [26] Neumannovega sistema (Trditev 49).

Klasifikacija topologije Arnold-Liouvilleovih množic za poljubno množico $\mathcal{S}$ je že za Neumannov sistem razvejan in kompleksen primer. V konkretnem in v splošnih primerih ta tematika odpira več smeri za nadaljnje raziskovanje:

1. klasifikacijo Arnold-Liouvilleovih množic vseh realnih form kompleksnega Neumanovega sistema za $n = 2, 3$
2. klasifikacijo Arnold-Liouvilleovih množic realnih form poljubnega generičnega Neumannovega sistema
3. klasifikacijo Arnold-Liouvilleovih množic realnih form kompleksifikacije negeneričnih (konfluentnih) primerov Neumannovega sistema
4. novih sistemov s spremembo začetnih parametrov (simplektične forme, delovanja grupe, ...) v konstrukciji Hamiltonovih sistemov po Adamsu, Harnadu in Previatu (glej [2])
5. ker so sfera in hiperboloidi posebni primeri simetričnih prostorov, posplošitev na kompaktne simetrične prostore in njihove nesimetrične nekompaktne sorodnike
6. stabilnosti rešitev realnih form Maxwell-Blochove enačbe. Maxwell-Blochovo enačbo lahko interpretiramo kot verigo Neumannovih sistemov, zato so, grobo rečeno, Liouvillove množice produkti Arnold-Liouvilleovih torusov C. Neumannovih sistemov.

Literatura

[1] Adams M R, Harnad J in Hurtubise J, Isospectral Hamiltonian Flows in Finite and Infinite Dimensions, II. Integration of Flows, *Commun. Math. Phys.* **134** (1990) 555-585

[2] Adams M R, Harnad J in Previato E, Isospectral Hamiltonian Flows in Finite and Infinite Dimensions, I. Generalized Moser Systems and Momet Maps into Loop Algebras, *Commun. Math. Phys.* **117** (1988) 451-500

[3] Adler M, van Moerbeke P in Vanhaecke P, *Algebraic Integrability, Painlevé Geometry and Lie Algebras*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2004

[4] Audin M, *Hamiltonian Systems and Their Integrability*, SMF/AMS texts and monographs, vol. 15, Société Mathématique de France 2001

[5] Audin M, *Spinning tops*, Cambrdge Studies in Advanced Mathematics, vol.51, Cambridge 1996

[6] Bolsinov A V in Jovanovic B, Magnetic Flows on Homogeneous Spaces, *Comment. Math. Helv.* **83** (2008) 679-700

[7] Bolsinov A V in Fomenko A T, *Integrable Hamiltonian Systems: Geometry, Topology, Classification*, Chapman & Hall/CRC 2004

[8] Cushman R H in Bates L M, *Global Aspects of Classical Integrable Systems*, Birkhäuser 1997

[9] Dullin H R in Hanßmann H, The degenerate C. Neumann system I: symmetry reduction and convexity, *Central European Journal of Mathematics* **10** (2012) 1627-1654

[10] Dullin H R et al, Actions of the Neumann systems via Picard-Fuchs equations, *Physica D* **155** (2001) 159-183

[11] Fay J D, *Theta Functions on Riemann Surfaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 352, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1973

[12] Forstnerič F, *Riemannove ploskve in analitična geometrija*, **spletni vir** (2014):
http://www.fmf.uni-lj.si/ forstneric/datoteke/Riemannove ploskve2.pdf

[13] Gerdjikov V S, Kyuldjiev A, Marmo G in Vilasi G, Real Hamiltonian forms of Hamiltonian systems, *Eur. Phys. J. B* **38** (2003) 635-649

[14] Griffiths P in Harris J, *Principles of Algebraic Gemetry*, Wiley and Sons 1978

[15] Gunning R C, *Lectures on Riemann surfaces*, Princeton University Press. 1966

[16] Harnad J, Isospectral Flow and Liouville-Arnold Integration in Loop Algebras, *Geometric and Quantum Methods in Integrable systems, Lecture Notes in Physics* **424** (1993) 1-42

[17] Hitchin N J, Segal G in Ward R, *Integrable systems, twistors, loop grous and Riemann surfaces*, Oxford Graduate texts in mathematics, Oxford Science Publications 1999

[18] Inoue R, Konishi Y in Yamazaki T, Jacobian variety and integrable systems - after Mumford, Beauville and Vanhaecke, *Journal of Geometry and Physics* **57** (2007) 815-831

[19] Inoue R, Vanhaecke P in Yamazaki T, Singular fiber of the Mumford system and rational soutions to the KdV hierarchy, *Communications on Pure and Applied Mathematics* **63** (2010) 508-532

[20] Kaushal R S, Classical and quantum mechanics of complex Hamiltonian systems: An extended complex phase space approach, *Pramana* **73** (2009) 287-297

[21] Moser J, Geometry of Quadrics and Spectral Theory, *The Chern Symposium, 1979*, 147-188, Berlin-Heidelberg-New York 1980

[22] Moser J, Various aspects of integrable Hamiltonian systems, *Dynamical Systems (C.I.M.E. Summer Schools, Bressanone, 1978)* 233-289, Prog. Math. & Birkhäuser Boston 1980

[23] Mumford D, *Tata Lectures on Theta II*, Progress in Mathematics 43, Boston: Birkhäuser 1984

[24] Neumann C, De problemate quodam mechanico, quod ad primam integralium ultraellipticorum classem revocatur, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **56** (1859) 46-63

[25] Novak T, Geometry of the real form of the complex Neumann system, sprejeto v objavo v *J. Nonlinear Math. Phys.* (2016)

[26] Ratiu T, The C. Neumann problem as a completely integrable system on an adjoint orbit, *Trans. Amer. Math. Soc.* **264** (1981) 321-329

[27] A.G. Reyman in M.A. Semenov-Tian-Shansky, *Integrable systems II*, Encyclopaedia Math. Sci. **16**, Dynamical systems VII, ed V.I. Arnold and S.P. Novikov 83-259, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1994

[28] Rudin W, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill 1970

[29] P. Saksida, Nahm's equations and generalizations of the Neumann system, *Proc. Lond. Math. Soc.* **78** (1999) 701-720

[30] P. Saksida, Integrable anharmonic oscillators on spheres and hyperbolic spaces, *Nonlinearity* **14** (2001) 977-994

[31] P. Saksida, Lattices of Neumann oscillators and Maxwell-Bloch equations, *Nonlinearity* **19** (2006) 747-768

[32] Vanhaecke P, *Integrable systems in the realm of algebraic geometry*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1638, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1996

[33] Vuk M, Algebraic integrability of confluent Neumann system, *J. Phys. A: Math. Gen.* **41** (2008) 395201

[34] Vuk M, Algebro-geometric aspects of superintegrability: the degenerate Neumann system, *arXiv* (2014) 1312.5459

[35] Zhou R in Hu X, From integrable to superintegrable, *J. Phys. A: Math. Gen.* **42** (2009) 175401