UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA MATEMATIKO

Matematika – 3. stopnja

Gašper Košmrlj

Igre, porojene iz grafovske dominacije

Doktorska disertacija

Mentor: prof. dr. Sandi Klavžar
Somentor: doc. dr. Matjaž Konvalinka

Ljubljana, 2015

Podpisani Gašper Košmrlj izjavljam:
– da sem doktorsko disertacijo z naslovom Igre, porojene iz grafovske dominacije izdelal samostojno pod mentorstvom prof. dr. Sandija Klavžarja in somentorstvom doc. dr. Matjaža Konvalinke
– da Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani dovoljujem objavo elektronske oblike svojega dela na spletnih straneh.

Ljubljana, 12.1.2015 Podpis: ....

Zahvala

V prvi vrsti bi se rad zahvalil Sandiju, ker me je naučil loviti ribe. Zahvale gredo tudi Matjažu, Boštjanu, Dougu, Paulu, Gabrielu in Csilli za vse poučne pripombe in diskusije, iz katerih sem se ogromno naučil. Na osebni ravni se želim še posebej zahvaliti Sonji za vso potrpljenje, pozornost in trud, ki mi ga namenja. Seveda ne smem pozabiti sošolcev, Jerneja, Petra, Davida in Gašperja, s katerimi smo rasli, se borili z izpiti in reševali probleme.

Povzetek

V delu preučujemo igre na grafih, ki temeljijo na dominaciji. Največ pozornosti posvetimo dominacijski igri, v kateri igralca dominator in zavlačevalka izmenično izbirata vozlišča končnega grafa, dokler izbrana vozlišča ne tvorijo dominacijske množice. Kot je jasno že iz imen igralcev, je dominatorjev cilj čim hitreje zaključiti igro, medtem ko zavlačevalka stremi k čim daljši igri. Igralno dominacijsko število grafa je invarianta, ki nam pove, koliko potez je potrebnih, ko oba igrata optimalno. Potem ko v prvem poglavju predstavimo zgodovino grafovske dominacije ter prve rezultate v povezavi z dominacijsko igro, se v drugem poglavju ukvarjamo z dominacijsko igro na disjunktni uniji grafov, v tretjem pa z igralnim dominacijskim številom na enostavnih družinah grafov. Četrto poglavje posvetimo realizacijam parov igralnega dominacijskega števila z visoko povezanimi družinami grafov, medtem ko v petem skonstruiramo neskončne razrede grafov, ki imajo igralno dominacijsko število (domnevno) maksimalno možno. V šestem poglavju rešimo klasični problem grafovskih invariant, in sicer, kako se invarianta poljubnega grafa spremeni, če mu odvzamemo eno povezavo ali eno vozlišče. V zadnjem poglavju nas zanimajo kombinatorne igre. Podrobneje si pogledamo kombinatorno različico dominacijske igre DOM, za katero določimo Sprague-Grundyjeve vrednosti nekaterih enostavnih družin grafov.

Math. Subj. Class. (2010): 05C57, 91A43, 05C69, 05C76
Ključne besede: grafovska dominacija, dominacijska igra, igralno dominacijsko število, igre na grafih

Abstract

In the thesis, we study games on graphs that are based on domination. Our main focus will be the domination game that is played by two players, Dominator and Staller, who are alternating in choosing vertices of a finite graph. The game ends when the set of chosen vertices forms a domination set. Dominator's goal is to finish the game in as few moves as possible, while Staller wants to delay the end of the game as long as she can. The total number of moves in the game, when both players are playing optimally, is called the game domination number. In the first chapter, we present the historical background of the domination theory in graphs, and introduce the domination game along with its first results. In Chapter 2, we study the domination game on disjoint unions of graphs, while Chapter 3 is used to present exact formulas for the game domination number of some simple classes of graphs. In the fourth chapter, we find highly connected families that realize all possible pairs of game domination numbers. In Chapter 5, we construct infinite families of 3/5-graphs and 3/5-trees, while Chapter 6 is used to solve a classical problem of graph invariants regarding edge and vertex removal. In the last chapter, we first present an overview of the similar combinatorial games, and then steer our attention towards the combinatorial game DOM that has similar rules as the domination game. We compute Sprague-Grundy values for some simple families of graphs.

Math. Subj. Class. (2010): 05C57, 91A43, 05C69, 05C76

Keywords: graph domination, domination game, game domination number, games on graphs

Kazalo

Poglavje 1

Uvod

1.1 Grafovska dominacija

Teorija grafov, katere začetek predstavlja objava članka Leonharda Eulerja leta 1736, v katerem je rešil problem sedmih mostov Königsberga, je v zadnjih desetletjih doživela popoln razcvet. Med številnimi področji je v zadnjih letih veliko pozornosti deležna tudi dominacija.

Prvi dominacijski problem je že leta 1862 reševal De Jaenisch [17], ko je iskal minimalno število kraljic na šahovski plošči velikosti $n \times n$, ki bi pokrilo vsa polja šahovnice. Ob koncu 19. stoletja so se šahovski privrženci navduševali tudi nad problemom iskanja najmanjšega števila šahovskih figur na šahovnici tako, da se med sabo ne napadajo, a pokrivajo vsa polja na plošči, ter problemom postavitve čim večjega števila šahovskih figur na ploščo na način, da se med sabo ne napadajo.

Formalno raziskovanje dominacije sega v leto 1958, ko je Berge v knjigi [3] vpeljal koncept grafovske dominacije, kot ga poznamo danes. Ore je nato leta 1962 v [34] predstavil koncepta dominacijske množice in dominacijskega števila. Slednjega sta leta 1977 Cockayne in Hedetniemi v [14] označila z danes uveljavljeno oznako γ.

S hitro rastjo teorije grafov se odpirajo vedno novi problemi, med katerimi so tudi igre na grafih. Ena izmed takih je tudi igra barvanja grafov (glej npr. [21, 2]), ki je Henninga [27] navdahnila za razmišljanje o podobni igri, povezani z dominacijo. Njegovi ideji so sledili Brešar et al., ki so v [9] definirali dominacijsko igro.

1.2 Dominacijska igra

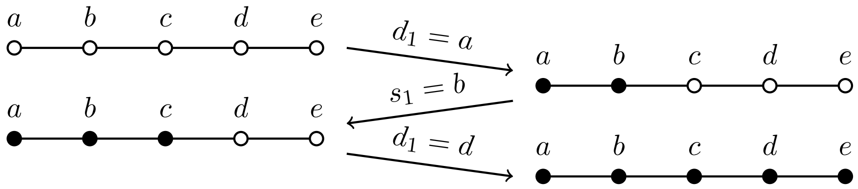
Dominacijska igra je igra na končnem grafu G, v kateri igralca, *dominator* in *zavlačevalka*, izmenično izbirata vozlišča, tako da v vsaki potezi dominirata vsaj eno novo vozlišče. Vozlišče je dominirano v primeru, ko je izbrano, ali je sosednje izbranemu v eni izmed predhodnih potez. Igra se konča, ko so vsa vozlišča dominirana, tj. ko množica izbranih vozlišč tvori dominacijsko množico grafa G. Dominatorjev cilj je končati igro v čim manjšem številu potez, medtem ko je zavlačevalkin cilj igrati igro čim dlje. Ločimo dve osnovni različici igre glede na igralca, ki naredi prvo potezo. V igri 1 začne dominator, medtem ko v igri 2 prvo vozlišče izbere zavlačevalka. *Igralno dominacijsko število*, označeno z $\gamma_g(G)$, je skupno število potez v igri 1, ko oba igralca igrata optimalno. Podobno je $\gamma_g'(G)$ skupno število potez v igri 2 ob predpostavki, da oba igrata optimalno.

1.2.1 Osnovni pojmi

V nalogi bomo obravnavali tudi različico igre, kjer je enemu izmed igralcev dovoljeno izpustiti eno potezo. Skupno število potez, ko je ta igralec dominator in oba igrata optimalno, bomo označili z γ_g^{dp} v igri 1 in z $\gamma_g'^{dp}$ v igri 2. Podobno označujeta γ_g^{sp} oziroma $\gamma_g'^{sp}$ skupno število potez v igri 1 oziroma igri 2, ko zavlačevalka uživa privilegij izpuščanja poteze ter oba igrata optimalno. Poudarimo še, da se izpuščena poteza ne šteje kot ena izmed potez, tako da je skupno število potez kot v običajni igri enako številu izbranih vozlišč.

Z $d_1, d_2, \ldots$ bomo označili dominatorjeve poteze v igri 1, s $s_1, s_2, \ldots$ pa zavlačevalkine. Podobno bomo v igri 2 z $d_1', d_2', \ldots$ označili dominatorjeve, s $s_1', s_2', \ldots$ pa zavlačevalkine poteze. Naj bo S množica vozlišč grafa G. Potem z $G|S$ označimo *delno dominiran* graf G, v katerem so dominirana natanko vozlišča iz S. V posebnem, ko je $S = \{x\}$, bomo pisali $G|x$. Vozlišče v delno dominiranega grafa $G|S$ je *nasičeno*, če so vsa vozlišča iz njegove zaprte soseščine dominirana, tj. $N[v] \subseteq S$. *Residualni graf* dobimo iz $G|S$ tako, da odstranimo vsa nasičena vozlišča in vse povezave med že dominiranimi vozlišči.

Relacija med igralnim dominacijskim številom v igri 1 in v igri 2 na istem grafu je prvi problem, s katerim so se ukvarjali avtorji v [9]. Hitro lahko ugotovimo, da obstajajo grafi, pri katerih je število potez v igri 1 manjše kot v igri 2, kar pomeni, da ima začetni igralec prednost. Primer takega grafa je zvezda. Na drugi strani pa obstajajo tudi grafi, kot je C_6, pri katerih pa ima prednost igralec, ki je na potezi



Slika 1.1: Primer igre 1 na P_5

drugi.

Brešar et al. so v [9] k problemu relacije med γ_g in γ_g' na istem grafu pristopili s pomočjo *strategije namišljene igre*. Ta se izkaže za zelo uporabno pri dokazovanju relacij med igralnim dominacijskim številom različnih variant iger. Eden izmed igralcev (bodisi dominator, bodisi zavlačevalka) si zamisli še eno igro, ki se igra vzporedno z dejansko. Igralno dominacijsko število namišljene igre je znano, denimo k. Če je dominator igralec, ki si zamišlja drugo igro, potem ima strategijo v dejanski igri, ki mu zagotavlja največ k potez. Podobno ima zavlačevalka strategijo, ki ji zagotavlja vsaj k potez, v primeru, ko si drugo igro zamišlja ona. Strategija igralca, ki si vzporedno igro zamišlja, je naslednja. Za vsako potezo nasprotnika v originalni igri naredi enako potezo v namišljeni igri, nato v njej optimalno odgovori in na koncu naredi enako potezo v originalni igri. Pri tem lahko nastaneta dva problema, in sicer, če poteza nasprotnika, ki je legalna v dejanski igri, ni legalna v namišljeni igri, ter v primeru, ko je poteza igralca, ki si igro zamišlja, legalna v namišljeni igri, ne pa tudi v dejanski. Problema potem rešujemo individualno v odvisnosti od variante iger. Cilj je izraziti mejo za igralno dominacijsko število dejanske igre z igralnim dominacijskim številom namišljene igre.

S pomočjo strategije namišljene igre so tako Brešar et al. [9] pokazali, da velja

$$\gamma_g(G) - 1 \leq \gamma_g'(G) \leq \gamma_g(G) + 2$$

za vsak graf G ter domnevali, da je tudi na desni strani neenačbe enka. To so Kinnersley et al. s pomočjo principa nadaljevanja tudi dokazali.

Izrek 1.1 [30, lema 2.1 (Princip nadaljevanja)] *Naj bo G graf in $A, B \subseteq V(G)$. Če je $B \subseteq A$, potem velja $\gamma_g(G|A) \leq \gamma_g(G|B)$ in $\gamma_g'(G|A) \leq \gamma_g'(G|B)$.*

Ta izrek nam potrdi, kar se intiutivno zdi očitno, vendar pa še zdaleč ni, saj bi si lahko katerikoli igralec z nekaj navidezno slabimi potezami zgolj pripravil situacijo za kasneje, ko bi lahko odigral nekaj zanj zelo dobrih potez. Poleg tega princip nadaljevanja pravi, da dominator nikoli ne bo izbral lista (razen seveda v grafu, kjer so vsa vozlišča listi), kajti z izbiro listovega soseda dominira vsa tista vozlišča (in mogoče še nekatera druga), ki bi jih dominiral, če bi igral na list. Prav tako lahko iz definicije igre odstranimo pogoj, da dominator vedno dominira vsaj eno novo, še ne dominirano vozlišče, saj je to že implicitno skrito v optimalnosti dominatorjeve strategije.

Kot smo že napovedali zgoraj, je direktna posledica principa nadaljevanja relacija med γ_g in γ_g'.

Izrek 1.2 [9, 30] *Za vsak graf G velja $|\gamma_g(G) - \gamma_g'(G)| \leq 1$.*

Pravimo, da delno dominiran graf $G|S$ *realizira* par naravnih števil (k, ℓ), če je $\gamma_g(G|S) = k$ in $\gamma_g'(G|S) = \ell$. Zgornji izrek nam torej pove, da ima vsak par, ki se da realizirati, eno izmed oblik $(k, k+1)$, (k, k) ali $(k+1, k)$. Rekli bomo, da je graf $(k, +)$, če realizira $(k, k+1)$. Podobno je graf $(k, =)$, če realizira (k, k), in $(k+1, -)$, če realizira $(k+1, k)$. Grafom, ki so $(k, +)$ za neki k, bomo rekli PLUS grafi. Analogno definiramo tudi ENAČAJ in MINUS grafe.

1.2.2 Prvi rezultati

Glede na to, da dominacijska igra izvira iz grafovske dominacije, je naravno pričakovati, da lahko igralno dominacijsko število na obe strani omejimo z dominacijskim številom. Velja:

Trditev 1.3 [9, izrek 1] *Za vsak graf G velja $\gamma(G) \leq \gamma_g(G) \leq 2\gamma(G) - 1$.*

Spodnja meja očitno sledi že iz definicije dominacijske igre, saj izbrana vozlišča ob koncu igre tvorijo dominacijsko množico. Jasno je tudi, da si dominator lahko z izbiranjem vozlišč iz minimalne dominacijske množice grafa G zagotovi, da je v igri na G odigranih največ $2\gamma(G) - 1$. Dokazali so še, da sta obe meji za vse vrednosti γ_g tudi doseženi.

S pomočjo trditve 1.3 lahko igralno dominacijsko število povežemo tudi z najpomembnejšim odprtim problemom v dominaciji, Vizingovo domnevo, zastavljeno v [38].

Vizingova domneva *Za vsak par grafov G in H velja $\gamma(G \,\Box\, H) \geq \gamma(G)\gamma(H)$.*

Tu smo s $\Box$ označili kartezični produkt grafov. Za več informacij o njem priporočamo [24]. Iz izreka 1.3 torej sledi, da Vizingova domneva ni resnična, če uspemo najti taka grafa G in H, za katera velja $\gamma_g(G)\gamma_g(H) > 4\gamma_g(G \,\Box\, H)$.

Brešar et al. so v [10] študirali igralno dominacijsko število vpetih podgrafov v odnosu do igralnega dominacijskega števila supergrafa.

Trditev 1.4 [10, trditev 4.1] *Za vsak graf G in njegov vpet podgraf H velja*

$$\gamma_g(H) \geq \frac{\gamma_g(G)+1}{2}\,.$$

Poleg tega so za vsak $m \geq 3$ poiskali tudi 3-povezan graf G_m ter 2-povezan vpet podgraf H_m, za katera velja $\gamma_g(G_m) = 2m-2$ in $\gamma_g(H_m) = m$. Torej je razlika med igralnima dominacijskima številoma supergrafa in vpetega podgrafa lahko poljubno velika.

Brešar et al. so v [10] dokazali, da nobeno drevo ne realizira parov $(3,2)$ in $(4,3)$, ter postavili splošnejšo domnevo, ki pravi, da nobeno drevo ni MINUS graf. Kinnersley et al. so nato v [30] potrdili domnevo in jo razširili na (delno dominirane) gozdove.

Izrek 1.5 [30, izrek 4.6] *Za vsak gozd F in $S \subseteq V(F)$ velja $\gamma_g(F|S) \leq \gamma_g'(F|S)$.*

Poglavje bomo zaključili s kratkim pregledom ostalih poglavij. V naslednjem poglavju se ukvarjamo z realizacijo igralnega dominacijskega števila disjunktne unije dveh grafov. Predstavljeni so rezultati v splošnem primeru, prav tako pa je predstavljena družina grafov, na kateri se da igro na uniji enostavneje opisati. Celotno poglavje sloni na [18], ki je plod skupnega dela s P. Dorbecom in G. Renaultom. V tretjem poglavju bomo nato poiskali igralno dominacijsko število nekaterih družin grafov, kot so polni dvodelni grafi, pajki, poti, cikli in glavniki. Formula za slednje je bila objavljena v [31], prav tako pa na istem članku temelji tudi celotno četrto poglavje, v katerem poiščemo visoko povezane družine MINUS, ENAČAJ in PLUS grafov. Peto poglavje je povzeto po [11] (skupno delo z B. Brešarjem, S. Klavžarjem in D. Rallom). V njem skonstruiramo neskončne družine grafov (v posebnem tudi dreves), ki realizirajo zgornjo mejo igralnega dominacijskega števila, postavljeno v 3/5-domnevah. V šestem poglavju dokažemo, da se igralno dominacijsko število poljubnega grafa spremeni največ za 2, če grafu odvzamemo eno povezavo. Podobno raziščemo tudi spremembo v igralnem dominacijskem številu, če grafu odvzamemo eno vozlišče. Celotno poglavje sledi [12], skupnemu delu z B. Brešarjem, P. Dorbecom in S. Klavžarjem. V zadnjem, sedmem poglavju najprej naredimo kratek pregled kombinatornih iger, ki bazirajo na grafovski dominaciji, nato pa še definiramo kombinatorno igro DOM, ki izvira iz dominacijske igre. Za to igro poiščemo Sprague-Grundyjeve vrednosti nekaterih enostavnih družin grafov.

Poglavje 2

Dominacijska igra na disjunktni uniji

V tem poglavju bomo študirali realizacije disjunktne unije dveh grafov in odgovorili na naslednje vprašanje.

Vprašanje 1 *Kaj lahko povemo o igralnem dominacijskem številu disjunktne unije* $G \cup H$*, če poznamo igralni dominacijski števili grafov* G *in* H*?*

Vprašanje delno izvira iz teorije kombinatornih iger, ki je obsežno študirana v knjigah [1, 4]. Kombinatorne igre lahko klasificiramo na štiri razrede glede na to, kateri igralec začne in kateri igralec zmaga. Pogosto lahko nato samo s poznavanjem razredov posameznih dveh grafov ugotovimo tudi, kateremu razredu pripada njuna unija.

Na žalost v primeru dominacijske igre to v splošnem ne velja. Seveda je igralno dominacijsko število unije povezano z igralnima dominacijskima številoma njenih komponent, vendar pa, kot bomo pokazali v podpoglavju 2.4, lahko unija realizira različne tipe parov. Ne glede na to pa smo našli družino grafov, za katero je mogoče povedati mnogo več. Graf G je *nikoli-minus* graf, če za vsako podmnožico njegovih vozlišč S velja, da $G|S$ ni MINUS graf, tj. $\gamma_g(G|S) \leq \gamma_g'(G|S)$.

Intuitivna ideja je ta, da noben igralec ne pridobi ničesar, če izpusti eno ali več potez v igri na nikoli-minus grafih. Kinnersley et al. [30] so z izrekom 1.5 dokazali, da so gozdovi nikoli-minus grafi.

2.1 Osnovne lastnosti nikoli-minus grafov

Motivacija za definicijo nikoli-minus grafov je lastnost, da nobeden izmed igralcev ne pridobi, če sam izpusti potezo, zato moramo najprej dokazati, da je naša (formalna) definicija pravilna, tj. da so nikoli-minus grafi dobro definirani. Brešar et al. so v [9] dokazali naslednje.

Lema 2.1 *Za vsak graf G velja $\gamma_g(G) \leq \gamma_g^{sp}(G) \leq \gamma_g(G)+1$ ter $\gamma_g(G)-1 \leq \gamma_g^{dp}(G) \leq \gamma_g'(G)$.*

Kljub temu, da Brešar et al. v [9] tega niso dokazali, lahko z enakim načinom dokazovanja – strategijo namišljene igre – dokažemo podobne neenakosti za delno dominirane grafe v obeh variantah igre.

Lema 2.2 *Za vsak graf G in $S \subseteq V(G)$ velja*

$$\begin{array}{rcccl} \gamma_g(G|S) & \leq & \gamma_g^{sp}(G|S) & \leq & \gamma_g(G|S)+1\,, \\ \gamma_g'(G|S) & \leq & \gamma_g'^{sp}(G|S) & \leq & \gamma_g'(G|S)+1\,, \\ \gamma_g(G|S)-1 & \leq & \gamma_g^{dp}(G|S) & \leq & \gamma_g(G|S)\,, \\ \gamma_g'(G|S)-1 & \leq & \gamma_g'^{dp}(G|S) & \leq & \gamma_g'(G|S)\,. \end{array}$$

Sedaj lahko dokažemo, da se z izpuščanjem potez na nikoli-minus grafih ne pridobi nobene prednosti.

Trditev 2.3 *Za vsak nikoli-minus graf G in $S \subseteq V(G)$ velja $\gamma_g^{dp}(G|S) = \gamma_g^{sp}(G|S) = \gamma_g(G|S)$ in $\gamma_g'^{dp}(G|S) = \gamma_g'^{sp}(G|S) = \gamma_g'(G|S)$.*

Dokaz: Po lemi 2.2 že velja $\gamma_g^{dp}(G|S) \leq \gamma_g(G|S) \leq \gamma_g^{sp}(G|S)$ in $\gamma_g'^{dp}(G|S) \leq \gamma_g'(G|S) \leq \gamma_g'^{sp}(G|S)$. Denimo sedaj, da za delno dominiran nikoli-minus graf $G|S$ velja $\gamma_g^{dp}(G|S) < \gamma_g(G|S)$. Da pridemo do protislovja, uporabimo strategijo namišljene igre.

Originalna igra je igra 1 na grafu $G|S$, medtem ko si dominator vzporedno zamišlja igro 1 na $G|S$, kjer lahko on izpusti eno potezo. Zavlačevalka torej igra optimalno v originalni igri. Ker velja $\gamma_g^{dp}(G|S) < \gamma_g(G|S)$, lahko sklepamo, da dominator izpusti eno potezo. Denimo, da se to zgodi potem, ko sta odigrala x potez. Naj X označuje množico do sedaj dominiranih vozlišč. Po izpuščeni potezi igrata na $G|X$ igro 2. Ker je v začetnih x potezah dominator igral optimalno, zavlačevalka pa ne nujno, dobimo, da velja

$$x + \gamma_g'(G|X) \leq \gamma_g^{dp}(G|S)\,.$$

Ker pa je zavlačevalka igrala optimalno v originalni igri, dobimo

$$x + \gamma_g(G|X) \geq \gamma_g(G|S)\,.$$

Če uporabimo še dejstvo, da je G nikoli-minus graf, za katerega torej velja $\gamma_g(G|X) \leq \gamma_g'(G|X)$, dobimo naslednje protislovje:

$$\gamma_g(G|S) \leq x + \gamma_g(G|X) \leq x + \gamma_g'(G|X) \leq \gamma_g^{dp}(G|S)\,.$$

Analogno lahko dokažemo še preostale tri neenakosti, ki zadevajo igro 2 in/ali varianto igre, ko lahko zavlačevalka izpusti poljubno število potez. ∎

Naslednja lema govori še o eni lastnosti nikoli-minus grafov in je zgolj posplošitev rezultata iz [30]. Dokaz je bolj ali manj enak.

Lema 2.4 *Naj bo G graf in $S \subseteq V(G)$ tako, da za vsak $X \supseteq S$ velja $\gamma_g(G|X) \leq \gamma_g'(G|X)$. Potem velja $\gamma_g((G \cup K_1)|S) \geq \gamma_g(G|S) + 1$ in $\gamma_g'((G \cup K_1)|S) \geq \gamma_g'(G|S) + 1$.*

Dokaz: Uporabimo indukcijo na število vozlišč v $V(G) \setminus S$. Če je $V(G) \setminus S$ prazna množica, je trditev trivialna. Predpostavimo sedaj, da je $S \subsetneq V(G)$ in da trditev drži za vsak $G|X$, kjer je $S \subsetneq X$.

Najprej si poglejmo igro 1. Naj bo izbira v optimalna prva poteza dominatorja na $(G \cup K_1)|S$. Če je v dodano vozlišče, tj. $v \notin V(G)$, potem po indukcijski predpostavki velja $\gamma_g((G \cup K_1)|S) = \gamma_g'(G|S) + 1 \geq \gamma_g(G|S) + 1$. Po drugi strani, ko je $v \in V(G)$, pa naj bo $X = S \cup N[v]$. Glede na izbiro poteze dominatorja in po indukcijski predpostavki velja $\gamma_g((G \cup K_1)|S) = 1 + \gamma_g'((G \cup K_1)|X) \geq 1 + \gamma_g'(G|X) + 1$. Ker dominatorjeva izbira v na grafu $G|S$ ni nujno optimalna, dobimo še $\gamma_g(G|S) \leq 1 + \gamma_g'(G|X)$. Če družimo obe neenačbi, dobimo želen rezultat.

Obravnavajmo sedaj še igro 2. Naj bo izbira w optimalna zavlačevalkina poteza na grafu $G|S$ in naj bo $Y = S \cup N[w]$. Zaradi optimalnosti te poteze potem velja $\gamma_g'((G \cup K_1)|S) = 1 + \gamma_g((G \cup K_1)|Y)$. Če zavlačevalka igra w na grafu $(G \cup K_1)|S$, zaradi indukcijske predpostavke velja še $\gamma_g'((G \cup K_1)|S) \geq 1 + \gamma_g((G \cup K_1)|S) \geq 1 + \gamma_g(G|Y) + 1$. S tem je trditev dokazana tudi za igro 2. ∎

2.2 Več nikoli-minus grafov

Najprej dokažimo precej uporabno lemo o družini MINUS grafov.

Lema 2.5 *Naj delno dominiran graf* $G|S$ *realizira par* $(k, k-1)$ *in naj bo izbira* u *legalna poteza na* $G|S$. *Potem graf* $G|(S \cup N[u])$ *realizira* $(k-2, k-1)$.

Dokaz: Naj bo $X = S \cup N[u]$. Po definiciji igralnega dominacijskega števila velja $k = \gamma_g(G|S) \leq 1 + \gamma_g'(G|X)$ in tudi $k - 1 = \gamma_g'(G|S) \geq 1 + \gamma_g(G|X)$. Z uporabo teh dveh neenakosti in izreka 1.2 dobimo

$$k - 1 \leq \gamma_g'(G|X) \leq \gamma_g(G|X) + 1 \leq k - 1\,.$$

Ker sta na levi in na desni strani enaki vrednosti, veljajo enačaji skozi celotno verigo neenakosti in zato dobimo, da graf $G|X$ realizira par $(k-2, k-1)$. ∎

Kot smo že povedali v uvodu, so Kinnersley et al. v [30] dokazali, kar so Brešar et al. domnevali že v [10], in sicer da (delno dominirani) gozdovi spadajo v družino nikoli-minus grafov. V nadaljevanju tega razdelka bomo predstavili še dve družini nikoli-minus grafov. Prva je posplošitev razcepnih grafov.

Graf G je *tri-razcepen*, če lahko njegovo množico vozlišč razdelimo na paroma disjunktne množice $A \neq \emptyset, B, C$ tako, da velja

$$\forall u \in A\ \forall v \in A \cup C:\ uv \in E(G),$$
$$\forall u \in B\ \forall v \in B \cup C:\ uv \notin E(G).$$

Izrek 2.6 *Vsak povezan tri-razcepen graf je nikoli-minus graf.*

Dokaz: Naj bo G tri-razcepen graf s pripadajočo particijo (A, B, C) in naj bo $S \subseteq V(G)$. Dokazati želimo, da velja $\gamma_g(G|S) \leq \gamma_g'(G|S)$. Če je $\gamma_g(G|S) \leq 2$, potem trditev očitno velja. Predpostavimo sedaj, da je $\gamma_g(G|S) \geq 3$.

Najprej opazimo, da za dominatorja vedno obstaja optimalna strategija, ki vključuje samo izbire vozlišč iz A, saj po definiciji za vsak $u \in B \cup C$ obstaja $v \in A$ tako, da velja $N[u] \subseteq N[v]$. Zaradi principa nadaljevanja lahko zato v nadaljevanju dokaza predpostavimo, da dominator v vsaki potezi izbere vozlišče iz A.

Denimo, da poznamo dominatorjevo optimalno strategijo v igri 2. S pomočjo strategije namišljene igre bomo pokazali, da igra 1 ne traja dlje kot igra 2. Dominator si najprej zamisli, da zavlačevalka izbere $v_0 \in B \cup C$. Dominator nato igra (originalno) igro 1 na $G|S$ s pomočjo strategije na (namišljeni) igri 2 na grafu $G|(S \cup N[v_0])$. Zavlačevalka igra optimalno na $G|S$. Po prvi dominatorjevi potezi, ki je narejena v namišljeni igri in nato odigrana še v originalni igri, je edina razlika med obema igrama morda dominirano vozlišče v_0. To je dominirano v namišljeni igri, medtem ko to ni nujno res v originalni igri. Ker ima v_0 vse sosede v $A \cup C$ in je celotna množica $A \cup C$ dominirana v prvi dominatorjevi potezi, sledi, da je vsaka legalna poteza v namišljeni igri legalna tudi v originalni. Po drugi strani pa lahko zavlačevalka v svoji potezi na novo dominira samo v_0, kar je legalna poteza v originalni igri, ne pa tudi v namišljeni. V tem primeru si dominator zamisli, da je (legalno) izbrala neko vozlišče v_1. Situacija se lahko ponovi tudi z v_1, zato si dominator zamisli zavlačevalkino potezo na v_2. Naj bo v_i zadnje tako vozlišče, preden se namišljena igra zaključi. Sledi, da je v_i potencialno edino vozlišče, ki je dominirano v namišljeni igri, ni pa dominirano v originalni.

Predpostavimo sedaj, da se je namišljena igra končala, in s $k_{\mathcal{I}}$ označimo število potez v namišljeni igri. Ker je namišljena igra igra 2, na kateri je dominator igral optimalno, zavlačevalka pa ne nujno, velja $k_{\mathcal{I}} \leq \gamma'_g(G|S)$. Na tej točki, ko je namišljena igra končana, je originalna igra bodisi končana, bodisi je v_i edino nedominirano vozlišče. Ker je za dokončanje originalne igre potrebna še največ ena poteza, velja $k_{\mathcal{R}} \leq k_{\mathcal{I}} - 1 + 1$, kjer smo z $k_{\mathcal{R}}$ označili skupno število potez v originalni igri. V njej je zavlačevalka igrala optimalno, kar pa ni nujno res za dominatorja. Od tu sledi, da velja še $k_{\mathcal{R}} \geq \gamma_g(G|S)$. Če združimo vse tri neenakosti, lahko dokaz zaključimo z

$$\gamma_g(G|S) \leq k_{\mathcal{R}} \leq k_{\mathcal{I}} \leq \gamma'_g(G|S)\,.$$

■

Naslednja družina nikoli-minus grafov je družina *dualno tetivnih grafov*, glej [8], ki je definirana na sledeč način. Naj bo G graf in v eno izmed njegovih vozlišč. Vozlišče $u \in N[v]$ je *maksimalni sosed* vozlišča v, če za vsak $w \in N[v]$ velja $N[w] \subseteq N[u]$, tj. $N[u]$ vsebuje vsa vozlišča, ki so na razdalji največ 2 od v. Ureditev vozlišč $v_1, \ldots, v_n$ je *ureditev glede na maksimalno soseščino*, če ima v_i maksimalnega soseda v podgrafu G, induciranem z vozlišči $v_1, \ldots, v_i$ za vsak $i \leq n$. Graf je dualno tetiven, če v njem obstaja ureditev vozlišč glede na maksimalno soseščino. V posebnem so gozdovi in intervalni grafi dualno tetivni grafi.

Preden dokažemo, da so dualno tetivni grafi nikoli-minus grafi, potrebujemo še naslednjo lemo.

Lema 2.7 *Za vsak dualno tetiven graf G na n vozliščih obstaja ureditev glede na maksimalno soseščino $v_1, \ldots, v_n$, v kateri je vsako vozlišče v_i, ki ima za maksimalnega soseda v $G_i = G[\{v_1, \ldots, v_i\}]$ samo samega sebe, izolirano v G_i.*

Dokaz: Naj bo G dualno tetiven graf na n vozliščih in $v_1, \ldots, v_n$ ureditev glede na maksimalno soseščino v G z minimalnim številom neizoliranih vozlišč v G_i, ki so sami sebi edini maksimalni sosed. Če takih vozlišč ni, je dokaz zaključen. Predpostavimo sedaj, da obstaja vsaj eno tako vozlišče. Z v_k označimo tako vozlišče, ki ima največji indeks.

Najprej opazimo, da v $G_k = G[\{v_1, \ldots, v_k\}]$ ni nobenega vozlišča na razdalji 2 od v_k. Če bi bilo vozlišče u v G_k sosednje vozliščema v_k in u', potem bi bila po definiciji maksimalnega soseda tudi v_k in $'$ soseda. Torej je v_k soseden vsem vozliščem v svoji komponenti. Trdimo, da je $v_k, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n$ prav tako ureditev glede na maksimalno soseščino v G. Vsa vozlišča v_i, kjer je $i > k$, in vsa vozlišča z indeksom manjšim od k, ki niso v komponenti vozlišča v_k v grafu G_k, imajo istega maksimalnega soseda. Vozlišče v_k pa je maksimalni sosed vsem vozliščem z indeksom manjšim od k, ki ležijo v komponenti v_k v grafu G_k. Naj bo v_i vozlišče, ki je samo sebi edini maksimalni sosed v novi ureditvi. Vozlišče v_i je bil edini maksimalni sosed samemu sebi že v originalni ureditvi. Poleg tega se soseščina v_i v G_i ni spremenila, razen v primeru, če je bilo vozlišče v_i v komponenti v_k v G_k. Očitno je v novi ureditvi v_k izolirano vozlišče v G_k, ki je samo sebi edini maksimalni sosed. Torej nova ureditev $w_1, \ldots, w_n$ vsebuje manj neizoliranih vozlišč, ki imajo samo samega sebe za maksimalnega soseda. To je v protislovju s prvotno izbrano ureditvijo. ∎

Izrek 2.8 *Dualno tetivni grafi so nikoli-minus grafi.*

Dokaz: Izrek bomo dokazali z indukcijo na število nedominiranih vozlišč. Naj bo G dualno tetivni graf in $v_1, \ldots, v_n$ ureditev njegovih vozlišč glede na maksimalno soseščino, v kateri je vozlišče v_i samo sebi maksimalni sosed le v primeru, ko je v_i izolirano v $G[\{v_1, \ldots, v_n\}]$. Taka ureditev po lemi 2.7 vedno obstaja. Naj bo $S \subseteq V(G)$ in j največji indeks, za katerega vozlišče v_j ni v množici S. Predpostavimo, da delno dominiran graf $G|S$ realizira par $(k, k-1)$, kjer je $k \geq 3$. Naj bo v_i maksimalni sosed v_j v grafu $G_j = G[\{v_1, \ldots, v_j\}]$, izbira u optimalna zavlačevalkina poteza na grafu $G|(S \cup N[v_i])$ in $X = S \cup N[v_i] \cup N[u]$. Po lemi 2.5 sledi, da grafa $G|(S \cup N[v_i])$ in $G|(S \cup N[u])$ oba realizirata par $(k-2, k-1)$. Zaradi optimalnosti zavlačevalkine poteze na u velja

$$k - 1 = \gamma_g'(G|(S \cup N[v_i])) = \gamma_g(G|X) + 1\,.$$

Naj bo v_ℓ vozlišče sosednje v_j. Z indukcijo na ℓ bomo dokazali, da velja $N[v_\ell] \subset (S \cup N[v_i])$. V primeru, ko je $\ell \leq j$, zaradi dejstva, da je v_i maksimalni sosed v_j v G_j, sledi, da vsi sosedje vozlišča v_ℓ ležijo bodisi v $N[v_i]$, bodisi imajo indeks večji od j in so zato v S. V obeh primerih torej trditev drži. Naj bo sedaj $\ell > j$ in v_m maksimalni sosed vozlišča v_ℓ v $G_\ell = G[\{v_1, \ldots, v_\ell\}]$ z najmanjšim indeksom. Ker v_ℓ ni izolirano v G_ℓ, potem je $m < \ell$. Ker je v_j soseden z v_ℓ in je $j < \ell$, sledi, da je v_j sosed vozlišča v_m. Po indukcijski predpostavki potem velja $N[v_m] \subset (S \cup N[v_i])$, od koder sledi, da vsi sosedje $v_{\ell'}$ vozlišča v_ℓ, kjer je $\ell' \leq \ell$, ležijo v $N[v_m] \subset (S \cup N[v_i])$, medtem ko tisti, za katere velja $\ell' > \ell$, ležijo v S. Od tu potem sledi, da velja $N[v_\ell] \subset (S \cup N[v_i])$.

Iz zgornjega sledi, da vozlišče u ni sosed vozlišča v_j, saj sicer poteza na u ne bi bila legalna v $G|(S \cup N[v_i])$. Po principu nadaljevanja potem sledi

$$\gamma_g(G|(S \cup N[u])) \geq \gamma_g(G|(X \setminus \{v_j\}))\,.$$

Ker so vsa vozlišča na razdalji največ 2 od v_j dominirana v $G|X$, dobimo, da velja $\gamma_g(G|(X \setminus \{v_j\})) = \gamma_g((G \cup K_1)|X)$. Po indukcijski predpostavki sedaj lahko uporabimo lemo 2.4 in dobimo

$$\gamma_g(G|(X \setminus \{v_j\})) \geq \gamma_g(G|X) + 1\,.$$

Na koncu še združimo dobljene neenakosti in dokaz zaključimo z naslednjim protislovjem

$$k - 2 = \gamma_g(G|(S \cup N[u])) \geq \gamma_g(G|(X \setminus \{v_j\})) \geq \gamma_g(G|X) + 1 = k - 1\,.$$

Sledi, da $G|S$ ni MINUS graf. ∎

2.3 Realizacije unije nikoli-minus grafov

V tem razdelku se osredotočimo na vprašanje 1, pri čemer se omejimo le na nikoli-minus grafe. Najprej dokažemo izrek, iz katerega dobimo meje igralnega dominacijskega števila disjunktne unije dveh nikoli-minus grafov.

Izrek 2.9 *Naj bosta $G_1|S_1$ in $G_2|S_2$ delno dominirana nikoli-minus grafa in x poljubna legalna poteza na $G_1|S_1$. Potem velja*

$$\begin{aligned}
\gamma_g((G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2)) &\geq \gamma_g(G_1|S_1) + \gamma_g(G_2|S_2)\,, && (2.1)\\
\gamma_g((G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2)) &\leq 1 + \gamma_g'(G_1|(S_1 \cup N[x])) + \gamma_g'(G_2|S_2)\,, && (2.2)\\
\gamma_g'((G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2)) &\leq \gamma_g'(G_1|S_1) + \gamma_g'(G_2|S_2)\,, && (2.3)\\
\gamma_g'((G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2)) &\geq 1 + \gamma_g(G_1|(S_1 \cup N[x])) + \gamma_g(G_2|S_2)\,. && (2.4)
\end{aligned}$$

Dokaz: Pri dokazovanju vseh mej si pomagamo s *strategijo sledenja.* Ko igralec uporabi to strategijo, pomeni, da vsakič, ko je to mogoče, igra v komponenti, v kateri je igral igralec pred njim.

Najprej si poglejmo igro 1 na grafu $(G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2)$. Zavlačevalka uporablja strategijo sledenja. Najprej predpostavimo, da se igra na G_1 konča pred igro na G_2. Potem si zavlačevalka lahko s svojo strategijo zagotovi, da je na grafu $G_1|S_1$ odigranih vsaj $\gamma_g(G_1|S_1)$ potez. Ker pa je lahko dominator tisti, ki zadnji igra na G_1, je zavlačevalka potem prisiljena igrati na G_2. Taka situacija dovoljuje dominatorju, da preskoči eno potezo na G_2. Ker je $G_2|S_2$ nikoli-minus graf, po trditvi 2.3 sledi, da si zavlačevalka zagotovi vsaj $\gamma_g(G_2|S_2)$ potez na grafu $G_2|S_2$. Skupno število potez na uniji $(G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2)$ torej ni manjše kot $\gamma_g(G_1|S_1) + \gamma_g(G_2|S_2)$. Z analognimi argumenti dobimo, da se igra na uniji ne konča prej kot v $\gamma_g(G_1|S_1) + \gamma_g(G_2|S_2)$ potezah v primeru, ko je igra na G_2 prej zaključena kot igra na G_1. V obeh primerih dobimo želeno neenakost.

V igri 2, ko dominator uporablja strategijo sledenja, lahko z enakim sklepanjem pridemo do naslednje neenakosti

$$\gamma'_g((G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2)) \leq \gamma'_g(G_1|S_1) + \gamma'_g(G_2|S_2)\,.$$

Vrnimo se nazaj k igri 1. Dominator najprej odigra $x \in V(G_1)$ in nato uporablja strategijo sledenja do konca igre. S tem si lahko zagotovi, da velja $\gamma_g((G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_1)) \leq 1 + \gamma'_g((G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2 \cup N[x]))$ in po trditvi 2.3 tudi

$$\gamma_g((G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2)) \leq 1 + \gamma'_g(G_1|(S_1 \cup N[x])) + \gamma'_g(G_2|S_2)\,.$$

Enako velja za zavlačevalko v igri 2, s čimer dobimo še neenakost (2.4). ∎

V primeru, da sta komponenti unije nikoli-minus grafa, nam meje iz zadnjega izreka dajo precej natančne meje za vrednosti, ki jih je možno realizirati z unijo. Najprej obravnavamo primer, ko je vsaj ena izmed komponent ENAČAJ graf.

Izrek 2.10 *Naj bosta $G_1|S_1$ in $G_2|S_2$ delno dominirana nikoli-minus grafa. Če je $G_1|S_1$ $(k, =)$ in je $G_2|S_2$ $(\ell, \star)$, kjer je $\star \in \{=, +\}$, potem je disjunktna unija $(G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2)$ $(k + \ell, \star)$.*

Dokaz: Uporabimo neenakosti iz izreka 2.9. V igri 1 dominator naredi optimalno potezo na x v grafu $G_2|S_2$, za katero velja $\gamma'_g(G_2|(S_2 \cup N[x])) = \ell - 1$. Z uporabo neenakosti (2.1) in (2.2), v katerih zamenjamo vlogi $G_1|S_1$ ter $G_2|S_2$, dobimo

$$k + \ell \leq \gamma_g((G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2)) \leq 1 + k + \ell - 1\,.$$

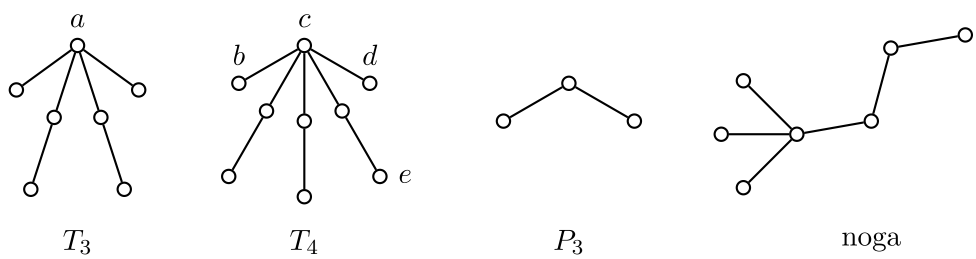
Podobno lahko tudi zavlačevalka v igri 2 optimalno izbere y v grafu $G_2|S_2$, od koder sledi $\gamma_g(G_2|(S_2 \cup N[y])) = \gamma'_g(G_2|S_2) - 1$. Z uporabo neenakosti (2.3) in (2.4) dobimo še $\gamma_g'((G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2)) = \gamma_g'(G_1|S_1) + \gamma_g'(G_2|S_2)$, s čimer smo dokazali, da je graf $(G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2)$ res $(k+\ell, \star)$. ■

V drugem primeru, ko sta obe komponenti unije PLUS grafa, pa dobimo naslednji rezultat.

Izrek 2.11 *Naj bosta $G_1|S_1$ in $G_2|S_2$ delno dominirana nikoli-minus grafa. Če je $G_1|S_1$ $(k,+)$ in je $G_2|S_2$ $(\ell,+)$, potem velja*

$$k+\ell \leq \gamma_g((G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2)) \leq k+\ell+1,$$
$$k+\ell+1 \leq \gamma_g'((G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2)) \leq k+\ell+2\,.$$

Dodatno velja še, da so vse meje lahko dosežene.



Slika 2.1: Drevesa T_3, T_4, P_3 in noga

Dokaz: Podobno kot v dokazu prejšnjega izreka iz neenakosti (2.1) in (2.2) sledi $k+\ell \leq \gamma_g((G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2)) \leq k+\ell+1$, iz neenakosti (2.3) in (2.4) pa $k+\ell+1 \leq \gamma_g'((G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2)) \leq k+\ell+2$.

V nadaljevanju bomo dokazali še, da so vse štiri meje zares dosežene. Naj bo T_i drevo s korenom stopnje $i+1$, na katerega sta pripeta dva lista in $i-1$ poti dolžine dve. Na sliki 2.1 sta narisana T_3 (s korenom a) in T_4 (s korenom c). Enostavno je videti, da T_i realizira par $(i, i+1)$, medtem ko je $\gamma(T_i) = i$. Trdimo, da za vsaka $k, \ell \geq 1$ velja $\gamma_g(T_k \cup T_\ell) = k+\ell+1$. Dominator zagotovi, da sta v prvih treh potezah odigrana korena obeh dreves. Do konca igre je potem potrebnih še največ $k+\ell-2$ potez.

Podobno velja še $\gamma_g(T_k \cup T_\ell) = k+\ell+2$ za $k \geq 3$ in $\ell \geq 1$. Zavlačevalka v svoji prvi potezi izbere list, soseden korenu v T_k (npr. b na sliki 2.1). Ne glede na to, kje igra dominator (npr. a), lahko v svoji drugi potezi zavlačevalka izbere še en list, soseden korenu v enem izmed grafov (npr. d). Če sta po dominatorjevi drugi potezi oba korena nasičena, morata igralca odigrati še vsaj $k+\ell-2$ potez, v nasprotnem pa zavlačevalka igra na koren, ki še ni nasičen. Nato je potrebnih še najmanj $k+\ell-3$ potez do konca igre. V obeh primerih dobimo, da lahko zavlačevalka zagotovi, da je skupno odigranih še vsaj $k+\ell+2$ potez. S tem smo pokazali, da sta zgornji meji v izreku res tesni.

Za dokaz, da sta tudi spodnji meji doseženi, si poglejmo unijo poti reda tri in t.i. noge, glej sliko 2.1. Noga je graf, ki ga dobimo tako, da povežemo vozlišče stopnje 3 3-zvezde in list poti na treh vozliščih. Hitro lahko izračunamo, da P_3 realizira par $(1,2)$, medtem ko noga realizira par $(3,4)$. Na roke je enostavno preveriti, da njuna unija potem realizira par $(4,5)$. ■

Iz zadnjih dveh izrekov direktno sledi naslednja posledica.

Posledica 2.12 *Disjunktna unija nikoli-minus grafov je nikoli-minus graf.*

Zaradi te posledice lahko razširimo še izrek 2.6.

Posledica 2.13 *Vsi tri-razcepni grafi so nikoli-minus grafi.*

2.4 Realizacije unije splošnih grafov

V tem razdelku bomo obravnavali še realizacije disjunktne unije poljubnih grafov. Najprej navedemo izreku 2.9 podoben izrek, ki obravnava primere glede na parnost skupnega števila potez v določeni igri.

Izrek 2.14 *Naj bosta $G_1|S_1$ in $G_2|S_2$ delno dominirana grafa.*

- *Če sta $\gamma_g(G_1|S_1)$ in $\gamma_g(G_2|S_2)$ sodi, potem velja*

$$\gamma_g((G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2)) \geq \gamma_g(G_1|S_1) + \gamma_g(G_2|S_2). \tag{2.5}$$

- *Če je $\gamma_g(G_1|S_1)$ liho in $\gamma_g'(G_2|S_2)$ sodo, potem velja*

$$\gamma_g((G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2)) \leq \gamma_g(G_1|S_1) + \gamma_g'(G_2|S_2). \tag{2.6}$$

- *Če sta $\gamma_g'(G_1|S_1)$ in $\gamma_g'(G_2|S_2)$ sodi, potem velja*

$$\gamma_g'((G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2)) \leq \gamma_g'(G_1|S_1) + \gamma_g'(G_2|S_2). \tag{2.7}$$

- *Če je $\gamma_g'(G_1|S_1)$ liho in $\gamma_g(G_2|S_2)$ sodo, potem velja*

$$\gamma_g'((G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2)) \geq \gamma_g'(G_1|S_1) + \gamma_g(G_2|S_2). \tag{2.8}$$

Dokaz: Dokaz je podoben dokazu izreka 2.9. Dokažimo najprej neenakost (2.5). Zavlačevalka uporablja strategijo sledenja. Brez škode za splošnost predpostavimo še, da se igra na G_1 zaključi pred igro na G_2. Če dominator igra optimalno v G_1, potem zaradi parnosti zavlačevalka igra zadnjo potezo v G_1, od koder sledi, da dominator ne more izpustiti poteze na G_2, zato je na G_2 odigranih vsaj $\gamma_g(G_2|S_2)$ potez. Če pa dominator igra tako, da je na G_1 potrebna še ena poteza, potem je število potez na G_2 vsaj $\gamma_g'^{dp}(G_2|S_2)$, kar pa po lemi 2.2 ni manjše od $\gamma_g(G_2|S_2) - 1$. V obeh scenarijih dobimo enako spodnjo mejo, tj. $\gamma_g((G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2)) \geq \gamma_g(G_1|S_1) + \gamma_g(G_2|S_2)$. Z enakim argumentom, le da dominator uporablja strategijo sledenja, dokažemo tudi neenakost (2.7).

Podobno dokažemo še neenakost (2.6). Naj dominator najprej naredi optimalno potezo na x v $G_1|S_1$ in nato do konca igre uporablja strategijo sledenja. Potem zavlačevalka igra v grafu $(G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup N[x] \cup S_2)$. Ker po predpostavki velja, da sta $\gamma_g'(G_1|(S_1 \cup N[x])) = \gamma_g(G_1|S_1) - 1$ in $\gamma_g'(G_2|S_2)$ obe sodi, po zgornjem argumentu sledi, da velja $\gamma_g((G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2)) \leq \gamma_g(G_1|S_1) + \gamma_g'(G_2|S_2)$. Na enak način dokažemo še neenakost 2.8, pri čemer je zavlačevalka ta, ki naredi najprej optimalno potezo in nato uporabi strategijo sledenja. ∎

Sedaj lahko s pomočjo izrekov 2.9 in 2.14 obravnavamo 21 različnih primerov disjunktnih unij s poljubnimi grafi. Primeri se med seboj razlikujejo po parnosti skupnega števila potez v vsaki od komponent ter po parih, ki jih komponente realizirajo. Pri računanju igralnega dominacijskega števila unije bomo uporabljali še naslednji izrek.

Izrek 2.15 *Naj bosta $G_1|S_1$ in $G_2|S_2$ delno dominirana grafa. Potem velja*

$$\begin{aligned}
\gamma_g((G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2)) &\geq \gamma_g(G_1|S_1) + \gamma_g(G_2|S_2) - 1\,, && (2.9)\\
\gamma_g((G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2)) &\leq \gamma_g(G_1|S_1) + \gamma_g'(G_2|S_2) + 1\,, && (2.10)\\
\gamma_g'((G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2)) &\leq \gamma_g'(G_1|S_1) + \gamma_g'(G_2|S_2) + 1\,, && (2.11)\\
\gamma_g'((G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2)) &\geq \gamma_g'(G_1|S_1) + \gamma_g(G_2|S_2) - 1\,. && (2.12)
\end{aligned}$$

Dokaz: Najprej si poglejmo igro 1 na grafu $(G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2)$. Zavlačevalka si vzporedno zamišlja še dve ločeni igri, prvo na $G_1|S_1$ in drugo na $G_2|S_2$. Vsakič, ko dominator naredi potezo v eni izmed komponent v originalni igri na $(G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2)$, zavlačevalka to potezo ponovi v ustrezni zamišljeni igri in nato v njej optimalno odgovori. Poteze so legalne, dokler ena izmed zamišljenih iger (in s tem ena izmed komponent v originalnem grafu) ni zaključena. Če je zavlačevalka tista, ki je naredila zadnjo potezo, potem potrebujeta vsaj $\gamma_g(G_1|S_1)$ potez v prvi in vsaj $\gamma_g(G_2|S_2)$ potez v drugi komponenti unije, saj je dominator začel v obeh igrah, vse poteze pa so bile legalne. V primeru, ko dominator zaključi prvo izmed iger, brez škode za splošnost naj bo to igra na $G_1|S_1$, dobimo, da je v tej komponenti unije odigranih vsaj $\gamma_g(G_1|S_1)$ potez. V originalni igri nato dominator preskoči potezo v drugi komponenti. Ker taka poteza ni legalna v zamišljeni igri na $G_2|S_2$, si zavlačevalka zamisli, da je dominator igral poljubno legalno potezo. Nato naredi svojo potezo, katero potem ponovi v originalni igri. Igra se nato normalno nadaljuje, dokler zamišljena igra ni končana. Vse zavlačevalkine poteze v originalni so legalne, saj je množica dominiranih vozlišč v drugi komponenti originalne igre podmožica dominiranih vozlišč v zamišljeni igri. Kadar dominatorjeva poteza ni legalna v zamišljeni, si zavlačevalka zamisli poljubno legalno potezo. V zamišljeni igri potrebujeta vsaj $\gamma_g(G_2|S_2)$ potez. Ker se originalna ne konča pred zamišljeno igro, dobimo, da je v originalni igri potrebnih vsaj $\gamma_g(G_2|S_2) - 1$ potez, saj se izpuščena poteza ne šteje. Na uniji $(G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2)$ skupaj potrebujeta torej vsaj $\gamma_g(G_1) + \gamma_g(G_2) - 1$ potez. Na enak način lahko pokažemo še ostale neenakosti. ■

V tabeli 2.1 sedaj predstavimo splošne meje za igralno dominacijsko število disjunktne unije dveh grafov. Prva dva stolpca v tabeli nam povesta parnost in tip obeh komponent, pri čemer e, e_1 in e_2 označujejo soda števila, o, o_1 in o_2 pa liha. V tretjem in četrtem stolpcu so meje na igralno dominacijsko število unije v igri 1 ter igri 2. V zadnjih dveh stolpcih pa najdemo oznake neenakosti, ki jih uporabimo v dokazu mej. Oznaki dodamo $*$, ko uporabimo neenakost, pri kateri zamenjamo vlogi G_1 in G_2.

Izrek 2.16 *Meje iz tabele 2.1 držijo. V posebnem dobimo, da velja*

$$\begin{aligned} \gamma_g(G_1 \cup G_2) - (\gamma_g(G_1) + \gamma_g(G_2)) &\in \{-1, 0, 1, 2\} \\ \gamma'_g(G_1 \cup G_2) - (\gamma'_g(G_1) + \gamma'_g(G_2)) &\in \{-2, -1, 0, 1\} \end{aligned}$$

in vse te vrednosti so dosežene.

Vrstice v tabeli 2.1 so urejene naraščajoče glede na razliko med zgornjo in spodnjo mejo. V vseh razen štirih primerih smo našli grafe, ki dosežejo meje iz tabele 2.1. Ti primeri, ki so bili preverjeni z računalnikom, so navedeni v tabeli 2.2. Grafi so bodisi opisani spodaj, bodisi so narisani na sliki 2.2.

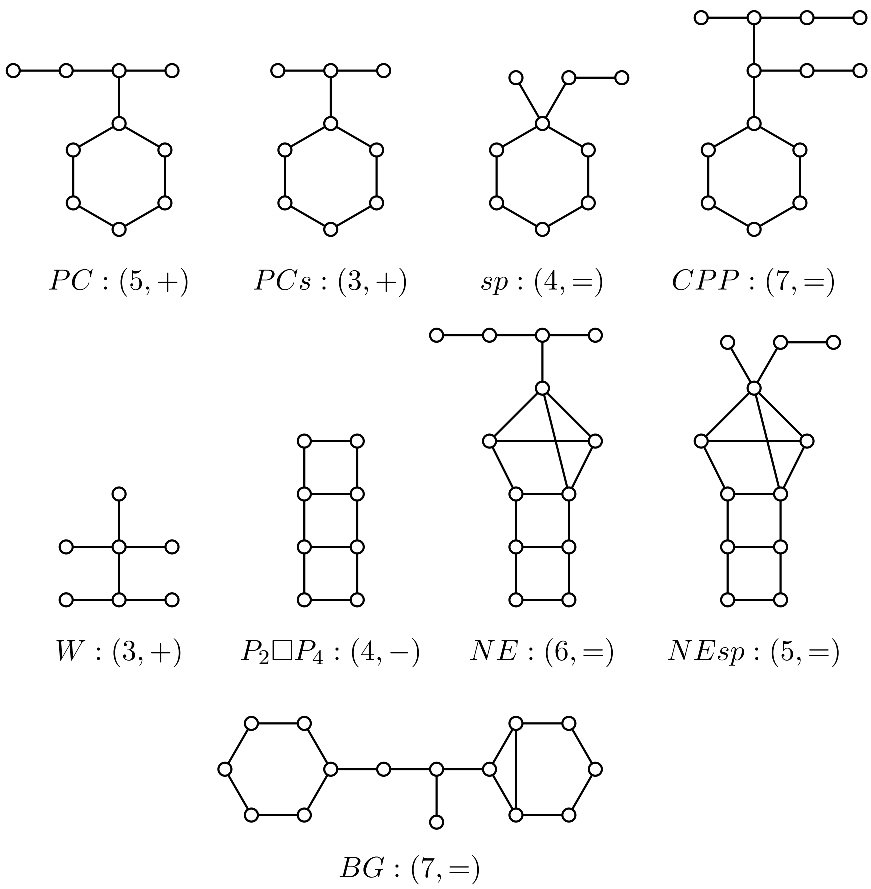
G_1	G_2	γ_g	γ_g'	za γ_g	za γ_g'
$(o_1,-)$	$(o_2,+)$	$\gamma_g = o_1+o_2-1$	$\gamma_g' = o_1+o_2$	(2.9),(2.6*)	(2.12*),(2.7)
$(e_1,-)$	$(e_2,+)$	$\gamma_g = e_1+e_2$	$\gamma_g' = e_1+e_2+1$	(2.5),(2.10*)	(2.8*),(2.11)
$(o_1,-)$	$(o_2,-)$	$\gamma_g = o_1+o_2-1$	$\gamma_g' = o_1+o_2-2$	(2.9),(2.6)	(2.12),(2.7)
$(e_1,-)$	$(e_2,-)$	$\gamma_g = e_1+e_2$	$\gamma_g' = e_1+e_2-1$	(2.5),(2.10)	(2.8),(2.11)
$(o_1,=)$	$(o_2,-)$	$\gamma_g = o_1+o_2-1$	$o_1+o_2-1 \leq \gamma_g' \leq o_1+o_2$	(2.9),(2.6)	(2.12),(2.11)
$(e_1,=)$	$(e_2,-)$	$\gamma_g = e_1+e_2$	$e_1+e_2-1 \leq \gamma_g' \leq e_1+e_2$	(2.5),(2.10)	(2.12),(2.11)
$(e,=)$	$(o,-)$	$e+o-1 \leq \gamma_g \leq e+o$	$\gamma_g' = e+o-1$	(2.9),(2.10)	(2.12),(2.7)
$(o,=)$	$(e,-)$	$e+o-1 \leq \gamma_g \leq e+o$	$\gamma_g' = e+o$	(2.9),(2.10)	(2.8),(2.11)
$(e,=)$	$(o,+)$	$e+o-1 \leq \gamma_g \leq e+o$	$e+o \leq \gamma_g' \leq e+o+1$	(2.9),(2.6*)	(2.12*),(2.11)
$(o,-)$	$(e,+)$	$e+o-1 \leq \gamma_g \leq e+o$	$e+o \leq \gamma_g' \leq e+o+1$	(2.9),(2.10*)	(2.12*),(2.11)
$(e,-)$	$(o,+)$	$e+o-1 \leq \gamma_g \leq e+o$	$e+o \leq \gamma_g' \leq e+o+1$	(2.9),(2.10*)	(2.12*),(2.11)
$(e,=)$	$(o,=)$	$e+o-1 \leq \gamma_g \leq e+o$	$e+o \leq \gamma_g' \leq e+o+1$	(2.9),(2.6*)	(2.8*),(2.11)
$(o,-)$	$(e,-)$	$e+o-1 \leq \gamma_g \leq e+o$	$e+o-2 \leq \gamma_g' \leq e+o-1$	(2.9),(2.10)	(2.12),(2.11)
$(e_1,=)$	$(e_2,=)$	$e_1+e_2 \leq \gamma_g \leq e_1+e_2+1$	$e_1+e_2-1 \leq \gamma_g' \leq e_1+e_2$	(2.5),(2.10)	(2.12),(2.7)
$(e_1,=)$	$(e_2,+)$	$e_1+e_2 \leq \gamma_g \leq e_1+e_2+1$	$e_1+e_2+1 \leq \gamma_g' \leq e_1+e_2+2$	(2.5),(2.10*)	(2.8*),(2.11)
$(o,=)$	$(e,+)$	$e+o-1 \leq \gamma_g \leq e+o+1$	$e+o \leq \gamma_g' \leq e+o+2$	(2.9),(2.10*)	(2.8),(2.11)
$(o_1,+)$	$(o_2,+)$	$o_1+o_2-1 \leq \gamma_g \leq o_1+o_2+1$	$o_1+o_2 \leq \gamma_g' \leq o_1+o_2+2$	(2.9),(2.6)	(2.12),(2.7)
$(e_1,+)$	$(e_2,+)$	$e_1+e_2 \leq \gamma_g \leq e_1+e_2+2$	$e_1+e_2+1 \leq \gamma_g' \leq e_1+e_2+3$	(2.5),(2.10)	(2.8),(2.11)
$(o_1,=)$	$(o_2,=)$	$o_1+o_2-1 \leq \gamma_g \leq o_1+o_2+1$	$o_1+o_2-1 \leq \gamma_g' \leq o_1+o_2+1$	(2.9),(2.10)	(2.12),(2.11)
$(o_1,=)$	$(o_2,+)$	$o_1+o_2-1 \leq \gamma_g \leq o_1+o_2+1$	$o_1+o_2 \leq \gamma_g' \leq o_1+o_2+2$	(2.9),(2.10*)	(2.12*),(2.11)
$(e,+)$	$(o,+)$	$e+o-1 \leq \gamma_g \leq e+o+2$	$e+o \leq \gamma_g' \leq e+o+3$	(2.9),(2.10)	(2.12),(2.11)

Tabela 2.1: Meje igralnega dominacijskega števila disjunktne unije poljubnih grafov

- P_4 je $(2,=)$
- $BLP = P_2 \square P_4 \cup P_3$ je $(4,+)$
- $BLC = P_2 \square P_4 \cup C_6$ je $(6,=)$
- $BLCK = P_2 \square P_4 \cup C_6 \cup K_1$ je $(7,=)$
- $BLPK = P_2 \square P_4 \cup P_3 \cup K_1$ je $(6,+)$
- $BLWK = P_2 \square P_4 \cup W \cup K_1$ je $(8,+)$

G_1	G_2	spodnja meja γ_g	zgornja meja γ_g	spodnja meja γ_g'	zgornja meja γ_g'
$(o_1,-)$	$(o_2,+)$	$C_6 \cup P_3$	$C_6 \cup P_3$	$C_6 \cup P_3$	$C_6 \cup P_3$
$(e_1,-)$	$(e_2,+)$	$P_2\Box P_4 \cup T_2$	$P_2\Box P_4 \cup T_2$	$P_2\Box P_4 \cup T_2$	$P_2\Box P_4 \cup T_2$
$(o_1,-)$	$(o_2,-)$	$C_6 \cup C_6$	$C_6 \cup C_6$	$C_6 \cup C_6$	$C_6 \cup C_6$
$(e_1,-)$	$(e_2,-)$	$P_2\Box P_4 \cup P_2\Box P_4$	$P_2\Box P_4 \cup P_2\Box P_4$	$P_2\Box P_4 \cup P_2\Box P_4$	$P_2\Box P_4 \cup P_2\Box P_4$
$(o_1,=)$	$(o_2,-)$	$K_1 \cup C_6$	$K_1 \cup C_6$	?	$K_1 \cup C_6$
$(e_1,=)$	$(e_2,-)$	$P_8 \cup P_2\Box P_4$	$sp \cup P_2\Box P_4$	$P_8 \cup P_2\Box P_4$	$sp \cup P_2\Box P_4$
$(e,=)$	$(o,-)$	$NE \cup C_6$	$P_8 \cup C_6$	$P_8 \cup C_6$	$P_8 \cup C_6$
$(o,=)$	$(e,-)$	$P_{10} \cup P_2\Box P_4$	$BG \cup P_2 \Box P_4$	$P_{10} \cup P_2\Box P_4$	$P_{10} \cup P_2\Box P_4$
$(e,=)$	$(o,+)$	$NE \cup W$	$P_4 \cup T_3$	$NE \cup W$	$P_4 \cup T_3$
$(o,-)$	$(e,+)$	$C_6 \cup BLPK$	$C_6 \cup T_4$	$C_6 \cup BLPK$	$C_6 \cup T_4$
$(e,-)$	$(o,+)$	$P_2\Box P_4 \cup P_{11}$	$P_2\Box P_4 \cup PCs$	$P_2\Box P_4 \cup P_{11}$	$P_2\Box P_4 \cup PCs$
$(e,=)$	$(o,=)$	$NE \cup P_6$	$sp \cup BLCK$	$NE \cup P_6$	$sp \cup BLCK$
$(o,-)$	$(e,-)$	$C_6 \cup (3P_2\Box P_4)$	$(3C_6) \cup P_2\Box P_4$	$C_6 \cup (3P_2\Box P_4)$	$(3C_6) \cup P_2\Box P_4$
$(e_1,=)$	$(e_2,=)$	$NE \cup NE$	$sp \cup sp$	?	$sp \cup sp$
$(e_1,=)$	$(e_2,+)$	$P_4 \cup T_4$	$sp \cup T_4$	$P_4 \cup T_4$	$sp \cup T_4$
$(o,=)$	$(e,+)$	$CPP \cup BLPK$	$K_1 \cup BLP$	$CPP \cup BLPK$	$K_1 \cup BLP$
$(o_1,+)$	$(o_2,+)$	$PC \cup PC$	$T_5 \cup T_5$	$PC \cup PC$	$T_5 \cup T_5$
$(e_1,+)$	$(e_2,+)$	$BLPK \cup BLPK$	$BLP \cup BLP$	$BLPK \cup BLPK$	$BLP \cup BLP$
$(o_1,=)$	$(o_2,=)$	$CPP \cup CPP$	?	?	$NEsp \cup NEsp$
$(o_1,=)$	$(o_2,+)$	$BLCK \cup PC$	$BLCK \cup PCs$	$BLCK \cup PC$	$BLCK \cup PCs$
$(e,+)$	$(o,+)$	$BLWK \cup PC$	$T_4 \cup (C_6 \cup P_3)$	$BLWK \cup PC$	$T_4 \cup (C_6 \cup P_3)$

Tabela 2.2: Primeri grafov, ki dosežejo meje iz tabele 2.1



Slika 2.2: Grafi, ki so uporabljeni v tabeli 2.2

Poglavje 3

Igralno dominacijsko število nekaterih družin grafov

Najprej si poglejmo, kakšno je igralno dominacijsko število na nekaterih trivialnih družinah grafov. Očitno je $\gamma_g(K_n) = \gamma_g'(K_n) = 1$ za vsak $n \geq 1$. Za polne dvodelne grafe dobimo naslednji formuli

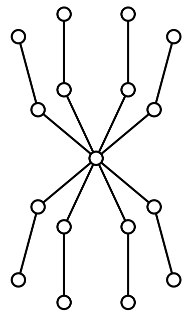
$$\begin{aligned} \gamma_g(K_{n,m}) &= \begin{cases} 1, & n = 1 \text{ ali } m = 1 \\ 2, & n, m > 1 \text{ in } (n = 2 \text{ ali } m = 2) \\ 3, & n, m > 2 \end{cases}, \\ \gamma_g'(K_{n,m}) &= \begin{cases} 1, & n = 1 \text{ in } m = 1 \\ 2, & n, m > 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Še ena izmed družin, za katere je igralno dominacijsko število trivialno izračunati, je družina t.i. pajkov. Pajek reda n, označen s S_n, je graf, katerega dobimo iz $K_{1,n}$ tako, da vsako povezavo enkrat subdividiramo, glej sliko 3.1 za S_8. Enostavno je preveriti, da S_1 realizira par $(1, 2)$, medtem ko S_n realizira par $(n + 1, n + 1)$ za vsak $n \geq 2$.

V splošnem je igralno dominacijsko število zelo težko izračunati. Celo za tako enostavne grafe, kot so poti in glavniki, so dokazi daleč od trivialnih.

3.1 Poti in cikli

Kinnersley et al. so v [29] dokazali naslednje formule za igralno dominacijsko število poti in ciklov.



Slika 3.1: Pajek reda 8

Izrek 3.1 *Za vsak $n \geq 0$ velja*

$$\gamma_g(P_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1, & n \equiv 3 \pmod 4 \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil, & \text{sicer} \end{cases}$$

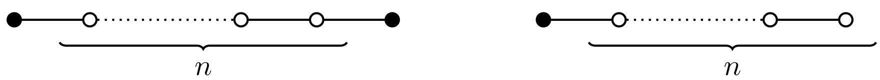
$$\gamma'_g(P_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil .$$

Izrek 3.2 *Za vsak $n \geq 3$ velja*

$$\gamma_g(C_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1, & n \equiv 3 \pmod 4 \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil, & \text{sicer} \end{cases}$$

$$\gamma''_g(C_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ \lceil \frac{n-1}{2} \rceil, & \text{sicer} \end{cases} .$$

Njihov dokaz je precej analitičen, poleg tega iz njega ne dobimo optimalnih strategij obeh igralcev. V nadaljevanju bomo s pomočjo posebnih delno dominiranih poti vse štiri formule dokazali na drugačen način. Naj bo P''_n delno dominirana pot reda $n+2$, ki ima oba lista dominirana, medtem ko definiramo P'_n kot delno dominirano pot reda $n+1$, na kateri je edino dominirano vozlišče eden izmed listov, glej sliko 3.2.



Slika 3.2: Delno dominirani poti P''_n (levo) in P'_n (desno)

Lema 3.3 *Za vsak $n \geq 0$ velja*

$$\gamma_g(P''_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1, & n \equiv 3 \pmod 4 \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil, & \text{sicer} \end{cases} ,$$

$$\gamma_g'(P_n'') \;=\; \begin{cases} \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil, & \text{sicer} \end{cases}.$$

Dodatno, naj bo $n = i + j$, $i, j \geq 0$, *in* $i_r = i \bmod 4$ *ter* $j_r = j \bmod 4$. *Potem velja*

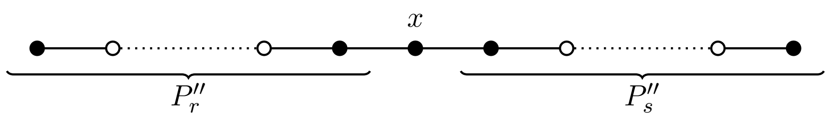
$$\gamma_g(P_i'' \cup P_j'') \;=\; \begin{cases} \gamma_g(P_i'') + \gamma_g(P_j''), & (i_r, j_r) \in \{0,1\} \times \{0,1,2,3\} \,\cup \\ & \qquad \{0,1,2,3\} \times \{0,1\} \\ \gamma_g(P_i'') + \gamma_g(P_j'') + 1, & (i_r, j_r) \in \{2,3\} \times \{2,3\} \end{cases},$$

$$\gamma_g'(P_i'' \cup P_j'') \;=\; \begin{cases} \gamma_g(P_i'') + \gamma_g(P_j''), & (i_r, j_r) \in \{0,1\} \times \{0,1\} \\ \gamma_g(P_i'') + \gamma_g(P_j'') + 1, & (i_r, j_r) \in \{0,1\} \times \{2,3\} \,\cup \\ & \qquad \{2,3\} \times \{0,1\} \,\cup\, \{(2,2)\} \\ \gamma_g(P_i'') + \gamma_g(P_j'') + 2, & (i_r, j_r) \in \{(2,3),(3,2),(3,3)\} \end{cases}.$$

Dokaz: Vse štiri formule bomo hkrati dokazali z indukcijo na število nedominiranih vozlišč n. Za $n \leq 8$ lahko s pregledom možnosti hitro preverimo, da vse formule držijo. Dokažimo sedaj, da formule držijo tudi za $n \geq 9$.

Najprej dokažimo prvi dve formuli. Začnemo z dokazom $\gamma_g(P_n'')$. Po prvi dominatorjevi potezi je residualni graf enak enemu izmed grafov $P_{n-1}'', P_{n-2}'', P_{n-3}''$ ali $P_r'' \cup P_s''$, pri čemer $r, s \geq 1$ in $r + s = n - 3$, glej sliko 3.3. Po principu nadaljevanja lahko potezi, ki nam dasta prva dva grafa, izločimo in tako dobimo, da velja

$$\gamma_g(P_n'') = 1 + \min\{\gamma_g'(P_r'' \cup P_s'') \mid r + s = n - 3,\ r, s \geq 0\}\,.$$



Slika 3.3: Situacija na P_n'' po potezi na x

Obravnavajmo sedaj štiri primere glede na ostanek, ki ga da n pri deljenju s štiri. Za $k \geq 2$ s pomočjo indukcijske predpostavke (uporabimo tako prvi dve kot zadnji dve formuli) dobimo

$$\begin{aligned} \gamma_g(P_{4k}'') \;=\; 1 + \min\Big[& \{\gamma_g'(P_{4\ell}'' \cup P_{4m+1}'') \mid \ell + m + 1 = k,\ \ell, m \geq 0\} \,\cup \\ & \{\gamma_g'(P_{4\ell+2}'' \cup P_{4m+3}'') \mid \ell + m + 2 = k,\ \ell, m \geq 0\} \Big] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1+\min\Big[\{\gamma_g(P''_{4\ell})+\gamma_g(P''_{4m+1}) \mid \ell+m+1=k,\ \ell,m\geq 0\}\cup \\
&\quad \{\gamma_g(P''_{4\ell+2})+\gamma_g(P''_{4m+3})+2 \mid \ell+m+2=k,\ \ell,m\geq 0\}\Big] \\
&= 1+\min\Big[\{2\ell+(2m+1) \mid \ell+m+1=k,\ \ell,m\geq 0\}\cup \\
&\quad \{(2\ell+1)+(2m+1)+2) \mid \ell+m+2=k,\ \ell,m\geq 0\}\Big] \\
&= 1+\min\{2k-1,2k\}=2k,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_g(P''_{4k+1}) &= 1+\min\Big[\{\gamma'_g(P''_{4\ell}\cup P''_{4m+2}) \mid \ell+m+1=k,\ \ell,m\geq 0\}\cup \\
&\quad \{\gamma'_g(P''_{4\ell+1}\cup P''_{4m+1}) \mid \ell+m+1=k,\ \ell,m\geq 0\}\cup \\
&\quad \{\gamma'_g(P''_{4\ell+3}\cup P''_{4m+3}) \mid \ell+m+2=k,\ \ell,m\geq 0\}\Big] \\
&= 1+\min\{2k,2k,2k\}=2k+1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_g(P''_{4k+2}) &= 1+\min\Big[\{\gamma'_g(P''_{4\ell}\cup P''_{4m+3}) \mid \ell+m+1=k,\ \ell,m\geq 0\}\cup \\
&\quad \{\gamma'_g(P''_{4\ell+1}\cup P''_{4m+2}) \mid \ell+m+1=k,\ \ell,m\geq 0\}\Big] \\
&= 1+\min\{2k,2k+1\}=2k+1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_g(P''_{4k+3}) &= 1+\min\Big[\{\gamma'_g(P''_{4\ell}\cup P''_{4m}) \mid \ell+m=k,\ \ell,m\geq 0\}\cup \\
&\quad \{\gamma'_g(P''_{4\ell+1}\cup P''_{4m+3}) \mid \ell+m+1=k,\ \ell,m\geq 0\}\cup \\
&\quad \{\gamma'_g(P''_{4\ell+2}\cup P''_{4m+2}) \mid \ell+m+1=k,\ \ell,m\geq 0\}\Big] \\
&= 1+\min\{2k,2k+1,2k+1\}=2k+1\,.
\end{aligned}
$$

Analogno lahko izračunamo še igralno dominacijsko število, ko zavlačevalka naredi prvo potezo. Zavlačevalka po principu nadaljevanja bodisi igra na dominiran list, bodisi dominira tri nova vozlišče z izbiro nekega vozlišča v sredini poti. Za $k\geq 2$ velja

$$
\begin{aligned}
\gamma'_g(P''_{4k}) &= 1+\max\Big[\{\gamma_g(P''_{4(k-1)+3})\}\cup \\
&\quad \{\gamma_g(P''_{4\ell}\cup P''_{4m+1}) \mid \ell+m+1=k,\ \ell,m\geq 0\}\cup
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \qquad \{\gamma_g(P''_{4\ell+2} \cup P''_{4m+3}) \mid \ell+m+2=k,\ \ell,m \geq 0\}\Big] \\
&= 1+\max\Big[\{\gamma_g(P''_{4(k-1)+3})\} \cup \\
& \qquad \{\gamma_g(P''_{4\ell})+\gamma_g(P''_{4m+1}) \mid \ell+m+1=k,\ \ell,m \geq 0\} \cup \\
& \qquad \{\gamma_g(P''_{4\ell+2})+\gamma_g(P''_{4m+3})+1 \mid \ell+m+2=k,\ \ell,m \geq 0\}\Big] \\
&= 1+\max\Big[\{2k-1\} \cup \\
& \qquad \{2\ell+(2m+1) \mid \ell+m+1=k,\ \ell,m \geq 0\} \cup \\
& \qquad \{(2\ell+1)+(2m+1)+1 \mid \ell+m+2=k,\ \ell,m \geq 0\}\Big] \\
&= 1+\max\{2k-1, 2k-1, 2k-1\} = 2k,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma'_g(P''_{4k+1}) &= 1+\max\Big[\{\gamma_g(P''_{4k})\} \cup \\
& \qquad \{\gamma_g(P''_{4\ell} \cup P''_{4m+2}) \mid \ell+m+1=k,\ \ell,m \geq 0\} \cup \\
& \qquad \{\gamma_g(P''_{4\ell+1} \cup P''_{4m+1}) \mid \ell+m+1=k,\ \ell,m \geq 0\} \cup \\
& \qquad \{\gamma_g(P''_{4\ell+3} \cup P''_{4m+3}) \mid \ell+m+2=k,\ \ell,m \geq 0\}\Big] \\
&= 1+\max\{2k, 2k-1, 2k, 2k-1\} = 2k+1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma'_g(P''_{4k+2}) &= 1+\max\Big[\{\gamma_g(P''_{4k+1})\} \cup \\
& \qquad \{\gamma_g(P''_{4\ell} \cup P''_{4m+3}) \mid \ell+m+1=k,\ \ell,m \geq 0\} \cup \\
& \qquad \{\gamma_g(P''_{4\ell+1} \cup P''_{4m+2}) \mid \ell+m+1=k,\ \ell,m \geq 0\}\Big] \\
&= 1+\max\{2k+1, 2k-1, 2k\} = 2k+2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma'_g(P''_{4k+3}) &= 1+\max\Big[\{\gamma_g(P''_{4k+2})\} \cup \\
& \qquad \{\gamma_g(P''_{4\ell} \cup P''_{4m}) \mid \ell+m=k,\ \ell,m \geq 0\} \cup \\
& \qquad \{\gamma_g(P''_{4\ell+1} \cup P''_{4m+3}) \mid \ell+m+1=k,\ \ell,m \geq 0\} \cup \\
& \qquad \{\gamma_g(P''_{4\ell+2} \cup P''_{4m+2}) \mid \ell+m+1=k,\ \ell,m \geq 0\}\Big] \\
&= 1+\max\{2k+1, 2k, 2k, 2k+1\} = 2k+2\,.
\end{aligned}
$$

Dokažimo sedaj še formuli za igralno dominacijsko število disjunktne unije $P''_i \cup P''_j$. Iz zgoraj dokazanih formul lahko hitro ugotovimo, da je P''_k ENAČAJ graf, če je $k \equiv 0 \pmod 4$ ali $k \equiv 1 \pmod 4$, medtem ko je v ostalih dveh primerih PLUS graf. Iz izreka 2.10 sledi, da formuli veljata, ko je vsaj ena izmed komponent unije ENAČAJ graf. Preostane dokazati še, kateri par realizira unija v primeru, ko sta obe komponenti PLUS grafa, tj. ko imata i in j ostanek 2 ali 3 pri deljenju s 4.

Naj bosta sedaj $i = 4\ell + 2$ in $j = 4m + 2$, kjer sta $\ell, m \geq 1$. Dokazati želimo, da $P''_{4\ell+2} \cup P''_{4m+2}$ realizira par $(2\ell + 2m + 3, 2\ell + 2m + 3)$. Iz izreka 2.11 sledi, da moramo dokazati le spodnjo mejo za γ_g in zgornjo mejo za γ'_g. Pri prvem potrebujemo strategijo zavlačevalke, ki zagotovi, da je na $P''_{4\ell+2} \cup P''_{4m+2}$ odigranih vsaj $2m + 2\ell + 3$ potez. Ker nismo povedali ničesar o relaciji med ℓ in m, lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da dominator svojo potezo naredi v $P''_{4\ell+2}$. Za le-to ima z upoštevanjem principa nadaljevanja le tri različne možnosti. Prva možnost je, da izbere vozlišče na razdalji 2 od enega izmed listov in dobi graf $P''_{4(\ell-1)+3} \cup P''_{4m+2}$, v drugi izbere neko vozlišče na sredini, ki razdeli $P''_{4\ell+2}$ na dve komponenti, in sicer $P''_{4r} \cup P''_{4s+3}$, medtem ko v tretji možnosti ponovno izbere vozlišče na sredini, ki vodi v razbitje na $P''_{4r+1} \cup P''_{4s+2}$, pri čemer velja $r + s = \ell - 1$. Če zavlačevalka nato izbere dominiran list v komponenti z lihim številom nedominiranih vozlišč, iz indukcijske predpostavke in izreka 2.10 dobimo

$$\begin{aligned}
\gamma_g(P''_{4\ell+2} \cup P''_{4m+2}) &= 1 + \min \begin{pmatrix} \gamma'_g(P''_{4(\ell-1)+3} \cup P''_{4m+2}) \\ \gamma'_g(P''_{4r} \cup P''_{4s+3} \cup P''_{4m+2}) \\ \gamma'_g(P''_{4r+1} \cup P''_{4s+2} \cup P''_{4m+2}) \end{pmatrix} \\
&\geq 2 + \min \begin{pmatrix} \gamma_g(P''_{4(\ell-1)+2} \cup P''_{4m+2}) \\ \gamma_g(P''_{4r} \cup P''_{4s+2} \cup P''_{4m+2}) \\ \gamma_g(P''_{4r} \cup P''_{4s+2} \cup P''_{4m+2}) \end{pmatrix} \\
&= 2 + \min \begin{pmatrix} \gamma_g(P''_{4(\ell-1)+2}) + \gamma_g(P''_{4m+2}) + 1 \\ \gamma_g(P''_{4r}) + \gamma_g(P''_{4s+2}) + \gamma_g(P''_{4m+2}) + 1 \end{pmatrix} \\
&= 2 + \min \begin{pmatrix} (2(\ell-1) + 1) + (2m + 1) + 1 \\ 2r + (2s + 1) + (2m + 1) + 1 \end{pmatrix} \\
&= 2 + \min\{2\ell + 2m + 1, 2\ell + 2m + 1\} \\
&= 2\ell + 2m + 3\,.
\end{aligned}$$

Dokaz zgornje meje v igri 2 gre podobno. Najprej zapišemo vse različne zavlačevalkine poteze, kjer upoštevamo princip nadaljevanja, nato dominator izbere vozlišče na razdalji 2 od enega izmed dominiranih listov v komponenti z lihim številom nedominiranih vozlišč, nazadnje pa s pomočjo indukcijske predpostavke in izreka 2.10 dobimo želeni rezultat. Za $r + s = \ell - 1$ dobimo

$$\begin{aligned}
\gamma_g'(P''_{4\ell+2} \cup P''_{4m+2}) &= 1 + \max\begin{pmatrix} \gamma_g(P''_{4\ell+1} \cup P''_{4m+2}) \\ \gamma_g(P''_{4r} \cup P''_{4s+3} \cup P''_{4m+2}) \\ \gamma_g(P''_{4r+1} \cup P''_{4s+2} \cup P''_{4m+2}) \end{pmatrix} \\
&\leq 2 + \max\begin{pmatrix} \gamma_g'(P''_{4(\ell-1)+2} \cup P''_{4m+2}) \\ \gamma_g'(P''_{4r} \cup P''_{4s} \cup P''_{4m+2}) \\ \gamma_g'(P''_{4(r-1)+2} \cup P''_{4s+2} \cup P''_{4m+2}) \end{pmatrix} \\
&= 2 + \max\begin{pmatrix} \gamma_g'(P''_{4(\ell-1)+2}) + \gamma_g(P''_{4m+2}) + 1 \\ \gamma_g'(P''_{4r}) + \gamma_g'(P''_{4s}) + \gamma_g(P''_{4m+2}) + 1 \\ \gamma_g'(P''_{4(r-1)+2}) + \gamma_g(P''_{4s+2}) + 1 + \gamma_g(P''_{4m+2}) + 1 \end{pmatrix} \\
&= 2 + \max\begin{pmatrix} (2(\ell-1)+1) + (2m+1) + 1 \\ 2r + 2s + (2m+1) + 1 \\ (2(r-1)+1) + (2s+1) + 1 + (2m+1) + 1 \end{pmatrix} \\
&= 2 + \max\{2\ell + 2m + 1, 2\ell + 2m, 2\ell + 2m + 1\} \\
&= 2\ell + 2m + 3\,.
\end{aligned}$$

Poiskati moramo še igralno dominacijsko število unij $P''_{4\ell+2} \cup P''_{4m+3}$ in $P''_{4\ell+3} \cup P''_{4m+3}$ za $\ell, m \geq 0$. Dokazati želimo, da obe uniji realizirata par $(2\ell + 2m + 3, 2\ell + 2m + 4)$. Po izreku 2.11 je dovolj dokazati spodnjo mejo v igri 2. Če zavlačevalka v svoji prvi potezi izbere dominiran list v P''_{4m+3}, po zgoraj dokazanem dobimo

$$\gamma_g'(P''_{4\ell+2} \cup P''_{4m+3}) \geq 1 + \gamma_g(P''_{4\ell+2} \cup P''_{4m+2}) = 1 + 2\ell + 2m + 3 = 2\ell + 2m + 4$$

in od tu še

$$\gamma_g'(P''_{4\ell+3} \cup P''_{4m+3}) \geq 1 + \gamma_g(P''_{4\ell+3} \cup P''_{4m+2}) = 1 + 2\ell + 2m + 3 = 2\ell + 2m + 4\,.$$

■

Iz zgornjega dokaza sledi, da je dominatorjeva optimalna prva poteza v igri 1 izbira vozlišča, ki je na razdalji 2 od enega izmed (dominiranih) listov, medtem ko je zavlačevalkina optimalna prva poteza v igri 2 izbira enega izmed (dominiranih) listov. Še več, zavlačevalkina optimalna strategija je izbira dominiranega lista v vsaki izmed njenih potez. Od tu direktno sledi naslednja lema.

Lema 3.4 *Za vsak $n, m \geq 0$ velja*

$$\gamma_g(P'_n \cup P'_m) = \gamma_g(P''_n \cup P'_m) = \gamma_g(P''_n \cup P''_m) \textit{ in}$$
$$\gamma'_g(P'_n \cup P'_m) = \gamma'_g(P''_n \cup P'_m) = \gamma'_g(P''_n \cup P''_m)\,.$$

Sedaj je vse pripravljeno za poti.

Izrek 3.5 *Za vsak $n \geq 0$ velja $\gamma_g(P_n) = \gamma_g(P'_n)$ in $\gamma'_g(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.*

Dokaz: Obravnavamo štiri primere glede na ostanek n pri deljenju s 4. S pregledom možnosti hitro ugotovimo, da izrek drži za $n \leq 4$. Naj bo sedaj $n \geq 5$. Če pri vsakem od primerov najprej zapišemo $\gamma_g(P_n)$ po definiciji z vsemi različnimi potezami (pri tem upoštevamo princip nadaljevanja in ne navedemo dominiranih potez), ki jih dominator lahko stori, in nato zaporedoma uporabimo še lemi 3.4 in 3.3, za $k \geq 1$ dobimo

$$\begin{aligned}
\gamma_g(P_{4k}) &= 1 + \min \Big[\{\gamma'_g(P'_{4\ell} \cup P'_{4m+1}) \mid \ell + m + 1 = k,\ \ell, m \geq 0\} \cup \\
&\qquad \{\gamma'_g(P'_{4\ell+2} \cup P'_{4m+3}) \mid \ell + m + 2 = k,\ \ell, m \geq 0\} \Big] \\
&= 1 + \min \Big[\{\gamma'_g(P''_{4\ell} \cup P''_{4m+1}) \mid \ell + m + 1 = k,\ \ell, m \geq 0\} \cup \\
&\qquad \{\gamma'_g(P''_{4\ell+2} \cup P''_{4m+3}) \mid \ell + m + 2 = k,\ \ell, m \geq 0\} \Big] \\
&= 1 + \min \Big[\{2\ell + 2m + 1 \mid \ell + m + 1 = k,\ \ell, m \geq 0\} \cup \\
&\qquad \{2(\ell + m + 2) \mid \ell + m + 2 = k,\ \ell, m \geq 0\} \Big] \\
&= 1 + \min\{2k - 1, 2k\} = 2k,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_g(P_{4k+1}) &= 1 + \min \Big[\{\gamma'_g(P'_{4\ell} \cup P'_{4m+2}) \mid \ell + m + 1 = k,\ \ell, m \geq 0\} \cup \\
&\qquad \{\gamma'_g(P'_{4\ell+1} \cup P'_{4m+1}) \mid \ell + m + 1 = k,\ \ell, m \geq 0\} \cup \\
&\qquad \{\gamma'_g(P'_{4\ell+3} \cup P'_{4m+3}) \mid \ell + m + 2 = k,\ \ell, m \geq 0\} \Big] \\
&= 1 + \min\{2k, 2k, 2k\} = 2k + 1,
\end{aligned}$$

$$\gamma_g(P_{4k+2}) = 1 + \min \Big[\{\gamma'_g(P'_{4\ell} \cup P'_{4m+3}) \mid \ell + m + 1 = k,\ \ell, m \geq 0\} \cup$$

$$
\begin{aligned}
& \left.\{\gamma_g'(P_{4\ell+1}' \cup P_{4m+2}') \mid \ell+m+1=k,\ \ell,m\geq 0\}\right] \\
= \ & 1+\min\{2k,2k+1\}=2k+1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_g(P_{4k+3}) \ = \ & 1+\min\Big[\{\gamma_g'(P_{4\ell}' \cup P_{4m}') \mid \ell+m=k,\ \ell,m\geq 0\} \cup \\
& \{\gamma_g'(P_{4\ell+1}' \cup P_{4m+3}') \mid \ell+m+1=k,\ \ell,m\geq 0\} \cup \\
& \{\gamma_g'(P_{4\ell+2}' \cup P_{4m+2}') \mid \ell+m+1=k,\ \ell,m\geq 0\}\Big] \\
= \ & 1+\min\{2k,2k+1,2k+1\}=2k+1\,.
\end{aligned}
$$

Podobno dobimo še $\gamma_g'(P_n)$, vendar moramo biti tu previdnejši, saj zavlačevalka v prvi potezi ne more dominirati zgolj enega vozlišča, kot je bil to primer na P_n'' in P_n', kjer je enostavno igrala na dominiran list. Podobno kot pri γ_g z uporabo lem 3.4 in 3.3 za $k\geq 1$ dobimo

$$
\begin{aligned}
\gamma_g'(P_{4k}) \ = \ & 1+\max\Big[\{\gamma_g(P_{4(k-1)+2}')\} \cup \\
& \{\gamma_g(P_{4\ell}' \cup P_{4m+1}') \mid \ell+m+1=k,\ \ell,m\geq 0\} \cup \\
& \{\gamma_g(P_{4\ell+2}' \cup P_{4m+3}') \mid \ell+m+2=k,\ \ell,m\geq 0\}\Big] \\
= \ & 1+\max\Big[\{2k-1\} \cup \\
& \{2\ell+2m+1 \mid \ell+m+1=k,\ \ell,m\geq 0\} \cup \\
& \{2(\ell+m+1)+1 \mid \ell+m+2=k,\ \ell,m\geq 0\}\Big] \\
= \ & 1+\max\{2k-1,2k-1,2k-1\}=2k,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_g'(P_{4k+1}) \ = \ & 1+\max\Big[\{\gamma_g(P_{4(k-1)+3}')\} \cup \\
& \{\gamma_g(P_{4\ell}' \cup P_{4m+2}') \mid \ell+m+1=k,\ \ell,m\geq 0\} \cup \\
& \{\gamma_g(P_{4\ell+1}' \cup P_{4m+1}') \mid \ell+m+1=k,\ \ell,m\geq 0\} \cup \\
& \{\gamma_g(P_{4\ell+3}' \cup P_{4m+3}') \mid \ell+m+2=k,\ \ell,m\geq 0\}\Big] \\
= \ & 1+\max\{2k-1,2k-1,2k,2k-1\}=2k+1,
\end{aligned}
$$

$$
\gamma_g'(P_{4k+2}) \ = \ 1+\max\Big[\{\gamma_g(P_{4k}')\} \cup
$$

$$
\begin{aligned}
& \{\gamma_g(P'_{4\ell} \cup P'_{4m+3}) \mid \ell + m + 1 = k,\ \ell, m \geq 0\} \cup \\
& \left.\{\gamma_g(P'_{4\ell+1} \cup P'_{4m+2}) \mid \ell + m + 1 = k,\ \ell, m \geq 0\}\right] \\
= \;& 1 + \max\{2k, 2k-1, 2k\} = 2k+1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma'_g(P_{4k+3}) \;=\;& 1 + \max\Big[\{\gamma_g(P'_{4k+1})\} \cup \\
& \{\gamma_g(P'_{4\ell} \cup P'_{4m}) \mid \ell + m = k,\ \ell, m \geq 0\} \cup \\
& \{\gamma_g(P'_{4\ell+1} \cup P'_{4m+3}) \mid \ell + m + 1 = k,\ \ell, m \geq 0\} \cup \\
& \{\gamma_g(P'_{4\ell+2} \cup P'_{4m+2}) \mid \ell + m + 1 = k,\ \ell, m \geq 0\}\Big] \\
=\;& 1 + \max\{2k+1, 2k, 2k, 2k+1\} = 2k+2\,.
\end{aligned}
$$

S tem je dokaz formul za poti zaključen. ■

Iz dokaza lahko ugotovimo, da je zavlačevalkina optimalna prva poteza na P_n izbira enega izmed listov, razen v primeru, ko je $n \equiv 1 \pmod 4$. V tem primeru zavlačevalka v prvi potezi izbere vozlišče na sredini, ki razdeli graf na dve poti z enim dominiranim listom $P'_r \cup P'_s$, pri čemer je $r \equiv 1 \pmod 4$ in $s \equiv 1 \pmod 4$.

Ker je cikel simetričen graf, je residualni graf po prvi potezi katerega koli igralca enak delno dominirani poti, na kateri sta lista edini dominirani vozlišči.

Izrek 3.6 *Za vsak $n \geq 3$ velja*

$$
\begin{aligned}
\gamma_g(C_n) &= \begin{cases} \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1, & n \equiv 3 \pmod 4 \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil, & \text{sicer} \end{cases}, \\
\gamma'_g(C_n) &= \begin{cases} \lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ \lceil \frac{n-1}{2} \rceil, & \text{sicer} \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Dokaz: Po lemi 3.3 sledi

$$
\begin{aligned}
\gamma_g(C_n) &= 1 + \gamma'_g(P''_{n-3}) \\
&= 1 + \begin{cases} \lceil \frac{n-3}{2} \rceil + 1, & n-3 \equiv 2 \pmod 4 \\ \lceil \frac{n-3}{2} \rceil, & \text{sicer} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ \lceil \frac{n-1}{2} \rceil, & \text{sicer} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1, & n \equiv 3 \pmod 4 \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil, & \text{sicer} \end{cases},
\end{aligned}
$$

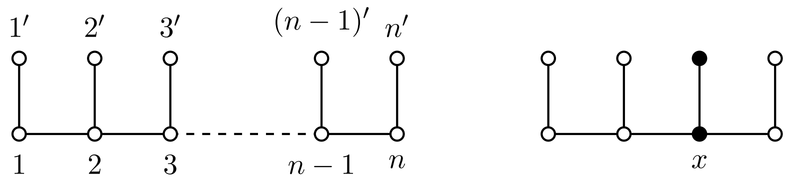
pri čemer zadnjo enakost dobimo tako, da primerjamo vrednosti funkcij za $n = 4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$, kjer je $k \geq 0$. Podobno dobimo tudi igralno dominacijsko število ciklov v igri 2. Za vsak $n \geq 3$ velja

$$\begin{aligned}
\gamma_g'(C_n) &= 1 + \gamma_g(P''_{n-3}) \\
&= 1 + \begin{cases} \lceil \frac{n-3}{2} \rceil - 1, & n-3 \equiv 3 \pmod 4 \\ \lceil \frac{n-3}{2} \rceil, & \text{sicer} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ \lceil \frac{n-1}{2} \rceil, & \text{sicer} \end{cases} .
\end{aligned}$$

■

3.2 Glavniki

Ugotovili smo že, da izračun igralnega dominacijskega števila poti še zdaleč ni trivialen. Naj bo $\widetilde{P}_n$ graf, t.i. *glavnik*, ki ga dobimo tako, da na vsako vozlišče poti reda n pripnemo en list, glej sliko 3.4. Zdi se, da je izračun igralnega dominacijskega števila glavnika enostavnejši kot pri poteh. Pravzaprav so Brešar et al. v [9] celo dejali, da je preprosto videti, da velja $\gamma_g(\widetilde{P}_n) = n = \gamma_g'(\widetilde{P}_n)$. Isti avtorji so avtorja potem opozorili, da to ne drži, saj $\widetilde{P}_3$ realizira par $(3,4)$. Še več, hitro lahko preverimo, da $\widetilde{P}_n$ realizira par (n,n) za $n = 1, 2$, par $(n, n+1)$ za $n = 3, 4, 5, 6, 7$ in par $(n+1, n+1)$ za $n = 8, 9, 10, 11, 12$.



Slika 3.4: Grafa $\widetilde{P}_n$ (levo) in $\widetilde{P}_4^3$ (desno)

Preden poiščemo igralno dominacijsko število glavnika, definirajmo še nekaj novih pojmov s pomočjo oznak s slike 3.4. Induciranemu podgrafu glavnika na vozliščih j in j' za $1 \leq j \leq n$ bomo rekli *zob* in ga označili s $\widetilde{T}_j$. S $\widetilde{P}_n^j$ bomo označili delno dominiran graf $\widetilde{P}_n$, v katerem sta edini dominirani vozlišči j in j', tj. $\widetilde{P}_k^j = \widetilde{P}_k | \{j, j'\}$ za $1 \leq j \leq n$.

Poimenujmo sedaj še dve posebni potezi, ki sta lahko odigrani na glavniku. Naj bo P delno dominiran glavnik, ki nastopi tekom igre. Potem bomo rekli, da je legalna poteza na vozlišče j v P za $1 \leq j \leq n$ *odlična* (ang. great move), če je bilo vozlišče j'

odigrano v eni izmed predhodnih potez. Izbira vozlišča x na sliki 3.4 je primer odlične poteze. Poteza na j' v P za $2 \leq j \leq n-1$ je *dobra* (ang. good move), če so vsa vozlišča v $N[j]$ še nedominirana in nobeno izmed vozlišč $(j-4)', \ldots, (j-2)', (j+2)', \ldots, (j+4)'$ ni bilo izbrano v eni izmed predhodnih potez. Izbira vozlišča $2'$ na sliki 3.4 je primer dobre poteze.

Naj bosta optimalni strategiji za oba igralca fiksni in P delno dominiran glavnik. Potem z $gm(P)$ označimo skupno število odličnih potez v igri 1, ko oba igralca igrata po svojih fiksnih optimalnih strategijah. Analogno definiramo še $gm'(P)$ za igro 2. V posebnem bomo namesto $gm(\widetilde{P}_n)$ in $gm'(\widetilde{P}_n)$ pisali kar $gm(n)$ in $gm'(n)$. Dodatno definiramo še $gm(n) = 0$ za vse $n \leq 0$.

Očitno je $\gamma(\widetilde{P}_n) = n$, saj mora dominacijska množica vsebovati vsaj eno vozlišče vsakega zoba. Tudi v igri na $\widetilde{P}_n$ morata igralca torej izbrati vsaj eno vozlišče na vsakem zobu. V primeru, da je storjena odlična poteza, pa sta na tistem zobu odigrani dve potezi. Od tu sledi, da je $\gamma_g(\widetilde{P}_n) = n + gm(n)$ in podobno $\gamma_g(\widetilde{P}_n) = n + gm'(n)$. Zavlačevalka si torej na glavniku želi odigrati čim več odličnih potez, medtem ko hoče dominator njihovo število minimizirati.

Lema 3.7 *Za vsak $n \geq 1$ velja, da je na grafu $\widetilde{P}_n$ število dobrih potez enako številu odličnih potez.*

Dokaz: Naj bosta optimalni strategiji za oba igralca fiksni. Zaradi principa nadaljevanja lahko predpostavimo, da v nobeni izmed fiksiranih strategij dominator nikoli ne izbere lista. Najprej dokažimo, da vsaka dobra poteza vodi do odlične poteze. Naj bo na j' odigrana dobra poteza. Dokazali bomo, da je odlična poteza odigrana na j. Takoj ko dominator dominira eno izmed $j-1$ ali $j+1$, ne da bi igral na j, zavlačevalka lahko igra na j in s tem naredi odlično potezo. Ker so po definiciji med dvema dobrima potezama na i' in j' štirje nedominirani zobi, dominator v eni potezi ne more dominirati sosedov od i in j. Naj bo sedaj število dobrih potez strogo manjše kot število odličnih potez. Označimo vozlišča, na katerih so odigrane dobre poteze, z $i'_1, \ldots, i'_r$, $r \geq 0$. Potem obstaja vozlišče i, na katerem je odigrana odlična poteza in za katerega velja $i \neq i_k$ za vsak $k = 1, \ldots, r$. Po definiciji odlične poteze je bilo vozlišče i' odigrano pred potezo na i, vendar pa to ni bila dobra poteza. V prvem primeru je bilo pred potezo na i' dominirano vsaj eno izmed vozlišč $i-1$ in $i+1$. Potem ko je zavlačevalka igrala na i', bi dominator lahko z dominacijo drugega izmed vozlišč $i-1$ in $i+1$ onemogočil odlično potezo na i. Torej odlična poteza na i v tem primeru vodi do protislovja z dominatorjevo optimalno strategijo. V drugem primeru je bila pred potezo na i' odigrana dobra poteza na eno izmed vozlišč $(i-4)', \ldots, (i-2)', (i+2)', \ldots, (i+4)'$. Brez škode za splošnost naj bo to vozlišče $i'_k \in \{(i-4)', \ldots, (i-2)'\}$ za $1 \leq k \leq r$. Če bi dominator igral na vozlišče $i - \lfloor \frac{i-i_k}{2} \rfloor$ in v naslednji potezi dominiral še eno izmed vozlišč $i_k - 1, i+1$, ki še ni dominirano, bi s tem dosegel, da je na vozliščih i_k in i odigrana le ena odlična poteza. Torej sta odlični potezi na i_k in i v protislovju z dominatorjevo optimalno strategijo. Ker nismo nikjer povedali, za katero igro gre, smo dokazali, da je $gm(n)$ število dobrih potez v igri 1 na $\widetilde{P}_n$ in $gm'(n)$ število dobrih potez v igri 2 na $\widetilde{P}_n$. ∎

Sedaj lahko oznako gm uporabljamo tudi za število dobrih potez. Preden izračunamo število odličnih potez na glavniku, si poglejmo, koliko je dobrih potez na dveh posebnih delno dominiranih glavnikih. Prvi tak graf je glavnik, na katerem je edino dominirano vozlišče eno izmed vozlišč stopnje 2. Na sliki 3.4 sta taki vozlišči označeni z 1 in n.

Lema 3.8 *Naj bo $n \geq 1$ in v vozlišče $\widetilde{P}_n$, ki je stopnje 2. Potem je $gm(\widetilde{P}_n|v) = gm(n-1)$ in $gm'(\widetilde{P}_n|v) = gm'(n-1)$.*

Dokaz: Najprej fiksirajmo optimalni strategiji obeh igralcev v vsaki od iger. Brez škode za splošnost naj bo v vozlišče 1 s slike 3.4. Potem iščemo dobre poteze le na vozliščih j' za $3 \leq j \leq n-1$, saj izbira $2'$ v grafu $\widetilde{P}_n|1$ ni dobra poteza, ker ima vozlišče 2 dominiranega soseda. Ker pa dominirano vozlišče 1 ne ovira nobene druge dobre poteze, sledi, da je $gm(\widetilde{P}_n|v) = gm(n-1)$ in $gm'(\widetilde{P}_n|v) = gm'(n-1)$. ∎

Drugi delno dominiran graf, ki si ga bomo pogledali, je graf $\widetilde{P}_n^j$.

Lema 3.9 *Za vsak $n \geq 1$ in $1 \leq j \leq \min\{6, \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$ velja $gm(\widetilde{P}_n^j) = gm(n-j-3)$ in $gm'(\widetilde{P}_n^j) = gm'(n-j-3)$.*

Dokaz: Najprej fiksirajmo optimalni strategiji obeh igralcev v vsaki od iger. Po definiciji nobeden izmed igralcev ne more odigrati dobre poteze na vozlišče i', kjer je $i \leq j+4$, medtem ko dominirani vozlišči j in j' ne preprečujeta nobene druge dobre poteze. Sledi, da je $gm(\widetilde{P}_n^j) = gm(n-j-3)$ in $gm'(\widetilde{P}_n^j) = gm'(n-j-3)$. ∎

S pomočjo zadnje leme lahko sedaj izračunamo število odličnih potez na glavniku.

Lema 3.10 *Za vsak $n \geq 1$ velja $gm(n) = \left\lceil \frac{n-7}{10} \right\rceil$ in $gm'(n) = \left\lceil \frac{n-2}{10} \right\rceil$.*

Dokaz: Za dokazovanje uporabimo indukcijo na n. Bazo indukcije lahko hitro preverimo za $n \leq 12$. Naj bo sedaj $n \geq 13$. Dokažimo najprej, da velja $gm(n) \leq \left\lceil \frac{n-7}{10} \right\rceil$. Če dominator v prvi potezi izbere vozlišče 4, glej sliko 3.4, potem izbira i' ni dobra poteza za noben $i \leq 5$, od koder po indukcijski predpostavki sledi $gm(n) \leq gm'(n-5) = \left\lceil \frac{n-7}{10} \right\rceil$. Za dokaz spodnje meje potrebujemo zavlačevalkino strategijo. Zaradi principa nadaljevanja lahko predpostavimo, da dominator nikoli ne igra na list. Naj sedaj dominator v svoji prvi potezi izbere vozlišče j, kjer je $1 \leq j \leq n$. Če je $j = 1$ ali $j = k$, po lemi 3.8 in indukcijski predpostavki dobimo, da velja $gm(n) \geq gm'(n-2) = \left\lceil \frac{n-4}{10} \right\rceil \geq \frac{n-7}{10}$. Sicer pa sta v residualnem grafu dve komponenti, $\widetilde{P}_i|1 \cup \widetilde{P}_j|1$ in zavlačevalka se lahko odloči, v kateri igra svojo prvo potezo. Sledi, da velja $gm(n) \geq \max\{gm(i) + gm(j)', gm'(i) + gm(j) \mid i + j = n - 3,\ i, j \geq 0\}$. Z uporabo indukcijske predpostavke lahko preverimo, v kateri komponenti igra. Naj bodo $n = 10n_k + n_r$, $i = 10i_k + i_r$ in $j = 10j_k + j_r$, kjer $n_k, i_k, j_k \geq 0$ in $0 \leq n_r, i_r, j_r \leq 9$. Če je $j_r \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$, zavlačevalka naredi dobro potezo v $\widetilde{P}_j|1$, saj velja

$$
\begin{aligned}
\left\lceil \frac{i-7}{10} \right\rceil + \left\lceil \frac{j-2}{10} \right\rceil &= \left\lceil \frac{n-j-10}{10} \right\rceil + \left\lceil \frac{j-2}{10} \right\rceil \\
&= n_k - j_k - 1 + \left\lceil \frac{n_r - j_r}{10} \right\rceil + j_k + \left\lceil \frac{j_r - 2}{10} \right\rceil \\
&\overset{j_r \geq 3}{=} n_k + \left\lceil \frac{n_r - j_r}{10} \right\rceil \\
&\overset{j_r \leq 7}{\geq} n_k + \left\lceil \frac{n_r - 7}{10} \right\rceil = \left\lceil \frac{n-7}{10} \right\rceil .
\end{aligned}
$$

V primeru, ko je $j_r \in \{0, 1, 2, 8, 9\}$, pa igra v $\widetilde{P}_i|1$. Če je $j_r \leq 2$, dobimo

$$
\begin{aligned}
\left\lceil \frac{i-2}{10} \right\rceil + \left\lceil \frac{j-7}{10} \right\rceil &= \left\lceil \frac{n-j-5}{10} \right\rceil + \left\lceil \frac{j-7}{10} \right\rceil \\
&= n_k - j_k + \left\lceil \frac{n_r - j_r - 5}{10} \right\rceil + j_k + \left\lceil \frac{j_r - 7}{10} \right\rceil \\
&\geq n_k + \left\lceil \frac{n_r - 7}{10} \right\rceil = \left\lceil \frac{n-7}{10} \right\rceil .
\end{aligned}
$$

Če je $j_r \geq 8$, pa sledi še

$$
\begin{aligned}
\left\lceil \frac{i-2}{10} \right\rceil + \left\lceil \frac{j-7}{10} \right\rceil &= \left\lceil \frac{n-j-5}{10} \right\rceil + \left\lceil \frac{j-7}{10} \right\rceil \\
&= n_k - j_k + \left\lceil \frac{n_r - j_r - 5}{10} \right\rceil + j_k + \left\lceil \frac{j_r - 7}{10} \right\rceil \\
&\geq n_k + \left\lceil \frac{n_r - 14}{10} \right\rceil + 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= n_k + \left\lceil \frac{n_r - 4}{10} \right\rceil \\
&\geq n_k + \left\lceil \frac{n_r - 7}{10} \right\rceil = \left\lceil \frac{n-7}{10} \right\rceil .
\end{aligned}
$$

Sedaj lahko zaključimo, da velja $gm(n) = \left\lceil \frac{n-7}{10} \right\rceil$.

Dokažimo še formulo za $gm'(n)$. Najprej dokažemo spodnjo mejo. Zavlačevalka v prvi potezi igra na $2'$. Ker je to dobra poteza, po lemi 3.9 in indukcijski predpostavki sledi, da velja $gm'(n) \geq 1 + gm(n-5) = 1 + \left\lceil \frac{n-12}{10} \right\rceil = \left\lceil \frac{n-2}{10} \right\rceil$. Dokazati moramo še zgornjo mejo. Zaradi principa nadaljevanja in simetrije grafa lahko predpostavimo, da zavlačevalka v prvi potezi izbere enega izmed vozlišč $1', \ldots, \lceil \frac{n}{2} \rceil'$. Obravnavamo štiri primere.

1. Naj bo $s'_1 = 1'$. Če dominator nato igra na 3, po indukcijski predpostavki in lemi 3.8 sledi, da je $gm'(n) \leq gm'(n-4) = \left\lceil \frac{n-6}{10} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{n-2}{10} \right\rceil$.

2. Naj bo $2 \leq j \leq \min\{6, \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$ in $s'_1 = j'$. Potem je $d'_1 = \min\{j+7, n\}$. Po definiciji dobre poteze sledi, da dobra poteza ni mogoča na nobenem vozlišču i', kjer je $i \leq \min\{j+7, n\}$. Dobimo, da velja $gm'(n) \leq 1 + \max\{gm'(n-i-8) \mid 2 \leq i \leq 6\} \leq 1 + gm'(n-10) = 1 + \left\lceil \frac{n-12}{10} \right\rceil = \left\lceil \frac{n-2}{10} \right\rceil$, saj je zaporedje $\left(gm'(n)\right)_{n \geq 0}$ monotono naraščajoče.

3. Naj bo $7 \leq j \leq \min\{11, \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$ in $s'_1 = j'$. Potem je $d'_1 = 4$. Podobno kot v drugem primeru dobre poteze ni mogoče odigrati na i', kjer je $i \leq j+3$, od koder sledi, da je $gm'(n) \leq 1 + gm'(n-10) = \left\lceil \frac{n-2}{10} \right\rceil$.

4. Naj bo $12 \leq j \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ in $s'_1 = j'$. Potem je $d'_1 = j - 7$. Sedaj je na potezi zavlačevalka, ki lahko izbere v kateri komponenti residualnega grafa bo igrala. Sledi, da velja $gm'(n) \leq 1 + \max\{gm(i) + gm'(j) \mid i + j + 12 = n,\ i, j \geq 3\}$. Z enostavnim računom lahko preverimo, da je $gm(i) + gm'(j) \leq \left\lceil \frac{n-12}{10} \right\rceil$ za vsaka $i, j \geq 3$ in $i + j + 12 = n$, od koder tudi v tem primeru dobimo, da je $gm'(n) \leq \left\lceil \frac{n-2}{10} \right\rceil$.

■

S pomočjo zadnje leme lahko sedaj napišemo formulo za izračun igralnega dominacijskega števila glavnika.

Izrek 3.11 *Za vsak $n \geq 1$ velja $\gamma_g(\widetilde{P}_n) = n + \left\lceil \frac{n-7}{10} \right\rceil$ in $\gamma'_g(\widetilde{P}_n) = n + \left\lceil \frac{n-2}{10} \right\rceil$.*

Poglavje 4

Realizacije igralnega dominacijskega števila

V tem poglavju bomo iskali neskončne družine grafov, ki realizirajo vse možne pare. S tem problemom so se ukvarjali v [9, 10, 30, 31, 39]. Naslednja lema nam pove, kako lahko skonstruiramo neskončno družino, v kateri vsi grafi realizirajo par enake oblike.

Lema 4.1 *Za vsak graf G velja $\gamma_g(G \cup C_4) = \gamma_g(G) + 2$ in $\gamma'_g(G \cup C_4) = \gamma'_g(G) + 2$.*

Dokaz: Strategija obeh igralcev na grafu $G \cup C_4$ je naslednja. Vsak igralec na vsako nasprotnikovo potezo v komponenti, izomorfni bodisi G, bodisi C_4 odgovori optimalno s potezo v isti komponenti, če je to mogoče. Sicer pa optimalno igra v drugi komponenti. S tem si oba igralca zagotovita, da bosta v komponenti, izomorfni C_4, odigrani natanko dve potezi, v komponenti, izomorfni G, pa $\gamma_g(G)$ potez v igri 1 oziroma $\gamma'_g(G)$ potez v igri 2. ∎

S pomočjo te leme lahko iz P_3, K_2 in C_6 skonstruiramo neskončne družine PLUS, ENAČAJ in MINUS grafov, ki realizirajo vse pare naravnih števil, kjer je prva komponenta liha. Za sodi primer potrebujemo grafe, ki realizirajo pare $(2, 3)$, $(2, 2)$ in $(4, 3)$, saj so Brešar et al. v [9] pokazali, da para $(2, 1)$ ni mogoče realizirati. Če z Y označimo 3-zvezdo z dodanim vozliščem na enem izmed listov, potem lahko iz Y, P_4 ter $P_2 \square P_4$ skonstruiramo neskončne družine PLUS, ENAČAJ in MINUS grafov, ki realizirajo vse pare naravnih števil, kjer je prva komponenta soda, razen zgoraj omenjenega para $(2, 1)$. Od tu sledi, da je množica realizabilnih parov $\mathcal{R}$ enaka množici $\{(k, \ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \ |k - \ell| \leq 1\} \setminus \{(2, 1)\}$.

Naprej nas zanima, če lahko najdemo neskončne povezane družine, ki realizirajo vse pare iz $\mathcal{R}$. Še več, zanima nas, ali obstajajo celo visoko povezane družine.

Vprašanje 2 *Ali lahko za vsak $n \geq 1$ in vsak $p \in \mathcal{R}$ najdemo n-povezan graf, ki realizira p?*

4.1 Leksikografski produkt s polnim grafom

Vozlišče u' je dvojček vozlišča u, če imata u in u' enaki zaprti soseščini, tj. $N[u'] = N[u]$. Z $G\{u\}$ označimo graf, ki ga dobimo, če grafu G dodamo vozlišče tako, da je dvojček vozlišča u. Ker je vozlišče u v grafu $G\{u\}|S$ nasičeno natanko takrat, ko je nasičen njegov dvojček, velja naslednje.

Lema 4.2 *Za vsak graf G in vozlišče u velja $\gamma_g(G\{u\}) = \gamma_g(G)$ in $\gamma_g'(G\{u\}) = \gamma_g'(G)$.*

Če vsakemu vozlišču grafa G iterativno dodamo n dvojčkov, dobimo ravno leksikografski produkt grafa G s polnim grafom K_{n+1}. S pomočjo leme 4.2 dobimo igralno dominacijsko število leksikografskega produkta s polnim grafom.

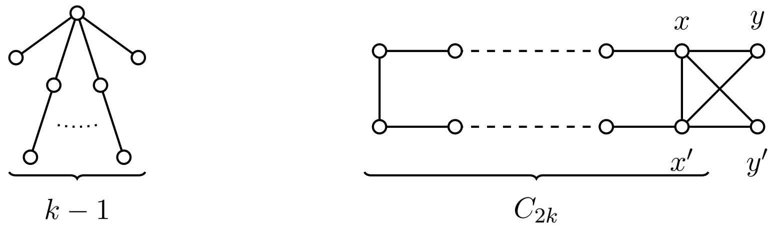
Posledica 4.3 *Za vsak graf G in $n \geq 1$ velja $\gamma_g(G \circ K_n) = \gamma_g(G)$ in $\gamma_g'(G \circ K_n) = \gamma_g'(G)$.*

Iz [24] vemo, da za grafa G in H velja $\kappa(G \circ H) = \kappa(G) \cdot |V(H)|$, če G ni poln. Od tu dobimo naslednjo konstrukcijo. Naj bo G 1-povezan graf, ki realizira par $p \in \mathcal{R}$. Po zgornji posledici sledi, da tudi n-povezan graf $G \circ K_n$ realizira par p. S tem smo vprašanje 2 zožili samo na problem iskanja 1-povezanih družin grafov. Grafu bomo rekli *pragraf*, če ni dobljen iz leksikografskega produkta s polnim grafom na vsaj dveh vozliščih.

V naslednjih podpoglavjih bomo naredili pregled že do sedaj znanih, PLUS MINUS in ENAČAJ grafov ter za vsak tip para dodali še bodisi 1-povezano bodisi 2-povezano družino (pra)grafov.

4.2 PLUS grafi

Brešar et al. so v [10] predstavili tri družine dreves, ki realizirajo pare oblike $(3r, 3r+1)$, $(3r+1, 3r+2)$ in $(3r+2, 3r+3)$, medtem ko je B. Kinnersley [28] našel precej bolj enostavno družino, in sicer drevesa T_k na $2k+1$ vozliščih, ki jih dobimo tako, da enemu



Slika 4.1: Dva PLUS pragrafa: 1-povezan T_k (levo) in 2-povezan G_k (desno)

vozlišču dodamo dva lista ter $k-1$ poti dolžine 2, glej sliko 4.1. V posebnem je T_1 izomorfen P_3.

Naj bo G_k graf, ki ga dobimo tako, da zlepimo poljubno povezavo cikla dolžine $2k$ in povezavo med vozliščema stopnje 3 grafa K_4 brez ene povezave, glej sliko 4.1. V posebnem je G_1 izomorfen polnemu grafu K_4 brez ene povezave.

Izrek 4.4 *Za vsak $k \geq 1$ graf G_k realizira $(k, k+1)$.*

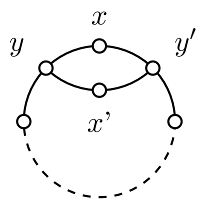
Dokaz: Najprej dokažimo, da je $\gamma_g(G_k) \leq k$. Potrebujemo le strategijo za dominatorja. Če je $d_1 = x$ (glej sliko 4.1), potem je residualni graf enak residualnemu grafu, dobljenemu iz C_{2k} po prvi potezi. Iz izreka 3.2 sledi, da je $\gamma_g(G_k) \leq \gamma_g(C_{2k}) = k$.

Naprej dokažemo, da je $\gamma_g'(G_k) \geq k+1$. Naj bo $s_1' = y$. Residualni graf grafa $G_k|N[s_1']$ je enak ciklu dolžine $2k+1$, pri čemer sta x in x' dominirana. Med njima obstajata dve poti s samimi (notranjimi) nedominiranimi vozlišči. Na prvi leži $2k-2$ nedominiranih vozlišč, medtem ko je na drugi nedominirano vozlišče zgolj y'. Igra se od sedaj naprej igra na delno dominiranem ciklu. Ker po prvi potezi dominatorja obstaja dominiran niz dolžine vsaj tri, lahko zavlačevalka z vsako svojo potezo dominira natanko eno novo vozlišče tako, da igra vozlišče na enem izmed koncev dominiranega niza. Nikoli ne dominira y' (igra na drugo stran dominiranega niza), razen morda v zadnji potezi, ko je v to prisiljena. Ločimo dva primera glede na parnost k. Naj bo $k = 2\ell$. Potem imamo na prvi poti $4\ell - 2 = 4(\ell-1)+2$ zaporednih nedominiranih vozlišč ter eno, y', na drugi. Če dominator v neki potezi dominira y', je v tej potezi dominiral največ dve novi vozlišči (y' in še eno). Ker je bilo skupaj $4\ell-1$ nedominiranih vozlišč in je Zavlačevlka vedno dominirala natanko eno, je bilo potrebnih vsaj $2l$ potez do konca igre. Zavlačevalka je v ℓ potezah dominirala ℓ vozlišč, medtem ko je dominator dominiral največ dve vozlišči v eni potezi in največ $3\ell-3$ vozlišč v preostalih $\ell-1$ potezah. S tem je dosežena želena meja. Če pa dominator ne dominira y', sta igralca v $2(\ell-1)$ potezah dominirala največ $4(\ell-1)$ vozlišč (Zavlačevalka v vsaki potezi eno, dominator pa tri). Ostanejo še tri nedominirana vozlišča, med katerimi je tudi y'. Ker dominator v naslednji potezi ne more dominirati vseh treh, sledi, da je tudi v tem primeru potrebnih vsaj $2\ell + 1$ potez za dokončanje igre. Podobno lahko analiziramo tudi primer, ko je $k = 2\ell + 1$, ter dobimo, da je $\gamma_g'(G_k) \geq k + 1$.

Po izreku 1.2 potem sledi, da G_k realizira $(k, k + 1)$. ■

4.3 ENAČAJ grafi

Iz izreka 3.1 direktno sledi, da pot P_{2k} realizira par (k, k) za vsak $k \geq 1$. Naj bo C'_{2k}, $k \geq 2$, graf, ki ga dobimo tako, da ciklu dolžine $2k$ dodamo enkrat subdividirano povezavo med vozliščema, ki imata skupnega soseda, glej sliko 4.2. V posebnem je C'_4 izomorfen polnemu dvodelnemu grafu $K_{2,3}$.



Slika 4.2: 2-povezan pragraf C'_{2k}

Izrek 4.5 *Za vsak $k \geq 2$ graf C'_{2k} realizira (k, k).*

Dokaz: Skozi celoten dokaz bomo često uporabljali oznake s slike 4.2. Najprej bomo dokazali, da je $\gamma_g(C'_{2k}) = k$. Začnemo z $\gamma_g(C'_{2k}) \leq k$. Naj bo $d_1 = y$. Primerjajmo sedaj residualni graf, dobljen iz $C'_{2k}|N[y]$, ter residualni graf dobljen iz C_{2k} po prvi potezi. V prvem nikoli nista igrani obe (dominirani) vozlišči x in x', saj obe vozlišči postaneta nasičeni v isti potezi. Od tu sledi, da je izbira y' na C'_{2k} ekvivalentna izbiri katerega koli vozlišča na C_{2k}. Po izreku 3.2 torej dobimo, da je $\gamma_g(C'_{2k}) \leq \gamma_g(C_{2k}) = k$.

Naprej bomo pokazali, da velja $\gamma_g(C'_{2k}) \geq k$, za kar podamo zavlačevalkino strategijo. Zavlačevalka lahko vedno izbere tako vozlišče, ki dominira natanko eno novo vozlišče. To stori tako, da izbere enega izmed koncev dominiranega niza, ki je različen od y in y'. Edini primer, ko to ni mogoče, je, ko obstaja le en dominiran niz z y in y' na obeh koncih. V tem primeru izbere bodisi x bodisi x' in s tem ponovno dominira samo eno novo vozlišče. Če je $k = 2\ell$, potem zavlačevalka dominira ℓ vozlišč v ℓ potezah, medtem ko dominator za dominacijo preostalih $3\ell + 1$ potrebuje vsaj ℓ potez. Sledi, da igralca potrebujeta skupno vsaj 2ℓ potez za dokončanje igre. Analogen rezultat dobimo, ko je k lih. Sledi, da je $\gamma_g(C'_{2k}) \geq k$, s čimer smo pokazali, da velja $\gamma_g(C'_{2k}) = k$.

Dokazati moramo še, da je $\gamma'_g(C'_{2k}) = k$. Najprej bomo predstavili zavlačevalkino strategijo, ki zagotovi, da je odigranih vsaj k potez. Naj bo $s'_1 = x$. Ker je residualni graf cikel in je dominator na potezi, lahko zavlačevalka v vsaki naslednji potezi ponovno dominira samo eno novo vozlišče, vozlišče x' pa dominira le v primeru, ko je v to prisiljena. Po prvi zavlačevalkini potezi je na grafu $2k-2$ nedominiranih vozlišč (x' ter $2k-3$ zaporednih med y in y'). Ker lahko dominator v vsaki svoji potezi dominira največ tri nova vozlišča, je skupaj v $2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 2$ potezah lahko dominiranih največ $4\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 4$ vozlišč. V primeru, ko je k sod, ostaneta še najmanj dve vozlišči nedominirani in je zato potrebna vsaj še ena poteza. Ko pa je k lih, so na grafu nedominirana vsaj še štiri vozlišča, za katera sta potrebni še najmanj dve potezi. Če seštejmo vse poteze, v obeh primerih dobimo, da napovedana spodnja meja drži.

Na koncu moramo pokazati še $\gamma'_g(C'_{2k}) \leq k$. Obravnavali bomo tri različne primere glede na to, katera je prva zavlačevalkina poteza. V prvem primeru, ko je $s'_1 = y$ (primer s $s'_1 = y'$ je simetričen), dominator odgovori z izbiro edinega nedominiranega soseda y'. Naj bo R residualni graf, dobljen iz C'_{2k} po prvih dveh potezah. Graf R je pot z obema koncema dominiranima. Če med njiju dodamo povezavo nazaj, s tem ne spremenimo igre, dobimo pa delno dominiran cikel dolžine C_{2k-4}. Z uporabo principa nadaljevanja in izreka 3.2 pa dobimo, da je $\gamma'_g(C'_{2k}) \leq 2 + \gamma'_g(C_{2k-4}) = 2 + k - 2 = k$.

V drugem primeru, ko velja $s'_1 \notin \{x, x', y, y'\}$, uporabimo indukcijo na k. Baza indukcije za $k = 2, 3$ očitno drži. Dokazati želimo, da trditev velja tudi za C'_{2k}. Na prvo zavlačevalkino potezo dominator odgovori s potezo, različno od x, x', y in y', ki (edini) dominirani niz poveča za 3 (taka poteza za $k \geq 4$ vedno obstaja). Po teh dveh potezah je residualni graf z dodano povezavo med edinima dominiranima vozliščema enak kot graf $C'_{2(k-1)}$ z dvema dominiranima vozliščema. Z uporabo principa nadaljevanja in indukcijske predpostavke dobimo želeno zgornjo mejo.

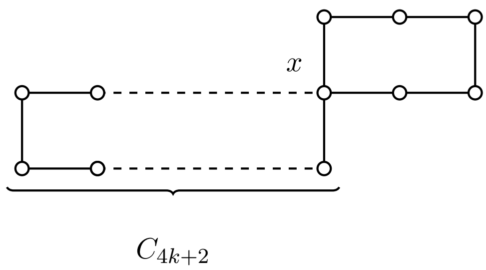
Zadnji primer nastopi, ko je $s'_1 = x$ (primer s $s'_1 = x'$ je simetričen). Če je $k = 2\ell$, potem dominator igra na y. Z uporabo principa nadaljevanja in izreka 3.2 dobimo, da je $\gamma'_g(C'_{4\ell}) \leq 2 + \gamma'_g(C_{4(\ell-1)+2}) = 2\ell$. Predpostavimo sedaj, da je $k = 2\ell + 1$. Dominator uporabi strategijo namišljene igre na naslednji način. Originalna igra je igra 2 na grafu $C'_{4\ell+2}$, medtem ko si dominator zamišlja vzporedno igro 2 na grafu $C_{4\ell+2}$. Na slednjem označimo tri zaporedna vozlišča z y, x in y'. Vse poteze so dovoljene, dokler zavlačevalka ne izbere x'. Če je to zadnja poteza v originalni igri, potem se je vzporedna igra po največ 2ℓ potezah že končala, od koder po izreku 3.2 sledi, da igralca potrebujeta največ $2\ell+1$ potez v originalni igri. Če pa po zavlačevalkini potezi na x' ostane še nekaj nedominiranih vozlišč, dominator to potezo v vzporedni igri ignorira. Ker je residualni graf v vzporedni igri po prvi potezi delno dominiran gozd, igranje dveh zaporednih potez po izreku 1.5 dominatorju ne škoduje. Residualna grafa sta sedaj v obeh igrah enaka in v obeh je na potezi dominator. Ker pa je dominator eno potezo ignoriral, je skupno število potez v originalni igri največ za ena večje od skupnega števila potez v vzporedni igri. Po izreku 3.2 velja $\gamma_g'(C_{4\ell+2}) = 2\ell$, od koder dobimo, da velja tudi $\gamma_g'(C'_{2\ell+1}) \leq 2\ell + 1$. ■

4.4 MINUS grafi

Ker para $(2,1)$ ni moč realizirati, je najmanjši MINUS graf cikel dolžine pet, ki realizira par $(3,2)$. Igra na družini MINUS grafov je zanimiva predvsem z vidika, da igralec, ki naredi prvo potezo, ne uživa nobene prednosti. Še več, v poglavju 2 smo ugotovili, da bi vsak od igralcev prvo potezo nemudoma preskočil, če bi imel to možnost.

4.4.1 Lihi primer

Iz izreka 3.2 direktno sledi, da C_{4k+2} realizira par $(2k+1, 2k)$. Ker so cikli 2-povezani, bi radi poiskali še 1-povezano družino MINUS grafov, ki realizira vse lihe pare. V ta namen definiramo naslednji graf. Naj bo CC_k, $k \geq 1$, graf, ki ga dobimo tako, da identificiramo poljubni vozlišči grafov C_6 in C_{4k+2}, glej sliko 4.3.



Slika 4.3: Graf CC_k

Izrek 4.6 *Za vsak $k \geq 1$ graf CC_k realizira par* $(2k+3, 2k+2)$.

Dokaz: Najprej bomo dokazali, da velja $\gamma_g(CC_k) \geq 2k+3$. Zavlačevalka uporablja naslednjo strategijo. V vsaki svoji potezi izbere vozlišče na enem izmed koncev najdaljšega niza bodisi v C_6 bodisi v C_{4k+2}, ki je različen od x. S tem dominira le eno novo vozlišče. V nasprotnem, ko tako vozlišče ne obstaja, potem obstaja samo en niz, ki se tako začne kot konča v x. V tem primeru zavlačevalka izbere x in s tem dominira dve novi vozlišči. Predpostavimo sedaj, da zavlačevalka nikoli ne igra na x. Potem je dominator v prvih $k+1$ potezah dominiral največ $3k+5$ vozlišč (x ima stopnjo 4, vsa ostala vozlišča pa 2), medtem ko je zavlačevalka v prvih $k+1$ potezah dominirala natanko $k+1$ vozlišč. Skupaj sta tako v $2k+2$ potezah dominirala največ $4k+6$ vozlišč, kar pomeni, da potrebuje dominator vsaj še eno potezo, da dokonča igro. Denimo sedaj, da je zavlačevalka tekom igre enkrat izbrala x. Potem sledi, da je dominator v $k+1$ potezah dominiral največ $3k+3$ vozlišč, zavlačevalka pa $k+2$, od koder sledi, da je potrebna vsaj še ena poteza za dokončanje igre. V obeh primerih je bilo tako potrebnih vsaj $2k+3$ potez.

Dokazati moramo še, da je $\gamma_g'(CC_k) \le 2k+2$, za kar podamo dominatorjevo strategijo. Obravnavamo dva primera. Če zavlačevalka kot prvo vozlišče izbere enega iz C_6, potem dominator izbere takega, da je celoten C_6 dominiran. Ker velja $\gamma_g'(C_6) = 2$, tako vozlišče vedno obstaja. Po principu nadaljevanja potem velja

$$\gamma_g'(CC_k) \le 2 + \gamma_g'(CC_k|(N[s_1'] \cup N[d_1'])) \le 2 + \gamma_g'(C_{4k+2}) = 2k+2\,.$$

Za dokaz drugega primera, ko zavlačevalka najprej izbere vozlišče iz komponente, izomorfne C_{4k+2}, uporabimo indukcijo na k. Trditev očitno drži za CC_1, saj uporabimo enak argument kot v prvem primeru. Dokažimo trditev sedaj še za CC_k. Zavlačevalka izbere vozlišče, različno od x, iz komponente, izomorfne C_{4k+2}. Nato dominator igra na tako vozlišče, različno od x, ki poveča edini dominiran niz za 3. Označimo sedaj edini dve dominirani vozlišči v residualnem grafu z a in b. Če med njima dodamo povezavo, dobimo ravno graf CC_{k-1}, kjer sta edini dominirani vozlišči a in b. Z uporabo principa nadaljevanja in indukcijske predpostavke dobimo

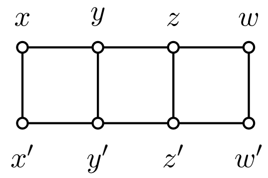
$$\gamma_g'(CC_k) \le 2 + \gamma_g'(CC_{k-1}|\{a,b\}) \le 2 + \gamma_g'(CC_{k-1}) \le 2 + 2(k-1) + 2 = 2k+2\,.$$

Dokaz zaključimo z uporabo izreka 1.2. ∎

4.4.2 Sodi primer

Brešar et al. so v [9] sprva domnevali, da sodi primer MINUS grafa ne obstaja, kar pa so Kinnersley et al. v [30] ovrgli s tem, ko so našli graf $P_2 \,\square\, P_4$ s slike 4.4. Ta realizira par $(4,3)$. Zamani je nato v svoji doktorski disertaciji [39] predstavil še neskončno

1-povezano družino grafov, ki realizira vse pare oblike $(2k+2, 2k+1)$ in s tem podal še zadnji odgovor na vprašanje 2. Vendar pa je konstrukcija te družine zelo zapletena in vključuje velike grafe, ki niso primerni za uporabo v nadaljnjem raziskovanju. Poleg tega je njegov dokaz zelo dolg in zato težje razumljiv. Zato bomo to poglavje zaključili z 2-povezano družino MINUS grafov, ki so naravna posplošitev grafa $P_2 \,\square\, P_4$.



Slika 4.4: Graf $P_2 \,\square\, P_4$

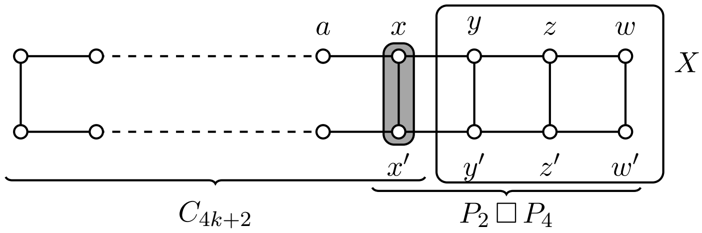
Ker bo naslednja konstrukcija temeljija na grafu $P_2 \,\square\, P_4$, si najprej poglejmo strategiji obeh igralcev na tem grafu. Uporabili bomo oznake s slike 4.4. Če je dominatorjeva prva poteza izbira vozlišča stopnje 2, potem je zavlačevalkina edina optimalna poteza, da igra na njegovega soseda stopnje 2. Ker po njeni potezi ostane nedominiran še cikel dolžine štiri, sledi, da sta potrebni še vsaj dve potezi. V primeru, ko dominator najprej igra na vozlišče stopnje 3, denimo y, potem zavlačevalka lahko igra bodisi na z bodisi na z'. Na grafu ostaneta nedominirani še dve izolirani vozlišči, ki nimata skupnega soseda. Poglejmo si še igro 2. Če zavlačevalka izbere vozlišče stopnje 2, denimo x, dominator igra na vozlišče stopnje 3, ki je na razdalji 3 od x, tj. z', in s tem dominira vse razen enega vozlišča. Če zavlačevalka v prvi potezi izbere vozlišče stopnje 3, denimo y, potem dominator igra na vozlišče stopnje 2, ki je na razdalji 3 od y, tj. w', in s tem ponovno dominira vse razen enega vozlišča. V obeh primerih se po naslednji zavlačevalkini potezi igra zaključi.

Naj bo BL_k graf s slike 4.5, ki ga dobimo tako, da zlepimo skupaj poljubno povezavo cikla dolžine $4k+2$ ter povezavo med vozliščema stopnje 2 v $P_2 \,\square\, P_4$. V posebnem je BL_0 izomorfen $P_2 \,\square\, P_4$.

Izrek 4.7 *Za vsak* $k \geq 0$ *graf* BL_k *realizira par* $(2k+4, 2k+3)$.

Dokaz bomo razdelili na dve trditvi, v katerih se bomo pogosto sklicevali na oznake s slike 4.5. Dodatno bomo vozliščema x in x' rekli *posebni vozlišči.* Najprej pokažimo, da lahko $\gamma_g(BL_k)$ navzdol omejimo z $2k+4$.

Trditev 4.8 *Za vsak* $k \geq 0$ *velja* $\gamma_g(BL_k) \geq 2k+4$.



Slika 4.5: Graf BL_k

Dokaz: Ker moramo dokazati zgolj spodnjo mejo, potrebujemo zavlačevalkino strategijo. Ta naredi potezo v del grafa (bodisi v ciklu bodisi v $P_2 \,\square\, P_4$), v katerem je igral dominator pred njo. Če je izbral eno izmed posebnih vozlišč, potem zavlačevalka igra v cikel. V primeru, ko zavlačevalka ne more odigrati v željeni komponenti, ker je ta pred njeno potezo v celoti dominirana, odigra v drugi. V vsaki komponenti izbere tisto vozlišče, ki bi ga izbrala tudi v primeru, če bi se igra odvijala samo na dotični komponenti. To pomeni, da na ciklu izbere konec poljubnega niza, na $P_2 \,\square\, P_4$ pa igra po strategiji, opisani zgoraj. Poleg tega zavlačevalka igra na izolirano ali posebno vozlišče samo v primeru, ko je v to prisiljena.

V nadaljevanju obravnavamo primere igre glede na dominatorjevo prvo izbrano vozlišče. Zaradi simetrije grafa nam ni treba obravnavati vseh primerov.

V prvem primeru dominator najprej izbere y (ali z). Potem zavlačevalka igra na z (ali y). V grafu imamo sedaj eno izolirano vozlišče, w', ter preostanek s $4k+1$ nedominiranimi vozlišči. V residualnem grafu imajo vsa vozlišča razen x' stopnjo manjšo ali enako 2. Ker so tudi v zaprti soseščini x' le tri nedominirana vozlišča, sledi, da lahko dominator v vsaki izmed svojih potez dominira največ tri nova vozlišča. Po drugi strani pa zavlačevalka do konca igre po svoji strategiji dominira vedno samo eno novo vozlišče. Sledi, da zavlačevalka v k potezah dominira k vozlišč na ciklu, dominator pa za preostalih $3k+1$ vozlišč potrebuje najmanj $k+1$ potez. Ker mora biti ena poteza odigrana še, da se dominira w', vse skupaj potrebujeta vsaj $2+k+(k+1)+1 = 2k+4$ potez.

V drugem primeru dominator najprej igra w, zavlačevalka pa odgovori na w'. Na grafu tako ostane še $4k+4$ nedominiranih vozlišč in zavlačevalka lahko po svoji strategiji v vsaki izmed svojih naslednjih potez dominira samo eno novo vozlišče. Če dominator v nobeni izmed potez ne dominira več kot treh vozlišč, morata do konca igre odigrati še vsaj $2k+2$ potez. Denimo sedaj, da dominator po $2\ell+2$, $\ell \geq 0$, potezah izbere posebno vozlišče, ki ni dominirano in nima dominiranega nobenega soseda. Brez škode za splošnost naj bo to vozlišče x. S tem dominira štiri nova vozlišča. Pokazati moramo, da lahko zavlačevalka s svojo strategijo prisili dominatorja, da v eni izmed svojih naslednjih potez dominira manj kot tri vozlišča. Po igranju vozlišča x ostane na ciklu še $4k+2-(4\ell+3)=4(k-\ell-1)+3$ nedominiranih vozlišč, medtem ko na $P_2 \,\Box\, P_4$ ostane nedominirano le vozlišče y'. Zavlačevalka po svoji strategiji nato igra v ciklu in dominira eno vozlišče. Po naslednjih $2(k-\ell-1)$ potezah ostaneta na ciklu še vsaj dve nedominirani vozlišči ter y'. Ker lahko dominator v eni potezi dominira največ dve (bodisi dve na ciklu, bodisi igra x' in dominira eno iz cikla ter y'), sledi, da sta potrebni vsaj še dve potezi za dokončanje igre. Ko seštejemo vse poteze, dobimo, da je potrebnih vsaj $(2\ell+2)+2+2(k-\ell-1)+2=2k+4$ potez.

V tretjem primeru dominator najprej izbere posebno vozlišče x. Zavlačevalka nato igra a in s tem dominira samo eno novo vozlišče. Po $2\ell+2$, $\ell \geq 0$, potezah na ciklu nato dominator izbere vozlišče iz X. Če izbere z', v X ostane samo eno nedominirano vozlišče, w, ki s tem postane izolirano. Zavlačevalka v skladu s svojo strategijo igra v ciklu in s tem dominira eno novo vozlišče. Po tej potezi je na ciklu ostalo še vsaj $4k+2-(4\ell+4+1)=4(k-\ell-1)+1$ nedominiranih vozlišč, za katere potrebujeta še vsaj $2(k-\ell-1)+1$ potez. Ker potrebujeta še eno potezo, da dominirata w', sledi, da je vse skupaj potrebnih vsaj $(2\ell+2)+2+(2(k-\ell-1)+1)+1=2k+4$ potez. Če dominator izbere kakšno drugo vozlišče iz X, zavlačevalka odgovori s tako potezo v X, da dobimo situacijo, analogno tisti iz drugega primera.

V zadnjem primeru dominator najprej izbere neko vozlišče na ciklu. Zavlačevalka igra na cikel, dokler dominator ne izbere posebnega vozlišča ali vozlišča iz X. (Zavlačevalka igra na posebno vozlišče samo v primeru, ko so vsa vozlišča cikla že dominirana in tudi v tem primeru dominira samo eno novo vozlišče, ki je bodisi y bodisi y'.) Prvi primer, ko dominator igra na posebno vozlišče, je analogen tretjemu primeru, razen če so na ciklu vsa vozlišča dominirana. V tem primeru je bilo odigranih že $2k+1$ potez in eden izmed y ter y' je nedominiran. Zavlačevalka lahko dominira samo njega tako, da igra na ustrezno posebno vozlišče. Nedominiran ostane še cikel dolžine štiri, za katerega potrebujeta vsaj še dve potezi. Drugi primer, ko dominator izbere neko vozlišče iz X, pa je analogen prvemu ali drugemu primeru. ∎

Preostane dokazati še, da je zgornja meja igralnega dominacijskega število, ko zavlačevalka naredi prvo potezo, na grafu BL_k enaka $2k+3$.

Trditev 4.9 *Za vsak $k \geq 0$ velja $\gamma_g'(BL_k) \leq 2k+3$.*

Dokaz: Podati je potrebno le strategijo dominatorja. Obravnavamo dva primera glede na prvo zavlačevalkino potezo. Če zavlačevalka najprej izbere vozlišče iz $P_2 \,\square\, P_4$ (v posebnem tudi posebno vozlišče), potem dominator odgovori s tako potezo v $P_2 \,\square\, P_4$, da so vsa vozlišča v $P_2 \,\square\, P_4$ razen enega dominirana. Nedominirano vozlišče je bodisi eno izmed posebnih vozlišč bodisi eno izmed w in w'. V primeru, ko nastopi zadnja situacija, je residualni graf enak $P''_{4k-1} \cup P''_1$. Po lemi 3.3 sledi, da je $\gamma'_g(P''_{4k-1} \cup P''_1) = 2k+1$, kar skupaj s prvima dvema potezama znese $2k+3$ potez. V prvem primeru, ko je nedominirano eno izmed posebnih vozlišč (brez škode za splošnost naj bo to x), pa obravnavamo še dva primera glede na zavlačevalkino naslednjo potezo. Če zavlačevalka v naslednji potezi dominira x, potem je nedominiranih vozlišč največ $4k$ in je residualni graf enak P''_{4k}. Po lemi 3.3 za dokončanje igre potrebujeta še $2k$ potez. Če pa zavlačevalka v svoji drugi potezi ne dominira x, temveč izbere neko vozlišče na sredini cikla, dominator igra na a. Potem je residualni graf enak enemu od naslednjih grafov: P''_{4k-3}, P''_{4k-4}, P''_{4k-5}, $P''_i \cup P''_j$, kjer velja $i+j = 4k-5$ in $i,j \geq 1$. Po lemi 3.3 sledi, da je do konca igre še $\max\{2k-1, 2k-2, 2k-2, 2k-1\} = 2k-1$ potez, kar se skupaj s prvimi štirimi potezami sešteje v $2k+3$.

Za drugi primer, ko zavlačevalka igra v ciklu, a ne na posebno vozlišče, uporabimo indukcijo na k. Za $k \leq 1$ trditev drži. Dokažimo sedaj trditev še za $k \geq 2$. Dominator v svoji prvi potezi izbere tako vozlišče, ki podaljša niz dominiranih vozlišč za 3 in ni posebno. Naj bo R residualni graf po prvih dveh potezah. Potem po principu nadaljevanja in indukcijski predpostavki velja $\gamma'_g(R) \leq \gamma'_g(BL_{k-1}) \leq 2(k-1)+3 = 2k+1$, od koder sledi, da je na BL_k skupaj potrebnih največ $2k+3$ potez. ∎

Poglavje 5

3/5 domnevi

Glavni cilj razdelka je poiskati drevesa, katerih igralno dominacijsko število doseže mejo v naslednji domnevi.

Domneva 5.1 *Za vsak gozd G brez vozlišč stopnje* 0 *velja* $\gamma_g(G) \leq 3|V(G)|/5$.

Med iskanjem bomo naleteli tudi na drevesa, ki jih lahko pripnemo na poljuben graf tako, da igralno dominacijsko število novo skonstruiranega grafa doseže mejo, postavljeno v naslednji, bolj splošni domnevi.

Domneva 5.2 *Za vsak graf G brez vozlišč stopnje* 0 *velja* $\gamma_g(G) \leq 3|V(G)|/5$.

Očitno prva domneva sledi iz druge, vendar pa še zdaleč ni očitno, ali sta ekvivalentni. Brešar et al. so namreč v [10] dokazali, da je za graf G in njegovo vpeto drevo T razlika $\gamma_g(G) - \gamma_g(T)$ lahko poljubno velika.

Grafom in drevesom brez točk stopnje 0, ki imajo igralno dominacijsko število enako 3/5 njihovega reda, bomo rekli 3/5-*grafi* in 3/5-*drevesa*. Neskončno družino takih grafov dobimo, če poljubnemu grafu G reda n na vsako izmed njegovih vozlišč pripnemo pot reda 5 v centralnem vozlišču. S tem dobimo graf G' reda $5n$, za katerega je enostavno preveriti, da velja $\gamma_g(G') = 3n$. Ta konstrukcija, ki je bila neodvisno odkrita s strani več avtorjev v [27, 9, 30], je bila tudi povod za vzpostavitev zgoraj navedenih domnev.

Poizkusi dokaza domneve 5.1 so vodili v iskanje dreves, ki dosežejo domnevano mejo. Z uporabo računalnika smo našli eno, dve oziroma štiri 3/5-drevesa na 5, 10 oziroma 15 vozliščih. Tri izmed teh sedmih dreves lahko dobimo iz zgoraj opisane konstrukcije. V treh izmed preostalih štirih dreves kot podgraf nastopajo tako imenovane *vilice*. Da bi bolje razumeli njeno vlogo pri konstrukciji 3/5-grafov, smo računalniško iskanje razširili še na vsa drevesa na 20 vozliščih. Kljub temu, da je takih (neizomorfnih) dreves 823 065, smo uspeli pregledati vsa. Izkaže se, da je vseh 3/5-dreves na 20 vozliščih natanko deset, od katerih lahko dobimo iz zgornje konstrukcije zgolj dve. Vzorec dreves je bil dovolj velik, da smo uspeli najti splošne konstrukcije, iz katerih lahko dobimo vsa 3/5-drevesa na največ 20 vozliščih.

Primeri ekstremnih grafov nam torej potrdijo, da je meja v obeh domnevah najmanjša možna. Bujtás je v [13] dokazala, da domneva 5.1 drži za vse gozdove brez vozlišč stopnje 0, ki nimajo nobenih dveh listov na razdalji 4.

Izrek 5.3 *Naj bo G gozd reda n brez vozlišč stopnje* 0*. Če G nima nobenih dveh listov na razdalji* 4*, velja*

$$\gamma_g(G) \leq \frac{3n}{5} \quad \textit{in} \quad \gamma_g'(G) \leq \frac{3n+1}{5}\,.$$

Kinnersley et al. so v [30] dokazali, da je za igralno dominacijsko število gozdov brez vozlišč stopnje 0 v splošnem zgornja meja enaka 7/11 njihovega reda. To mejo je Bujtás v [13] še nekoliko izboljšala.

Izrek 5.4 *Za vsak gozd G reda n brez vozlišč stopnje* 0 *velja*

$$\gamma_g(G) \leq \frac{5n}{8} \quad \textit{in} \quad \gamma_g'(G) \leq \frac{5n+2}{8}\,.$$

5.1 Osnovni drevesi

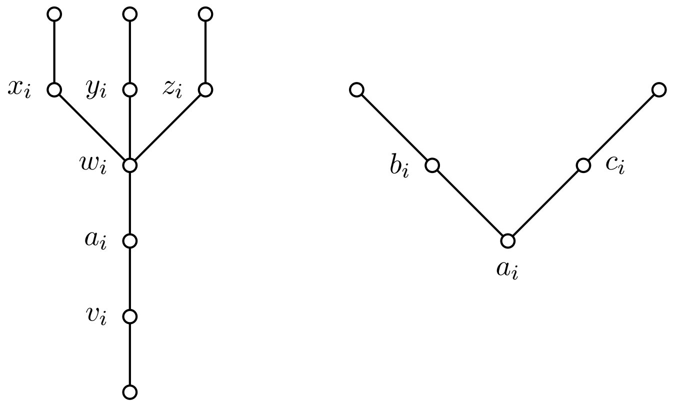
Kot smo omenili že zgoraj, bosta pri konstrukciji velike družine ekstremnih dreves ključni dve *osnovni drevesi*. Prvo osnovno drevo je pot reda 5, medtem ko drugo, t.i. vilice (ang. fork), dobimo tako, da enemu izmed listov na poti reda 4 pripnemo tri poti reda 3. Vilice označimo s F. Obe drevesi sta skupaj z oznakami, potrebnimi v nadaljevanju, narisani na sliki 5.1.

S pregledom vseh možnosti lahko enostavno pokažemo, da ima vsako osnovno drevo T naslednje lastnosti:

- Če je a_i vozlišče s slike 5.1, velja $\gamma_g(T|a_i) = \gamma_g(T) = \gamma_g'(T) = \gamma_g'(T|a_i) = 3|V(T)|/5$.

- Dominator ima optimalno strategijo na T, ki zagotovi, da je vozlišče a_i igrano v prvih dveh potezah igre, ne glede na to, kdo začne.

- Izbira vozlišča a_i na T je dominatorjeva optimalna prva poteza v igri 1.

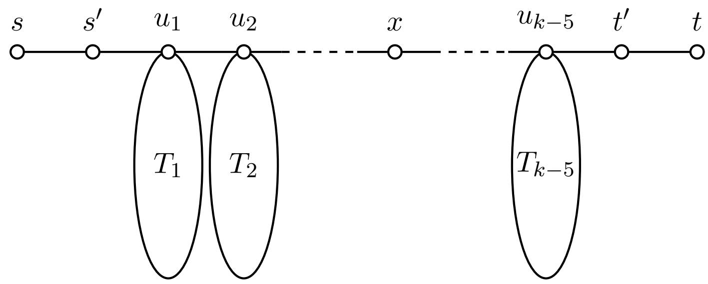


Slika 5.1: Grafa F (levo) in P_5 (desno) označena kot T_i

Prva lastnost nam med drugim pove, da sta osnovni drevesi 3/5-drevesi. V naslednjem razdelku bomo skonstruirali neskončno družino 3/5-dreves, ki bodo kot podgrafa vsebovala osnovni drevesi.

5.2 Konstrukcija z osnovnima drevesoma

Naj bo $k \geq 6$ in $3 \leq \ell \leq k-2$. Na poti reda k označimo lista s s in t, njuna soseda pa s s' in t'. Vozlišče, ki je na razdalji $\ell - 1$ od s, označimo z x, preostala vozlišča pa po vrsti z $u_1, \dots, u_{k-5}$, začenši s sosedom stopnje 2 vozlišča s'. Pot označimo s P. Potem skonstruiramo drevo $T_k^\ell[T_1, \dots, T_{k-5}]$ po naslednjem postopku. Za vsak $i = 1, \dots, k-5$ vozlišče u_i na poti P identificiramo z vozliščem a_i iz osnovnega drevesa T_i, glej sliko 5.2.



Slika 5.2: Konstrukcija drevesa $T_k^\ell[T_1, \dots, T_{k-5}]$

V dokazu naslednjega izreka bosta oba igralca uporabljala *strategijo odgovarjanja.*

Ta je uporabna pri dokazovanju igralnega dominacijskega števila grafov, ki so sestavljeni iz več podgrafov, na katerih pa že poznamo optimalne strategije obeh igralcev v obeh variantah dominacijske igre. Ko eden izmed igralcev uporablja to strategijo, to pomeni, da vedno, ko je to mogoče, odgovori s potezo v istem podgrafu, v katerem je igral igralec pred njim. Ta poteza je enaka optimalni potezi v igri, ki se igra samo na tem podgrafu. Igralec si torej zamišlja, da se igra odvija le na podgrafu, na katerem je naredil potezo igralec pred njim. Posebne primere, ko taka poteza ni mogoča, bomo obravnavali individualno v odvisnosti od situacije. V takih primerih bomo torej eksplicitno navedli, kakšna je naslednja poteza igralca, ki se poslužuje opisane strategije.

Izrek 5.5 *Za vsak* $k \geq 0$*, vsak* $3 \leq \ell \leq k-2$ *in vsak seznam osnovnih dreves* $T_1, \ldots, T_{k-5}$ *je drevo* $T_k^{\ell}[T_1, \ldots, T_{k-5}]$ 3/5-*drevo.*

Dokaz: Naj bo $T = T_k^{\ell}[T_1, \ldots, T_{k-5}]$ za poljubna $k \geq 6$ in $3 \leq \ell \leq k-2$. Število vozlišč grafa T označimo z n, tj. $n = |V(T)|$, medtem ko je $n_i = |V(T_i)|$ za $i = 1, \ldots, k-5$. Najprej dokažimo, da lahko dominator zagotovi, da je odigranih največ $3n/5$ potez na T v igri 1, pri čemer so največ tri poteze odigrane na vozliščih s, s', x, t', t in največ $3n_i/5$ potez na T_i za vsak $i = 1, \ldots, k-5$.

Predpostavimo najprej, da je $\ell = 3$, tj. x je sosed vozlišča s'. Dominator v svoji prvi potezi izbere x, s čimer zagotovi, da sta v celotni igri izbrani natanko dve izmed vozlišč s, s', x. Nato dominator na vsakem podgrafu T_i uporablja strategijo odgovarjanja. V posebnem zagotovi, da je u_i igran najkasneje v drugi potezi na T_i. Če zavlačevalkina poteza konča igro na T_i, potem dominator igra optimalno v nekem T_j, v katerem igra še ni končana. Če je to prva poteza v T_j, dominator igra na u_j. Če pa je pred tem že bila odigrana vsaj ena poteza v T_j, potem v T_j igrata igro, kjer je zavlačevalka izpustila potezo. Po izreku 1.5 sledi, da to ne škoduje dominatorju.

Denimo, da na neki točki igre na T zavlačevalka izbere t. Če se igra na T_{k-5} še ni začela, jo dominator začne z izbiro u_{k-5}. Poleg tega, da je to optimalna poteza na T_{k-5}, si zagotovi še, da je na vozliščih t' in t odigrana samo ena poteza. Po drugi strani pa je v primeru, ko se je igra na T_{k-5} že začela pred zavlačevalkino potezo na t, po zgoraj opisani dominatorjevi strategiji vozlišče u_i že dominirano. Od tu sledi, da legalna poteza na t' ni več možna. S tem so bile odigrane tri poteze na vozliščih s, s', x, t', t in največ $3n_i/5$ potez na vsakem od podgrafov T_i.

Če je $\ell = k-2$, potem je x soseden s t' in strategija je enaka kot v prvem primeru. Naj bo sedaj $3 < \ell < k-2$. Kot v prvem primeru dominator v prvi potezi izbere x. Nato uporabi enako strategijo kot zgoraj, tj. strategijo odgovarjanja na vsakem poddrevesu

T_i, pri čemer zagotovi, da je vozlišče u_i igrano v prvih dveh potezah na T_i. Enako kot zgoraj postopa tudi v primeru, ko zavlačevalka izbere s ali t. Ko zavlačevalka izbere s, dominator igra v T_1, medtem ko igra na T_{k-5}, če zavlačevalka izbere t. Zaključimo lahko, da velja $\gamma_g(T) \leq 3n/5$.

S pomočjo zavlačevalkine strategije dokažimo še spodnjo mejo za $\gamma_g(T)$. Denimo, da dominator v prvi potezi izbere x. Potem bodo vsaj tri vozlišča izmed s, s', x, t', t zagotovo odigrana, saj sta s in t še obe nedominirani. Zavlačevalka izbere s v svoji prvi potezi, nato pa uporablja strategijo odgovarjanja na poddrevesih T_i. V primeru, ko ne more odgovoriti s potezo v istem poddrevesu, je igre bodisi konec (oziroma jo s potezo na t zaključi zavlačevalka) bodisi zavlačevalka lahko igra na T_j. To je bodisi prva poteza na T_j, bodisi je zadnjo potezo na njem odigrala zavlačevalka. Torej je na T_j igra enaka igri 1, v kateri lahko dominator izpusti kakšno potezo. Po trditvi 2.3 sledi, da izpuščanje potez na (delno dominiranem) drevesu zavlačevalki ne škoduje. Torej bo na vsakem poddrevesu T_i odigranih vsaj $3n_i/5$ potez. V primeru, ko je $d_1 = x$, torej dobimo, da je $\gamma_g(T) \geq 3n/5$.

Po principu nadaljevanja lahko privzamemo, da dominator v prvi potezi ne igra na s ali t. V primeru, ko je $d_1 = s'$ ali $d_1 = t'$, zavlačevalka odgovori na x. Situacija je potem enaka kot v prvem primeru.

Na koncu obravnavajmo še primer, ko dominator svojo prvo potezo naredi v poddrevesu T_m. Zavlačevalka potem igra na x. Osnovnemu drevesu bomo rekli, da je *odprto*, če je bila v njem odigrana samo ena poteza in je to potezo naredil dominator. Torej je po prvih dveh potezah na T odprto samo drevo T_m. V nadaljnjem poteku igre dominator naredi eno izmed naslednjih štirih potez.

1. dominator ustvari novo odprto drevo.

2. dominator igra s' ali t'.

3. dominator igra v drevesu, v katerem je zadnjo potezo naredila zavlačevalka.

4. dominator igra v odprtem drevesu.

Vsako od teh štirih potez sedaj obravnavamo posebej. Denimo, da dominator s svojo potezo ustvari odprto drevo T_i. Če je to edino odprto drevo, zavlačevalka uporabi strategijo odgovarjanja na njem. V nasprotnem pa obstaja še eno odprto drevo T_j. Če sta i in j oba manjša od $\ell - 2$, denimo $i < j < \ell - 2$, potem zavlačevalka igra optimalno v T_j. Če pa je vsaj eden izmed i in j večji od $\ell - 2$, denimo $i > \ell - 2$, potem zavlačevalka igra optimalno v $T_{\min\{i,j\}}$. Njena strategija torej zagotavlja, da sta po vsaki dominatorjevi potezi odprti največ dve drevesi, po vsaki njeni potezi pa največ eno.

Če dominator igra s' ali t' in ni odprtih dreves, potem zavlačevalka igra na drugega izmed s' in t'. Če pa obstaja kakšno odprto drevo, potem naredi optimalno potezo v njem.

V tretjem primeru, ko dominator igra v drevo T_i, v katerem je zavlačevalka naredila zadnjo potezo, zavlačevalka igra v T_i, če je to mogoče. Če taka poteza ni možna in obstaja odprto drevo, potem igra v tem odprtem drevesu. Če ni odprtih dreves, potem naredi prvo potezo v nekem T_j ali pa igra v T_j, v katerem je ona naredila zadnjo potezo. V tem drevesu bo po trditvi 2.3 še vedno odigranih vsaj $3n_j/5$ potez.

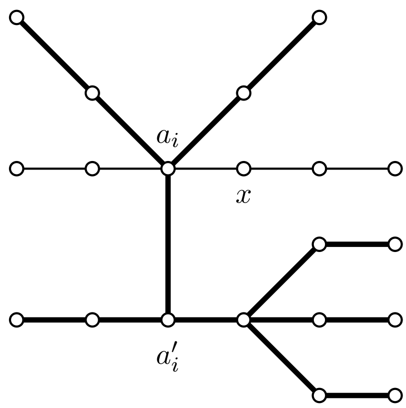
Na koncu obravnavajmo še primer, ko dominator igra v (edinem) odprtem drevesu. Dokažimo najprej trditev, ki pravi, da je u_i legalna poteza, če sta prvi dve potezi na T_i obe dominatorjevi in nobena od njiju ni enaka izbiri u_i. Označimo ti dve dominatorjevi potezi z d_p in d_q, kjer je $p < q$ in $d_p, d_q \neq u_i$. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $i > \ell - 2$. Predpostavimo, da je bil desni sosed y vozlišča u_i na P dominiran pred potezo na d_q. Vozlišče y je bodisi u_{i+1} bodisi t'. Naj bo najprej $y = t'$. Če je bil y igran pred d_q, potem po zgoraj opisani zavlačevalkini strategiji (primer 2) dominator sploh ni mogel storiti potez d_p in d_q v T_i. Če je $y = u_{i+1}$, obravnavamo dva podprimera glede na potezo, s katero je bilo dominirano vozlišče y. Denimo najprej, da je bil desni sosed vozlišča y odigran tekom igre. Potem je bil odigran pred d_p, saj bi sicer zavlačevalka igrala najprej v T_i in zato dominator ne bi imel dveh zaporednih potez na T_i. Od tu sledi, da je po potezi na d_p T_i najbolj levo odprto drevo, kar pa je v protislovju s tem, da je bil sosed od y odigran že prej. Z enakim argumentom dobimo še protislovje v primeru, ko je y dominiran z neko potezo v T_{i+1}. S tem je trditev dokazana.

Če je T_i izomorfen P_5 in je dominator igral b_i ter c_i, potem zavlačevalka po zgornji trditvi lahko igra na u_i. Če dominator igra na u_i v eni izmed teh dveh potez, potem je nedominirano še eno vozlišče v T_i, ki ga potem izbere zavlačevalka. Naj bo sedaj T_i izomorfen F. Če je množica $\{d_p, d_q\}$ enaka eni izmed $\{x_i, w_i\}, \{x_i, v_i\}$ ali $\{v_i, w_i\}$, potem po zgornji trditvi zavlačevalka lahko igra na u_i in si s tem zagotovi 6 potez na T_i. Če je $\{d_p, d_q\}$ enaka $\{x_i, u_i\}$ ali $\{x_i, y_i\}$, potem zavlačevalka igra na w_i. V prvem primeru si s tem že zagotovi 6 potez, medtem ko v drugem primeru to doseže tako, da zagotovi, da je u_i odigran v naslednjih dveh potezah na T_i. Zaradi simetričnosti in principa nadaljevanja so to vsi možni primeri, ki se lahko zgodijo. Zaključimo lahko, da je $\gamma_g(T) \geq 3n/5$. ∎

Zgornjo konstrukcijo lahko razširimo še za $k = 5$ in iz izreka dobimo, da je $T_5^3[\,] = P_5$ res 3/5-drevo. Opazimo tudi, da je T_6^4 ravno drevo, izomorfno vilicam.

Dobro bi bilo tudi razširiti množico osnovnih dreves, kar pa se na prvi pogled zdi izjemno težko, saj mora vsako osnovno drevo imeti lastnosti, opisane zgoraj. Poleg tega smo v dokazu (npr. v zadnjem odstavku) uporabili še specifične lastnosti obeh osnovnih dreves, da smo lahko navedli naslednjo zavlačevalkino potezo.

Da bi videli, kako občutljiva je konstrukcija iz izreka 5.5, si poglejmo drevo S, ki je na sliki 5.3 narisano s krepkimi povezavami. Preverimo lahko (glej tudi izrek 5.8), da za S velja $\gamma_g(S|a_i) = \gamma_g(S) = \gamma_g'(S) = \gamma_g'(S|a_i) = 9 = 3|V(S)|/5$. Poglejmo si sedaj graf $T_6^4[S]$ (glej sliko 5.3), na katerem S pripnemo na P_6 v vozlišču a_i iz S. Preverimo lahko, da je $\gamma_g(T_6^4[S]) = 11$ in torej ni 3/5-drevo. Enak rezultat dobimo v primeru, ko S pripnemo na P_6 v vozlišču a_i'. Ta primer nam torej jasno pove, da moramo biti ob razširitvi osnovnih dreves zelo previdni.



Slika 5.3: Drevesi S (v krepkem) in $T_6^4[S]$ (celoten graf)

5.3 Posplošene konstrukcije

V tem razdelku bomo s pomočjo poljubnega grafa in dreves z določenimi lastnostmi predstavili še eno konstrukcijo ekstremnih grafov. Uvedli bomo pojem pritrdljivih dreves, s katerim bomo lahko družino 3/5-dreves še povečali.

Naj bo G graf z n vozlišči $v_1, \dots, v_n$, H_i povezan graf reda $m_i \geq 2$ in $x_i \in V(H_i)$ za vsak $i = 1, \dots, n$. Z $G\big[H_1[x_1], \dots, G_n[x_n]\big]$ označimo graf reda $\sum_{i=1}^{n} m_i$, ki ga dobimo tako, da identificiramo v_i in x_i za vsak $i = 1, \dots, n$. Kadar bodo vozlišča x_i jasna iz konteksta, bomo pisali samo $G[H_1,\ldots,H_n]$.

Trditev 5.6 *Naj bo G poljuben graf reda n in za vsak $i = 1,\ldots,n$ naj bo T_i drevo z vozliščem x_i, za katerega velja $\gamma_g(T_i) = \gamma_g(T_i|x_i)$. Potem velja*

$$\gamma_g(G[T_1[x_1],\ldots,T_n[x_n]]) \geq \sum_{i=1}^{n} \gamma_g(T_i)\,.$$

Dokaz: Zadostuje dokazati, da ima zavlačevalka strategijo, s katero si za vsak $i = 1,\ldots,n$ lahko zagotovi vsaj $\gamma_g(T_i)$ potez na vsakem podgrafu T_i. Njena strategija je uporaba strategije odgovarjanja. Edini primer, ko ne more odgovoriti v istem podgrafu kot dominator pred njo, je, ko dominator s svojo potezo konča igro na tem podgrafu, tj. po njegovi potezi so vsa vozlišča podgrafa dominirana. Potem zavlačevalka enostavno igra v poljuben še ne povsem dominiran podgraf T_j. Igra na T_j je potem enaka igri 1 ali igri 2, pri čemer lahko dominator izpusti kakšno potezo. Po izreku 1.5 dobimo, da je v primeru, ko je to igra 1, v T_j odigranih vsaj $\gamma_g(T_j|x_j) = \gamma_g(T_j)$ potez, medtem ko je v primeru igre 2 v T_j odigranih vsaj $\gamma_g'(T_j|x_j) \geq \gamma_g(T_j|x_j) = \gamma_g(T_j)$ potez. ■

Opazimo lahko, da v trditvi nismo eksplicitno zahtevali, da ima vsako drevo T_i vsaj dve vozlišči, saj to sledi že iz lastnosti, da je $\gamma_g(T_i) = \gamma_g(T_i|x_i)$.

Če je vsako izmed dreves v zgornji trditvi 3/5-drevo, potem je igralno dominacijsko število sestavljenega grafa vsaj 3/5 njegovega reda.

Posledica 5.7 *Naj bo G poljuben graf reda n in za vsak $i = 1,\ldots,n$ naj bo T_i drevo z vozliščem x_i, za katerega velja $\gamma_g(T_i) = \gamma_g(T_i|x_i) = 3|V(T_i)|/5$. Potem za graf $\widetilde{G} = G[T_1[x_1],\ldots,T_n[x_n]]$ velja*

$$\gamma_g(\widetilde{G}) \geq \frac{3}{5}|V(\widetilde{G})|\,.$$

Kot smo ugotovili že v podpoglavju 5.1, sta F in P_5 primera grafov, ki zadostujeta pogojem na poddrevesa v zgornji posledici. Torej, če poljubnemu grafu G na vsako izmed njegovih vozlišč pripnemo P_5 ali F v ustreznem vozlišču (označenem z a_i na sliki 5.1), dobimo veliko družino grafov, ki bodisi doseže domnevano 3/5-mejo bodisi vsebuje protiprimer domneve 5.2.

Vozlišču v pravimo *optimalno začetno vozlišče*, če ima dominator tako optimalno strategijo v igri 1, da je $d_1 = v$. Naj bo T drevo in x eno izmed njegovih vozlišč. Pravimo, da je (T,x) *pritrdljivo drevo* (v vozlišču x), če je x optimalno začetno vozlišče v T in velja še $\gamma_g(T|x) = \gamma_g(T) = \gamma_g'(T)$. Potem zaradi principa nadaljevanja in izreka 1.5 dobimo še

$$\gamma_g'(T|x) \le \gamma_g'(T) = \gamma_g(T) = \gamma_g(T|x) \le \gamma_g'(T|x)\,.$$

Ker sta vrednosti na levi in desni strani neenakosti enaki, potem velja enačaj skozi celotno verigo. Dobimo, da za pritrdljivo drevo (T,x) velja še $\gamma_g'(T|x) = \gamma_g'(T)$.

Izrek 5.8 *Naj bo G graf z univerzalnim vozliščem reda n in (T_i, x_i) pritrdljivo drevo za vsak $i = 1, \dots, n$. Potem velja*

$$\gamma_g(G) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_g(T_i)\,.$$

Dokaz: Označimo z x univerzalno vozlišče v G. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $x = x_1$. Zaradi trditve 5.6 zadostuje dokazati zgornjo mejo. Dominator v prvi potezi izbere x. Residualni graf je po tej potezi (delno dominirano) drevo, saj so vsa vozlišča grafa G dominirana. Zapišemo ga lahko kot $G|N[x] = (T_1 \cup \cdots \cup T_n)|N[x]$ $= (T_1|N[x_1]) \cup (T_2|x_2) \cup \cdots \cup (T_n|x_n)$. Ker je x_1 optimalna poteza v drevesu T_1, velja $\gamma_g(T_1|N[x_1]) \le \gamma_g'(T_1|N[x_1]) = \gamma_g(T_1) - 1$. Zaradi predpostavke, da je vsak T_i ENAČAJ graf, iz izreka 2.10 dobimo, da velja

$$\begin{aligned}
\gamma_g(G) &\le 1 + \gamma_g((T_1|N[x_1]) \cup (T_2|x_2) \cup \cdots \cup (T_n|x_n)) \\
&= 1 + \gamma_g(T_1|N[x_1]) + \gamma_g(T_2|x_2) + \cdots + \gamma_g(T_n|x_n) \\
&\le 1 + \gamma_g(T_1) - 1 + \gamma_g(T_2) + \cdots + \gamma_g(T_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \gamma_g(T_i)\,.
\end{aligned}$$

■

Vemo že, da sta (P_5, a_i) in (F, a_i) pritrdljivi drevesi. V bistvu sta to celo najmanjši drevesi, ki sta skonstruirani s pomočjo izreka 5.5. Naslednja trditev nam pove, da je vsako drevo iz tega izreka pritrdljivo.

Trditev 5.9 *Naj bo T drevo, skunstruirano v izreku 5.5, in x njegovo vozlišče, ki je definirano v istem izreku. Potem je (T,x) pritrdljivo drevo.*

Dokaz: Ker je dominator v svoji strategiji v dokazu zgornje meje izreka 5.5 v prvi potezi igral na x, je x optimalno začetno vozlišče drevesa T.

Dokazati moramo še, da velja $\gamma_g(T|x) = \gamma_g(T)$. Zaradi principa nadaljevanja velja $\gamma_g(T|x) \le \gamma_g(T)$. V dokazu obratne neenakosti bo zavlačevalka uporabila strategijo namišljene igre na $T|x$, medtem ko se bo dejanska igra igrala na T. V obeh igrah je dominator tisti, ki naredi prvo potezo. Naj bo naprej $d_1 = x$. Potem zavlačevalka naredi enako potezo še v namišljeni igri v $T|x$. Na tej točki sta množici dominiranih vozlišč v obeh igrah enaki, od koder sledi, da je število potez na T enako številu potez na $T|x$. Predpostavimo sedaj, da je $d_1 \neq x$. Potem zavlačevalka odigra enako potezo še v namišljeni igri, v kateri je ta poteza legalna. Nato zavlačevalka izbere x v $T|x$, kar je legalna poteza v obeh igrah, saj je x edini skupni sosed svojima dvema sosedoma (v nasprotnem bi na drevesu T imeli cikel). Iz dokaza izreka 5.5 sledi, da je zavlačevalkina poteza na x v T optimalna. Kot v prvem primeru ugotovimo, da sta v tej fazi množici dominiranih vozlišč v obeh igrah enaki, od koder lahko zaključimo, da je $\gamma_g(T|x) = \gamma_g(T)$. ■

Sedaj ko poznamo veliko družino pritrdljivih 3/5-dreves, lahko s pomočjo izreka 5.8 povečamo še družino 3/5-dreves.

Posledica 5.10 *Naj bo G graf reda n z univerzalnim vozliščem in (T_i, x_i) za vsak $i = 1, \ldots, n$ pritrdljivo* 3/5-*drevo, skonstruirano v izreku 5.5. Potem je* $G[T_1[x_1], \ldots, T_n[x_n]]$ 3/5-*drevo.*

Za razširitev izreka 5.8 na splošne grafe potrebujemo še naslednjo lastnost pritrdljivih dreves. Rekli bomo, da je pritrdljivo drevo (T, x) *posebno*, če lahko na vsako zavlačevalkino optimalno prvo potezo, različno od x, v igri 2 na T dominator odgovori s potezo na x.

Izrek 5.11 *Naj bo G povezan graf reda n in (T_i, x_i) posebno pritrdljivo drevo za vsak $i = 1, \ldots, n$. Potem velja*

$$\gamma_g(G[T_1[x_1], \ldots, T_n[x_n]]) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_g(T_i)\,.$$

Dokaz: Dovolj je dokazati, da velja zgornja meja, saj spodnja sledi iz trditve 5.6. Potrebujemo torej le dominatorjevo strategijo, ki zagotovi, da je na vsakem poddrevesu T_i odigranih največ $\gamma_g(T_i)$ potez. V prvi potezi dominator igra na x_1, nato pa uporablja strategijo odgovarjanja na vseh poddrevesih T_i. Kadarkoli je dominator tisti, ki prvi igra v nekem poddrevesu T_j, potem igra na x_j, kar je optimalno, saj je (T_j, x_j) pritrdljivo drevo. Zgodi se lahko še, da dominator v nekem T_j odigra dve ali več potez zapored, kar pomeni, da se na tem poddrevesu igra različica igre, v kateri zavlačevalka lahko izpusti poljubno število potez. Po trditvi 2.3 je v taki igri odigranih največ toliko potez kot v navadni igri, ko zavlačevalka ne izpusti nobene poteze.

Če je zavlačevalka tista, ki prva igra potezo v poddrevesu T_j, potem obravnavamo dva primera glede na to potezo. Če je bila ta poteza optimalna v igri, zoženi na T_j, in to ni bila poteza na x_j, potem dominator odgovori s potezo na x_j. To je seveda optimalno v T_j, saj je (T_j, x_j) posebno pritrdljivo drevo. V primeru, ko zavlačevalka izbere x_j v omenjeni potezi, dominator odgovori z neko optimalno potezo v T_j.

Predpostavimo sedaj, da zavlačevalkina prva poteza v T_j ni optimalna v igri, zoženi na T_j, (je pa seveda optimalna v igri na celotnem grafu). Potem dominator odgovori z optimalno potezo, ki mu zagotavlja, da bodo po $\gamma_g(T_j) - 1$ potezah vsa vozlišča poddrevesa T_j dominirana. Tudi če zavlačevalka nato igra na x_j, bo na T_j odigranih največ $\gamma_g(T_j)$ potez.

Sledi, da dominator s svojo strategijo lahko zagotovi, da je na vsakem poddrevesu T_j odigranih največ $\gamma_g(T_j)$ potez, s čimer je dokaz končan. ∎

Enostavno je preveriti, da imata P_5 in F posebno lastnost, prav tako kot jo imata tudi $T_7^3[P_5, P_5]$ in $T_7^4[P_5, P_5]$. Za primer pritrdljivega drevesa, ki ni posebno, pa si poglejmo spodnjo desno drevo T na sliki 5.4. Naj bo x vozlišče stopnje 3 na T in y vozlišče, ki je na razdalji 5 od x. Preverimo lahko, da je (T, x) pritrdljivo drevo. Po drugi strani pa je v igri odigranih 13 potez, če dominator, v primeru, ko zavlačevalka igra y v prvi potezi, odgovori s potezo na x.

5.4 Vsa 3/5 drevesa na kvečjemu 20 vozliščih

Z uporabo računalnika smo poiskali vsa 3/5-drevesa na $5k$ vozliščih za vsak $k = 1, \ldots, 4$. Vsakega od njih lahko dobimo z eno izmed konstrukcij, predstavljenimi v prejšnjih podpoglavjih. Nekatera od njih dobimo na več načinov.

Edino 3/5-drevo na petih vozliščih je P_5, ki ga lahko zapišemo tudi kot $T_5^3[\,]$.

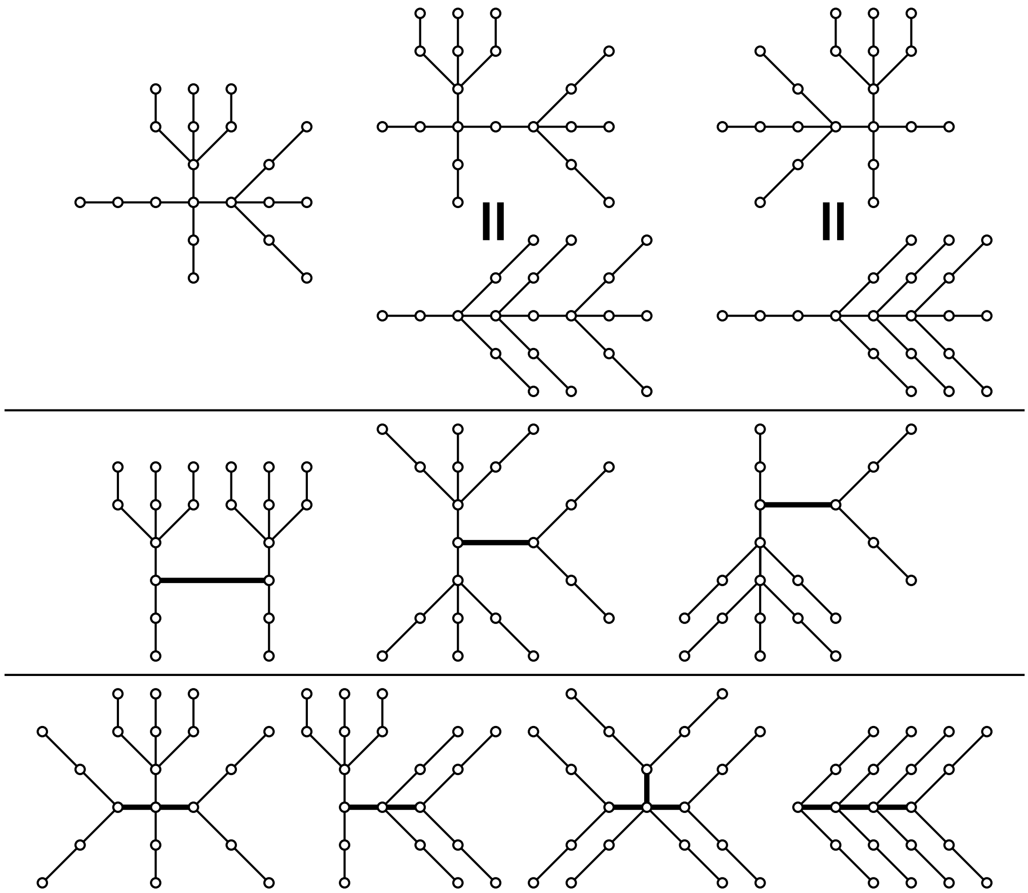
Na desetih vozliščih obstajata dve 3/5-drevesi. Prvo drevo so vilice, ki jih lahko zapišemo tudi kot $T_6^3[P_5]$. Drugo pa je drevo, ki ga dobimo tako, da povežemo centralni vozlišči x in x' dveh kopij P_5, tj. graf $K_2[P_5[x], P_5[x']]$. S poenostavljenimi oznakami ga lahko zapišemo kot $K_2[P_5, P_5]$. Od sedaj naprej bomo vse grafe pisali z poenostavljenimi oznakami, pri čemer bosta P_5 in F vedno pripeta z vozliščem a_i s slike 5.1.

Na petnajstih vozliščih so štiri 3/5-drevesa, in sicer so to

$$S = K_2[F, P_5], \quad P_3[P_5, P_5, P_5], \quad T_7^4[P_5, P_5] \quad \text{in} \quad T_7^3[P_5, P_5] = T_6^3[F].$$

Drevo S je narisano na sliki 5.3.

Vseh deset 3/5-dreves na dvajsetih vozliščih je narisanih na sliki 5.4. V prvi vrsti so narisana drevesa, ki jih lahko skonstruiramo kot T_k^ℓ drevesa. Ta so $T_7^3[F, P_5]$, $T_7^4[F, P_5]$ in $T_7^3[P_5, F]$, pri čemer lahko zadnji dve izrazimo tudi kot $T_8^5[P_5, P_5, P_5]$ in $T_8^3[P_5, P_5, P_5]$. Preostala drevesa, z izjemo spodnjega desnega, lahko dobimo s pomočjo izreka 5.8, kjer je graf z univerzalnim vozliščem (K_2 trikrat, $K_{1,2}$ dvakrat in $K_{1,3}$ enkrat) označen s krepkim. Nazadnje pa je spodnje desno drevo dobljeno iz grafa P_4 s pomočjo izreka 5.11.



Slika 5.4: Vsa 3/5-drevesa na 20 vozliščih

Opazimo še, da lahko drevo $K_2[F, F]$ (na sliki 5.1 v sredini levo) dobimo tako, da drevesu $T_6^4[S]$ s slike 5.3 odstranimo povezavo $a_i a_i'$ in dodamo povezavo $a_i' x$. Omenjeni drevesi sta si torej zelo podobni, vendar pa je $\gamma_g(T_6^4[S]) = 11$, medtem ko je

$\gamma_g(K_2[F,F]) = 12$.

V nadaljevanju bomo predstavili še računalniški pristop k problemu. Pri iskanju 3/5-dreves smo uporabili grafe Brendana McKaya [33]. Za igračun igralnih dominacijskih števil vseh dreves na $5, 10, 15$ in 20 vozliščih pa smo uporabili naslednji algoritem. Za vsak graf G in $S \subseteq V(G)$ bomo uporabili rekurzivni formuli

$$\gamma_g(G|S) = 1 + \min\{\gamma_g'(G|S \cup N[v]) \mid v \text{ ni nasičeno}\}\,, \tag{5.1}$$

$$\gamma_g'(G|S) = 1 + \max\{\gamma_g(G|S \cup N[v]) \mid v \text{ ni nasičeno}\}\,. \tag{5.2}$$

Za vsako množico vozlišč S si zapomnimo $\gamma_g(G|S)$, če je na potezi dominator, oziroma $\gamma_g'(G|S)$, če je na potezi zavlačevalka. Na vsakem koraku potem preverimo, če že poznamo igralno dominacijsko število za določen S. Če ga ne poznamo, izberemo nenasičeno vozlišče in uporabimo eno izmed rekurzivnih enačb (5.1) in (5.2). Algoritem se konča, ko so pregledane vse možne poteze obeh igralcev. Vrnjeni rezultat je enak $\gamma_g(G) = \gamma_g(G|\{\ \})$ oziroma $\gamma_g'(G) = \gamma_g'(G|\{\ \})$.

Spodaj je še psevdokoda opisanega algoritma.

```
Postopek IDŠ(igra, G, S):
G graf,
S množica dominiranih vozlišč
  če S == V(G):  vrni 0
  če igra == 1 in γ_g(G|S) je znano:  vrni γ_g(G|S)
  sicer če igra == 2 in γ'_g(G|S) je znano:  vrni γ'_g(G|S)
  sicer:
     števila = prazen seznam
     za vsako vozlišče v ∈ V(G):
        če v ni nasičen:
           dodaj 1+IDŠ(3-igra, G, S ∪ N[v]) k številom
     če igra == 1:  zapomni si γ_g(G|S) = min(števila)
     sicer:  zapomni si γ'_g(G|S) = max(števila)
```

Poglavje 6

Dominacijska igra na grafih z odvzeto povezavo/vozliščem

V tem poglavju nas bosta zanimala dva klasična problema teorije grafov. Kadarkoli študiramo invariante grafov, nas zanima, kako se invariante spreminjajo, če grafu odvzamemo povezavo ali vozlišče. Najprej se bomo ukvarjali z naslednjim vprašanjem.

Vprašanje 3 *Za koliko se lahko spremeni igralno dominacijsko število grafa, če mu odvzamemo eno povezavo?*

Nato pa bomo v drugem razdelku odgovorili še na sledeče vprašanje.

Vprašanje 4 *Za koliko se lahko spremeni igralno dominacijsko število grafa, če mu odvzamemo eno vozlišče?*

6.1 Z odvzeto povezavo

Očitno je, da se dominacijsko število grafa G ne zmanjša, če grafu odstranimo povezavo e, tj. $\gamma(G - e) \geq \gamma(G)$ (več o tem v [37]), kar pa ni res v primeru igralnega dominacijskega števila.

Izrek 6.1 *Za vsak graf G in povezavo $e \in E(G)$ velja*

$$|\gamma_g(G) - \gamma_g(G-e)| \leq 2 \quad \textit{in} \quad |\gamma_g'(G) - \gamma_g'(G-e)| \leq 2\,.$$

Dokaz: Za dokaz $\gamma_g(G-e) \leq \gamma_g(G)+2$ je dovolj pokazati, da ima dominator strategijo, ki mu zagotovi, da je v igri na $G-e$ odigranih največ $\gamma_g(G)+2$ potez. Dominator uporablja strategijo namišljene igre na G, medtem ko se dejanska igra odvija na $G-e$. Naj bo $e = uv$. Obravnavamo naslednje situacije.

Predpostavimo najprej, da nobeden izmed igralcev ne izbere ne vozlišča u ne v. To pomeni, da so vse poteze v obeh igrah legalne, od koder sledi, da skupno število potez v dejanski igri na $G-e$ ni večje od $\gamma_g(G)$. Neenakost dobimo zaradi dejstva, da so bile dominatorjeve poteze na G optimalne, zavlačevalkine pa ne nujno. Ker se igri končata istočasno, zaključimo, da je $\gamma_g(G-e) \leq \gamma_g(G)$.

Denimo sedaj, da dominator v namišljeni igri na G naredi potezo na u, ki ni legalna v dejanski igri. To se lahko zgodi samo v primeru, ko je dominator s svojo potezo s pomočjo povezave e dominiral samo vozlišče v. V tem primeru namesto te poteze dominator lahko igra na v, saj po principu nadaljevanja to ni nikoli slabša poteza. Residualna grafa sta sedaj v obeh igrah enaka, od koder tudi v tem primeru sledi, da je $\gamma_g(G-e) \leq \gamma_g(G)$.

Nazadnje predpostavimo, da je eden izmed igralcev naredil potezo na vozlišče, incidenčno e, pri čemer je ta poteza legalna v obeh igrah. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je igrano vozlišče u. Zaradi te poteze je vozlišče v dominirano v namišljeni igri G, ne pa tudi v dejanski igri na $G-e$. Če so v nadaljevanju vse poteze v dejanski igri legalne, so po največ $\gamma_g(G)$ potezah dominirana vsa vozlišča razen mogoče vozlišča v. Ker je za dokončanje igre mogoče potrebna še ena poteza, dobimo $\gamma_g(G-e) \leq \gamma_g(G)+1$. Sicer pa je zavlačevalka v dejanski igri naredila potezo na v, ki je dominirala le v, kar pomeni, da to ni legalna poteza v namišljeni igri. Naj bo to k-ta poteza na $G-e$. Po opisani zavlačevalkini potezi sta množici dominiranih vozlišč v obeh igrah enaki. Označimo to množico z D. Ker je po $k-1$ potezah zavlačevalka na vrsti v namišljeni igri, dobimo

$$(k-1) + \gamma_g'(G|D) \leq \gamma_g(G)\,, \tag{6.1}$$

pri čemer dobimo neenačaj iz dejstva, da zavlačevalkina strategija v namišljeni igri ni nujno optimalna. Ker zavlačevalkina poteza ni legalna v namišljeni igri, si dominator te poteze ne more zamisliti v namišljeni igri. Njegova strategija je, da igra optimalno naprej. Ker je preostalo število potez v dejanski igri enako $\gamma_g((G-e)|D) = \gamma_g(G|D)$, dobimo

$$\begin{aligned} \gamma_g(G-e) &\leq k + \gamma_g((G-e)|D) \\ &= k + \gamma_g(G|D) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= k + \gamma_g'(G|D) + 1 \quad \text{(po izreku 1.2)} \\
&= \gamma_g(G) + 2 \quad \text{(iz neenakosti (6.1))}\,.
\end{aligned}
$$

S tem smo dokazali, da velja $\gamma_g(G-e) \leq \gamma_g(G)+2$. Opazimo še, da v dokazu noben argument ni slonel na različici igre, zato velja podobna neenakost tudi v primeru igre 2, tj. $\gamma_g'(G-e) \leq \gamma_g'(G)+2$.

V preostanku dokaza naj bo $A = N_G[u]$.

Naslednja neenakost, ki jo želimo dokazati, je $\gamma_g(G) \leq \gamma_g(G-e)+2$. Če dominator v svoji prvi potezi izbere u, dobimo

$$
\begin{aligned}
\gamma_g(G) &= 1 + \gamma_g'(G|A) \\
&= 1 + \gamma_g'((G-e)|A) \\
&\leq 1 + \gamma_g'(G-e) \quad \text{(po pricipu nadaljevanja)} \\
&\leq \gamma_g(G-e) + 2 \quad \text{(po izreku 1.2)}\,,
\end{aligned}
$$

pri čemer enakost v zgornjem računu drži, ker sta vozlišči u in v obe v A (torej povezave e ni v residualnem grafu $G|A$) in posledično e ne igra nobene vloge v nadaljevanju igre.

Preostane dokazati še, da je $\gamma_g'(G) \leq \gamma_g'(G-e)+2$. Če zavlačevalka v svoji prvi potezi igra eno izmed krajišč povezave e, recimo na u, dobimo

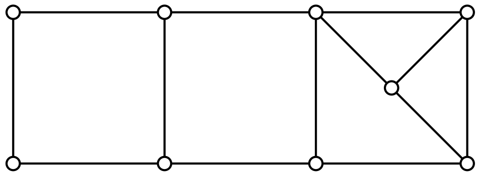
$$
\begin{aligned}
\gamma_g'(G) &\leq 1 + \gamma_g(G|A) \\
&= 1 + \gamma_g((G-e)|A) \\
&\leq 1 + \gamma_g(G-e) \quad \text{(po principu nadaljevanja)} \\
&\leq \gamma_g'(G-e) + 2 \quad \text{(po izreku 1.2)}
\end{aligned}
$$

V primeru, ko zavlačevalka v prvi potezi izbere x, ki je različen od u in v, dominator odgovori s potezo na u. Od tu potem sledi

$$
\begin{aligned}
\gamma_g'(G) &= 1 + \gamma_g(G|N[x]) \\
&\leq 2 + \gamma_g'(G|(N[x] \cup A)) \\
&= 2 + \gamma_g'((G-e)|(N[x] \cup A)) \\
&\leq \gamma_g'(G-e) + 2 \quad \text{(po principu nadaljevanja)}\,.
\end{aligned}
$$

■

V preostanku razdelka bomo pokazali, da so vse vrednosti iz izreka 6.1 dosežene. Za vsak možen primer bomo predstavili neskončne družine povezanih grafov. V konstrukcijah bosta pogosto nastopala grafa C_6 in Z. Slednji je narisan na sliki 6.1. Hitro lahko preverimo, da za C_6 velja $\gamma_g(C_6) = 3 = \gamma_g(C_6|y)$ in $\gamma_g'(C_6) = 2 = \gamma_g'(C_6|y)$ za poljubno vozlišče y iz C_6, medtem ko za Z velja $\gamma_g(Z) = 4 = \gamma_g(Z|z)$ in $\gamma_g'(Z) = 3 = \gamma_g'(Z|z)$, kjer je z vozlišče Z, označeno na sliki 6.1.



Slika 6.1: Graf Z

Naslednja lema bo koristna pri iskanju družin, ki realizirajo vrednosti iz zgornjega izreka.

Lema 6.2 *Naj bo $G_1|S_1$ delno dominiran gozd, ki realizira par $(2k, 2k)$ in $G_2|S_2$ delno dominiran graf. Potem velja*

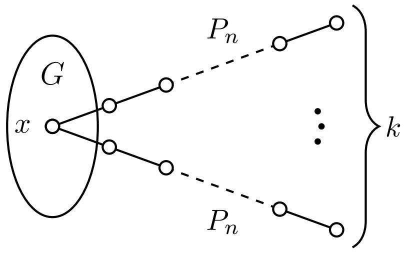
$$\gamma_g((G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2)) = 2k + \gamma_g(G_2|S_2) \quad \textit{in} \quad \gamma_g'((G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2)) = 2k + \gamma_g'(G_2|S_2)\,.$$

Dokaz: Najprej opazimo, da v igri na G_1 nikoli ne more priti do različice igre, ko eden izmed igralcev izpusti kakšno potezo, če (vsaj) eden izmed igralcev uporablja strategijo sledenja. Igralec, ki uporablja omenjeno strategijo, bodisi naredi zadnjo potezo na G_1, bodisi je igra na G_2 že končana in naredi na G_1 prvo potezo. V obeh primerih se na G_2 igra normalna različica igre. Poleg tega lahko igralec, ki je na vrsti drugi, zagotovi, da na G_2 prvo potezo naredi začetni igralec, če oba igrata optimalno na G_1, saj začetnemu igralcu ves čas sledi na G_1, dokler ta ne igra v G_2.

Dokažimo sedaj enakost za γ_g. Dominator najprej igra na G_2, nato pa uporablja strategijo sledenja. Ker v igri na G_2 nobeden izmed igralcev ne izpusti poteze, je na G_2 odigranih največ $\gamma_g(G_2|S_2)$ potez. V igri na G_1 se lahko zgodi, da zavlačevalka izpusti eno potezo (lahko tudi prvo), kar pomeni, da na G_2 odigrata največ $\gamma_g'^{sp}(G_1|S_1)$ potez. Po trditvi 2.3 in predpostavkah sledi, da velja $\gamma_g((G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2)) \leq 2k + \gamma_g(G_2|S_2)$. Podobno dokažemo tudi spodnjo mejo, pri čemer zavlačevalka zagotovi, da prvo potezo na G_2 naredi dominator. S tem si zagotovi, da je na G_2 odigranih vsaj $\gamma_g(G_2|S_2)$ potez, medtem ko je na G_1 potrebnih $\gamma_g^{dp}(G_1|S_1)$ potez. Sledi, da velja $\gamma_g((G_1 \cup G_2)|(S_1 \cup S_2)) \geq 2k + \gamma_g(G_2|S_2)$.

Povsem analogno gre dokaz v primeru igre, ko začne zavlačevalka. ∎

V konstrukcijah družin grafov bomo pogosto na določeno vozlišče pripenjali poti enake dolžine, zato vpeljemo naslednjo oznako. Naj bo G graf in x njegovo vozlišče. Potem z $P_n^k[G[x]]$, $n \geq 1$ in $k \geq 0$, označimo graf, ki ga dobimo iz G tako, da identificiramo x z enim izmed listov na vsaki izmed k poti reda n, glej sliko 6.2.



Slika 6.2: Konstrukcija grafa $P_n^k[G[x]]$

6.1.1 $\gamma_g(G) - \gamma_g(G-e) = -2$

Najprej si poglejmo grafe, ki imajo igralno dominacijsko število strogo manjše kot 3. V tem primeru graf z lastnostjo iz naslova razdelka ne obstaja.

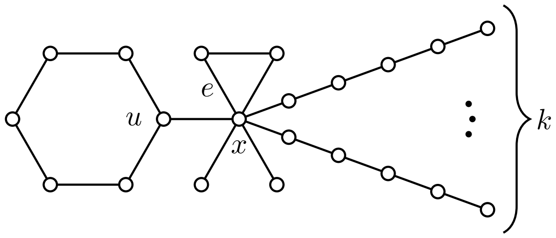
Trditev 6.3 *Naj bo G graf in e njegova povezava. G. Če je $\gamma_g(G) < 3$, potem velja $\gamma_g(G) - \gamma_g(G-e) \geq -1$.*

Dokaz: Če je $\gamma_g(G) = 1$, potem G vsebuje univerzalno vozlišče v. V igri na $G-e$ si potem dominator lahko zagotovi, da sta odigrani največ dve potezi. Če v prvi potezi izbere v, v residualnem grafu ostane nedominirano največ eno vozlišče, za katerega je potrebna še največ ena poteza. Dobimo torej, da je $\gamma_g(G-e) \leq 2$.

Naj bo sedaj $\gamma_g(G) = 2$ in naj bo d_1 dominatorjeva optimalna prva poteza na G. Potem je residualni graf $G|N[d_1]$ enak polnemu grafu, saj zavlačevalka v nasprotnem ne bi zaključila igre s svojo potezo. Dominatorjeva strategija na $G-e$ je odigrati d_1 v prvi potezi. Residualni graf je nato enak bodisi polnemu grafu brez ene povezave bodisi uniji polnega grafa in K_1 ali K_2 z enim dominiranim vozliščem. V obeh primerih sta za dokončanje igre potrebni dve potezi. Torej velja $\gamma_g(G) - \gamma_g(G-e) \geq -1$. ∎

Trditev 6.4 *Za vsak $\ell \geq 3$ obstaja graf G s povezavo e, za katerega velja $\gamma_g(G) = \ell$ in $\gamma_g(G-e) = \ell + 2$.*

Dokaz: Predstavili bomo dve neskončni družini grafov, U_k in V_k, ki realizirata lihe in sode ℓ. Naj bo B graf, ki ga dobimo tako, da grafu $K_{1,4}$ dodamo poljubno povezavo. Njegovo centralno vozlišče označimo z x. Naj bo U_0 graf, ki je dobljen iz disjunktne unije grafov C_6 in B tako, da povežemo poljubno vozlišče u 6-cikla in x iz B. Na koncu za vsak $k \geq 1$ definiramo še $U_k = P_6^k[G[x]]$, glej sliko 6.3.



Slika 6.3: Graf U_k

Dokazali bomo, da je $\gamma_g(U_k) = 2k+3$ in $\gamma_g(U_k - e) = 2k+5$, kjer je e ena izmed povezav, incidenčnih x, za katero graf $U_k - e$ ostane povezan. Po izreku 6.1 zadostuje dokazati, da velja $\gamma_g(U_k) \leq 2k+3$ in $\gamma_g(U_k - e) \geq 2k+5$. Enostavno je preveriti, da U_0 realizira par $(3,4)$, $U_0 - e$ pa par $(5,5)$.

Za prvo neenakost potrebujemo dominatorjevo strategijo. V prvi potezi igra na x. Potem po izreku 2.10 in lemi 6.2 sledi

$$\gamma_g(U_k) \leq 1 + \gamma_g'((C_6|u) \cup \bigcup_{i=1}^{k} P_4') = 1 + \gamma_g'(C_6|u) + \gamma_g(P_4') \cdot k = 1 + 2 + 2k = 2k+3\,.$$

Za dokaz druge neenakosti potrebujemo zavlačevalkino strategijo. Na vseh podgrafih, C_6, $B - e$ in k kopijah P_6, uporablja strategijo odgovarjanja. Kadar zavlačevalka ne more igrati v isti podgraf kot dominator pred njo, poišče prvi nedominiran podgraf in odigra v njem v naslednjem vrstnem redu: $B - e$, ena izmed kopij P_6, C_6. Torej, zavlačevalka igra v $B - e$, razen če je $B - e$ že popolnoma dominiran. Potem igra v eno izmed kopij P_6, razen v primeru, če so vse že dominirane. Takrat igra v C_6, ali pa je igre že konec. Če dominator prvi igra na C_6, potem so na tem podgrafu narejene vsaj tri poteze. Ker sta na vsakem izmed ostalih podgrafov potrebni vsaj dve potezi, velja $\gamma_g(U_k - e) \geq 2k+5$. V nasprotnem primeru, ko je zavlačevalka tista, ki prva naredi potezo na C_6, sledi, da so podgrafi $B - e$ in vse kopije P_6 že dominirani. Ker je na vrsti zavlačevalka, sledi, da so bile na enem izmed dominiranih podgrafov odigrane vsaj 3 poteze. Na C_6 sta potem potrebni še dve. Skupaj dobimo, da je bilo na $U_k - e$ odigranih vsaj $2k+5$ potez. S tem smo zaključili dokaz za lihe ℓ.

Za primer, ko je ℓ sod, skonstruiramo družino V_k tako, da v U_k namesto 6-cikla uporabimo Z s slike 6.1. Natančneje, graf V_0 dobimo iz disjunktne unije grafov Z in B tako, da povežemo z iz Z in x iz B. Na koncu za $k \geq 1$ definiramo $V_k = P_6^k[V_0[x]]$. Z enakimi argumenti kot zgoraj dobimo $\gamma_g(V_k) = 2k + 4$ in $\gamma_g(V_k - e) = 2k + 6$. ■

6.1.2 $\gamma_g(G) - \gamma_g(G - e) = -1$

Naj bo T drevo z lastnostjo $\gamma_g(T) = \ell$, kjer $\ell \geq 1$, in naj bo izbira v dominatorjeva optimalna prva poteza v igri 1. Z G_ℓ označimo graf, ki ga dobimo iz drevesa T tako, da vozlišču v dodamo dva lista in v identificiramo z enim izmed vozlišč trikotnika. Očitno velja $|V(G_\ell)| = |V(T)| + 4$. Naj bo e povezava trikotnika s krajiščem v v in naj bo y drugo krajišče te povezave. Po principu nadaljevanja dominator nikoli ne igra na nobeno izmed štirih dodanih vozlišč (namesto tega lahko igra na v). Vozlišče v je torej dominatorjeva optimalna izbira tudi v igri 1 na G_ℓ, od koder sledi, da je $\gamma_g(G_\ell) = \ell$.

Za dokaz $\gamma_g(G_\ell - e) \leq \ell - 1$ podamo dominatorjevo strategijo. Dominator najprej igra na v, nato pa igra na y le v primeru, ko je to edina legalna poteza. Če zavlačevalka igra na y ali njegovega soseda, dominator naredi dve zaporedni potezi na T, kar mu po trditvi 2.3 ne škoduje. Sledi, da je na $T|N[v]$ odigranih vsaj $\ell - 1$ potez, medtem ko potrebujeta eno potezo, da dominirata soseda od y. Če seštejemo vse poteze, dobimo, da velja $\gamma_g(G_\ell - e) \leq \ell + 1$. Dokazati moramo še $\gamma_g(G_\ell - e) \geq \ell + 1$. Zavlačevalka vedno igra v T, razen ko je celoten T dominiran. Zgodi se lahko, da dominator igra na y in zato naredi zavlačevalka dve zaporedni potezi na T, kar ji po trditvi 2.3 ne škoduje. Sledi torej, da je na T odigranih vsaj ℓ potez, poleg tega pa je potrebna še vsaj ena poteza za dominacijo soseda od y. S tem smo pokazali še, da velja $\gamma_g(G_\ell - e) \geq \ell + 1$.

6.1.3 $\gamma_g(G) - \gamma_g(G - e) = 0$

Iz izrekov 3.1 in 3.2 sledi, da je $\gamma_g(C_n) = \gamma_g(P_n) = \gamma_g(C_n - e)$ za vsak $n \geq 3$.

6.1.4 $\gamma_g(G) - \gamma_g(G - e) = 1$

Naslednja lema nam pove, da graf G s povezavo e in $\gamma_g(G) = 2$, za katerega velja $\gamma_g(G) - \gamma_g(G - e) = 1$, ne obstaja.

Lema 6.5 *Naj bo G graf in e njegova povezava. Če je $\gamma_g(G) \geq 2$, potem velja $\gamma_g(G - e) \geq 2$. Še več, če je $\gamma_g(G) \geq 4$, velja $\gamma_g(G - e) \geq 3$.*

Dokaz: Iz izreka 1.3 dobimo $\gamma_g(G) \leq 2\gamma(G) - 1$ oziroma $\gamma(G) \geq \frac{\gamma_g(G)+1}{2}$. Ker se dominacijsko število z odstranjevanjem povezav nikoli ne zmanjša, sledi

$$\gamma_g(G - e) \geq \gamma(G - e) \geq \gamma(G) \geq \left\lceil \frac{\gamma_g(G) + 1}{2} \right\rceil .$$

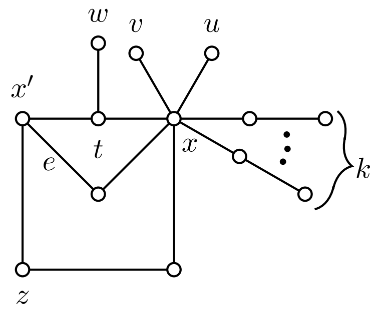
Če v neenakost vstavimo $\gamma_g(G) = 2, 3, 4$, dobimo želen rezultat. ∎

V splošnem primeru pa lahko za vsak $\ell \geq 3$ poiščemo tak graf in povezavo, da je enakost iz naslova razdelka izpolnjena.

Trditev 6.6 *Za vsak $\ell \geq 3$ obstaja graf G s povezavo e, za ki ga velja $\gamma_g(G) = \ell$ in $\gamma_g(G - e) = \ell - 1$.*

Dokaz: Za primer, ko je $\ell = 3$, si poglejmo graf, ki ga dobimo tako, da vzamemo dva polna grafa z vsaj tremi vozlišči in med njiju dodamo dve povezavi tako, da tvorita prirejanje v celotnem grafu. Očitno je igralno dominacijsko število dobljenega grafa enako 3. Če odstranimo eno izmed dodanih povezav, igralno dominacijsko število pade na 2.

Za splošen primer, ko je $\ell \geq 4$, skonstruiramo družino grafov Y_k, $k \geq 0$, na naslednji način. Naj bo t poljubno vozlišče C_5 in x ter x' njegova soseda na C_5. Graf Y_0 dobimo tako, da vozlišču t pripnemo enega, vozlišču x pa dva lista, ter dodamo vozlišče y, katerega povežemo z x in x'. Na koncu definiramo $Y_k = P_3^k[Y_0[x]]$ za $k \geq 1$, glej sliko 6.4. Trdimo, da velja $\gamma_g(Y_k) = k + 4$ in $\gamma_g(Y_k) = k + 3$, kjer je povezava $e = x'y$ s slike 6.4.



Slika 6.4: Graf Y_k

Če dominator v prvi potezi na Y_k izbere x, ostane nedominiranih zgolj $k+3$ vozlišč, od koder že sledi, da je $\gamma_g(Y_k) \leq k + 4$. Za dokaz obratne neenakosti potrebujemo zavlačevalkino strategijo.

Če dominator v prvi potezi izbere x, zavlačevalka igra na y. Potem v igri ostane še $k+2$ nedominiranih vozlišč in noben par nedominiranih vozlišč nima skupnega soseda. Torej je potrebnih še $k+2$ potez, kar pomeni, da je skupaj odigranih $k+4$ potez. V primeru, ko dominator ne izbere vozlišča x v prvi potezi, potem zavlačevalka igra na enega izmed listov, ki je soseden vozlišču x, recimo na u. Sledi, da na podgrafu, izomorfnem Y_0, skupaj odigrata vsaj štiri poteze (dominirati je potrebno še vsaj dve izmed vozlišč v, w, z), medtem ko za vsako od poti potrebujeta vsaj eno potezo. Skupaj bo torej odigranih vsaj $k+4$ potez, od koder lahko zaključimo, da velja $\gamma_g(Y_k) \geq k+4$.

Podobno kot zgoraj dominator v prvi potezi na $Y_k - e$ izbere vozlišče x. Če zavlačevalka v naslednji potezi dominira vsaj dve novi vozlišči, potem ostane na grafu največ $k+1$ nedominiranih vozlišč. V nasprotnem, če zavlačevalka dominira natanko eno novo vozlišče, dominator lahko igra na t ali x' in s tem dominira dve novi vozlišči. V obeh primerih sledi, da je na $Y_k - e$ skupaj potrebnih največ $k+3$ potez, tj. $\gamma_g(Y_k - e) \leq k+3$.

Preostane dokazati še spodnjo mejo za $Y_k - e$. Če dominator v svoji prvi potezi igra na x, zavlačevalka izbere t. V preostanku je potem še $k+1$ nedominiranih vozliščih, od katerih noben par nima skupnega soseda. Torej je v tem primeru skupaj potrebnih $k+3$ potez. V primeru, ko dominator ne igra na x v prvi potezi, zavlačevalka igra na list soseden vozlišču x. Ker morata odigrati še vsaj tri poteze na podgrafu, izomorfnem Y_0, in eno potezo na vsaki izmed pritrjenih poti, dobimo, da je $\gamma_g(Y_k - e) \geq k+3$. ■

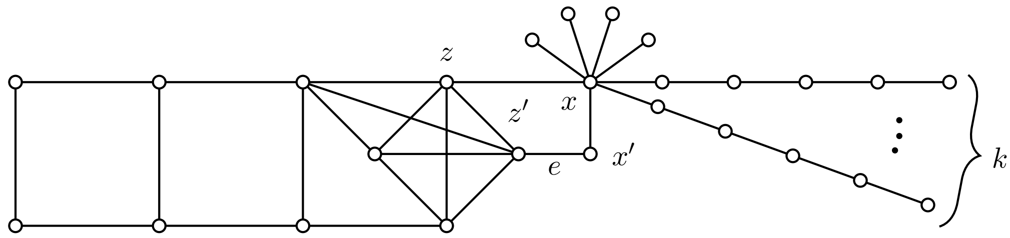
6.1.5 $\gamma_g(G) - \gamma_g(G-e) = 2$

Po lemi 6.5 sledi, da graf G s povezavo e, za katerega velja $\gamma_g(G) = \ell$ in $\gamma_g(G-e) = \ell-2$, ne obstaja za noben $\ell \leq 4$.

Trditev 6.7 *Za vsak $\ell \geq 5$ obstaja graf G s povezavo e, za katerega velja $\gamma_g(G) = \ell$ in $\gamma_g(G-e) = \ell - 2$.*

Dokaz: Predstavili bomo družini X_k in Q_k, ki bosta realizirali sode in lihe ℓ. Za prvo bomo navedli podroben dokaz, medtem ko je dokaz pri drugi analogen.

Graf X_0 skonstruiramo na naslednji način. Najprej dodamo dvojčka z' vozlišča z v Z (glej sliko 6.1) in označimo dobljen graf z Z'. Graf X_0 nato dobimo iz disjunktne unije grafov Z' in $K_{1,5}$ tako, da povežemo vozlišče z s centralnim vozliščem grafa $K_{1,5}$, označenim z x, ter vozlišče z' z enim izmed listov grafa $K_{1,5}$, ki ga označimo z x'. Na koncu definiramo $X_k = P_6^k[X_0[x]]$ za $k \geq 1$, glej sliko 6.5. Z e označimo povezavo med z' in x'.



Slika 6.5: Graf X_k

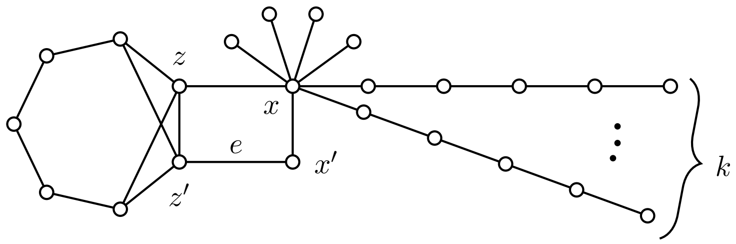
Dokazali bomo, da velja $\gamma_g(X_k) = 2k+6$ in $\gamma_g(X_k - e) = 2k+4$. Po izreku 6.1 zadostuje dokazati neenakosti $\gamma_g(X_k - e) \leq 2k+4$ in $\gamma_g(X_k) \geq 2k+6$. Za prvo potrebujemo dominatorjevo strategijo na $X_k - e$. V prvi potezi izbere x. Ker je residualni graf enak disjunktni uniji $(Z'|u) \cup P_4' \cup \cdots \cup P_4'$, po izreku 2.10 in lemi 6.2 dobimo

$$\gamma_g(X_k - e) \leq 1 + \gamma_g'((Z'|z) \cup \bigcup_{i=1}^{k} P_4') = 1 + \gamma_g'(Z'|z) + \gamma_g(P_4') \cdot k = 1 + 3 + 2k = 2k + 4\,,$$

pri čemer $\gamma_g'(Z'|z) = \gamma_g'(Z|z) = 3$ sledi iz leme 4.2.

Za dokaz druge neenakosti potrebujemo zavlačevalkino strategijo na X_k. Zaradi principa nadaljevanja lahko predpostavimo, da dominator nikoli ne igra na list, soseden vozlišču x, saj je igranje na x kvečjemu bolje zanj. Kadarkoli dominator igra na eno izmed k pripetih poti, zavlačevalka igra na isto pot tako, da so po njeni potezi vsa vozlišča na tej poti, ki ležijo na razdalji vsaj 2 od x, dominirana. Če dominator izbere enega izmed x in x', zavlačevalka, če je to mogoče, igra na drugega. Opisana zavlačevalkina poteza ni legalna, kadar sta vozlišči z in z' dominirani pred dominatorjevo potezo na x. S to strategijo si zavlačevalka zagotovi, da je dominator tisti, ki prvi igra na Z'. Denimo, da sta vozlišči x in x' izbrani pred dominatorjevo prvo potezo na Z'. Ker je $\gamma_g(Z|\{z,z'\}) = 4$, sledi, da so na Z' odigrane vsaj 4 poteze, kar se skupaj z $2k$ potezami na poteh in potezama na x in x' sešteje v $2k+6$. V primeru, ko x in x' nista bila izbrana pred dominatorjevo prvo potezo na Z', zavlačevalka na to odgovori z izbiro enega izmed listov, sosednih x. Če je naslednja dominatorjeva poteza, ki ni odigrana na eni izmed poti, odigrana ponovno na Z', potem zavlačevalka ponovno izbere enega izmed listov, ki je soseden z x. Ker je $\gamma(Z') = 3$, sledi, da sta nedominirana še dva lista, sosedna x, in vsaj eno vozlišče na Z'. V primeru, da je vozlišče z nedominirano, je nedominirano tudi vozlišče z' ($N_{Z'}[z] = N_{Z'}[z']$). Od tod sledi, da je tako na Z' kot na $K_{1,5}$ potrebna še vsaj ena poteza. Skupaj z $2k$ potezami na poteh sledi, da igralca potrebujeta vsaj $2k+6$ potez, da dokončata igro. V primeru, ko je naslednja dominatorjeva poteza, ki ni igrana na eni izmed poti, odigrana na x, zavlačevalka igra na Z', s čimer si zagotovi vsaj štiri poteze na Z'. Sledi, da je tudi v tem primeru potrebnih vsaj $2k+6$ potez za dokončanje igre na X_k. Dodajmo še, da v primeru, da je zavlačevalka prisiljena igrati na eno izmed poti, naredi tako potezo, da sta na tej poti odigrani 2 potezi. S tem smo zaključili dokaz za primer, ko je ℓ sod.

Družino Q_k, ki realizira primer za vsak lihi ℓ, skonstruiramo na naslednji način. Poljubnemu vozlišču z grafa C_6 dodamo dvojčka z' in dobljeni graf označimo z Z''. Graf Q_0 nato dobimo iz disjunktne unije grafov Z'' in $K_{1,5}$ tako, da povežemo vozlišče z s centralnim vozliščem grafa $K_{1,5}$, označenim z x, ter vozlišče z' z enim izmed listov grafa $K_{1,5}$, ki ga označimo z x'. Na koncu definiramo $Q_k = P_6^k[Q_0[x]]$ za $k \geq 1$, glej sliko 6.6. Z e označimo povezamo med vozliščema x' in z'. Kot smo napovedali že na začetku, so argumenti v dokazu enakosti $\gamma_g(Q_k) = 2k+5$ in $\gamma_g(Q_k - e) = 2k+3$ enaki kot v zgornjem primeru. V posebnem, ko je zavlačevalka prisiljena igrati prva na eno izmed pritrjenih poti (če je liho število potez odigranih v Z''), izbere tako vozlišče, da sta na tej poti potrebni dve potezi.



Slika 6.6: Graf Q_k

■

6.1.6 $\gamma'_g(G) - \gamma'_g(G-e) = -2$

Podobno kot v podpoglavju 6.1.2 lahko preverimo, da za vsak $k \geq 0$ velja $\gamma'_g(U_k) = 2k+4$ ter $\gamma'_g(U_k - e) = 2k+6$ in $\gamma'_g(V_k) = 2k+5$ ter $\gamma'_g(V_k - e) = 2k+7$. Omenimo le, da je zavlačevalkina optimalna prva poteza izbira lista, sosednjega vozlišču x.

Trditev 6.8 *Za vsak $\ell \geq 4$ obstaja graf G s povezavo e, za katerega velja $\gamma'_g(G) = \ell$ in $\gamma'_g(G-e) = \ell + 2$.*

Za vse manjše vrednosti γ_g' graf z lastnostjo iz zgornje trditve ne obstaja.

Trditev 6.9 *Naj bo G graf in e njegova povezava. Če je $\gamma_g'(G) < 4$, potem velja $\gamma_g'(G) - \gamma_g'(G-e) \geq -1$.*

Dokaz: Če je $\gamma_g'(G) = 1$, potem je G poln graf, od koder sledi, da je $\gamma_g'(K_n - e) = 2$.

Naj bo $\gamma_g'(G) = 2$. Na vsako zavlačevalkino prvo potezo s_1 ima dominator odgovor d_1, s katerim dominira celoten graf. Enaka poteza v $G - e$ dominira vsa vozlišča razen največ enega, od koder sledi $\gamma_g'(G - e) \leq 3$.

Denimo, da je $\gamma_g'(G) = 3$. Dokazati želimo, da je $\gamma_g'(G-e) \leq 4$. Dominator uporabi strategijo namišljene igre. Dejanska igra se igra na G, kjer Zavlačevlka igra optimalno, medtem ko si dominator zamišlja igro na $G - e$. Zavlačevalka v prvi potezi izbere s_1, dominator pa si enako potezo zamisli v namišljeni igri in nato v njej odgovori optimalno z izbiro d_1. Zavlačevalka nato v $G - e$ igra na s_2. Če je ta poteza legalna tudi v G, potem je množica $\{s_1, d_1, s_2\}$ dominacijska množica grafa G, kar pomeni, da dominira vsa vozlišča grafa $G-e$ razen največ enega. Zato je $\gamma_g(G-e) \leq 4$. Če izbira s_2 ni legalna poteza na G, potem je s to potezo na novo dominirano le eno krajišče povezave e in je drugo krajišče s_1 ali d_1. Torej je po zavlačevalkini potezi na s_2 množica dominiranih vozliščih v obeh igrah enaka in obe krajišči povezave e sta dominirani, od koder sledi, da vsaka poteza na $G - e$ konča namišljeno igro in zopet velja $\gamma_g'(G - e) \leq 4$. ∎

6.1.7 $\gamma_g'(G) - \gamma_g'(G-e) = -1$

Iz izrekov 3.1 in 3.2 sledi, da velja $\gamma_g'(C_{2\ell+1}) = \ell$ in $\gamma_g'(C_{2\ell+1} - e) = \gamma_g'(P_{2\ell+1}) = \ell + 1$ za vsak $\ell \geq 1$.

6.1.8 $\gamma_g'(G) - \gamma_g'(G-e) = 0$

Iz izrekov 3.1 in 3.2 sledi, da velja $\gamma_g'(C_4) = 2 = \gamma_g'(P_4) = \gamma_g'(C_4 - e)$. Naj bo G graf, ki ga dobimo iz P_4 tako, da eno izmed notranjih vozlišč u identificiramo s poljubnim vozliščem trikotnika. Potem je $\gamma_g'(G) = \gamma_g'(G - e) = 3$, kjer je e povezava v trikotniku, ki ni incidenčna z vozliščem u. Naj bo $k \geq 4$ in G_k graf, ki ga dobimo tako, da polnemu grafu reda k dodamo list na vsako njegovo vozlišče. Enostavno je preveriti, da je $\gamma_g'(G_k) = k = \gamma_g'(G_k - e)$, kjer je e ena izmed povezav v k-kliki grafa G_k.

6.1.9 $\gamma_g'(G) - \gamma_g'(G-e) = 1$

Podobno kot v podpoglavju 6.1.4 lahko preverimo, da je $\gamma_g'(Y_k) = k+5$ in $\gamma_g'(Y_k - e) = k+4$ za vsak $k \geq 0$. Zavlačevalkina optimalna prva poteza je izbira lista, sosednjega vozlišču x. Naj bo H graf, ki ga dobimo iz disjunktne unije grafov $K_{1,5}$ in trikotnika tako, da dodamo povezavo med centrom 5-zvezde in poljubnim vozliščem trikotnika ter povezavo e med enim izmed listov 5-zvezde in vozliščem trikotnika stopnje 2. Ker velja $\gamma_g'(H) = 4$ in $\gamma_g'(H-e) = 4$, lahko zapišemo naslednjo trditev.

Trditev 6.10 *Za vsak $\ell \geq 4$ obstaja graf G s povezavo e, za katerega velja $\gamma_g'(G) = \ell$ in $\gamma_g'(G-e) = \ell - 1$.*

Za manjše vrednosti γ_g' pa grafa z iskano lastnostjo ni mogoče najti.

Trditev 6.11 *Naj bo G graf in e njegova povezava. Če je $\gamma_g'(G) \leq 4$, potem velja $\gamma_g'(G) - \gamma_g'(G-e) \leq 0$.*

Dokaz: Če ima graf G vsaj eno povezavo, sledi, da je $\gamma_g'(G-e) \geq 2$, saj $G-e$ ni poln graf. Naj bo sedaj $\gamma_g'(G) = 3$ in s_1 zavlačevalkina optimalna prva poteza na G. Ker je $\gamma_g'(G) = 3$, v $G|N[s_1]$ ne obstaja poteza, ki bi dominirala vsa nedominirana vozlišča, od koder sledi, da take poteze ni moč najti niti v grafu $G-e$. S tem smo dokazali, da je $\gamma_g'(G-e) \geq 3$. ■

6.1.10 $\gamma_g'(G) - \gamma_g'(G-e) = 2$

Podobno kot v podpoglavju 6.1.5 lahko preverimo, da velja $\gamma_g'(X_k) = 2k+7$ in $\gamma_g'(X_k - e) = 2k+5$ ter $\gamma_g'(Q_k) = 2k+6$ in $\gamma_g'(Q_k - e) = 2k+4$ za vsak $k \geq 0$. Zavlačevalkina optimalna prva poteza je izbira lista, sosednjega vozlišču x.

Trditev 6.12 *Za vsak $\ell \geq 6$ obstaja graf G s povezavo e, za katerega velja $\gamma_g'(G) = \ell$ in $\gamma_g'(G-e) = \ell - 2$.*

Za manjše vrednosti γ_g'' pa dobimo naslednjo trditev.

Trditev 6.13 *Naj bo G graf in e njegova povezava. Če je $\gamma_g'(G) < 6$, potem velja $\gamma_g'(G) - \gamma_g'(G-e) \leq 1$.*

Dokaz: Trditev za $\gamma_g(G) < 4$ sledi iz trditve 6.11. Naj bo sedaj $\gamma_g'(G) = 4$. Predpostavimo, da je $\gamma_g'(G-e) = 2$. Na zavlačevalkino prvo potezo s_1 v G dominator odgovori z optimalno potezo d_1, kot bi jo igral v $G - e$. Ker je $\{s_1, d_1\}$ dominacijska množica v $G - e$, je to dominacijska množica tudi v G. Dobimo protislovje, kar pomeni, da je $\gamma_g'(G - e) \geq 3$.

Denimo, da je $\gamma_g'(G) = 5$. Predpostavimo še, da je $\gamma_g'(G - e) = 3$. Na vsako zavlačevalkino potezo s_1 v G dominator odgovori s potezo d_1, kot bi jo igral na $G - e$. Vsaka naslednja legalna zavlačevalkina poteza s_2 na $G - e$ konča igro na $G - e$ in posledično tudi na G. Vendar pa lahko zavlačevalka naredi legalno potezo na G, ki ni legalna na $G - e$. V tem primeru dominator v svoji drugi potezi igra na s_2 in s tem konča igro na G po štirih potezah, kar je v protislovju z $\gamma_g'(G) = 5$. ∎

6.2 Z odvzetim vozliščem

V prejšnjem razdelku smo dokazali, da lahko igralno dominacijsko število grafa G brez povezave omejimo navzgor z igralnim dominacijskim številom grafa G, kar pa ne drži v primeru, ko grafu odvzamemo eno izmed vozlišč. To nas niti ne preseneča, saj je enako res tudi za dominacijsko število. Naj bo H graf z $\gamma_g(H) = k+1$. Graf G dobimo tako, da grafu H dodamo univerzalno vozlišče v. Očitno je $\gamma_g(G) = 1$ in zato velja $\gamma_g(H) - \gamma_g(G) = k$. Ista konstrukcija deluje tudi za v primeru γ_g'. Po drugi strani pa lahko dokažemo naslednji izrek.

Izrek 6.14 *Za vsak graf G z vozliščem v velja*

$$\gamma_g(G) - \gamma_g(G - v) \leq 2 \quad \textit{in} \quad \gamma_g'(G) - \gamma_g'(G - v) \leq 2\,.$$

Dokaz: Če dominator naredi prvo potezo na v, dobimo

$$\begin{aligned}
\gamma_g(G) &\leq 1 + \gamma_g'(G|N[v]) \\
&= 1 + \gamma_g'((G - v)|(N[v] - \{v\})) \\
&\leq 1 + \gamma_g'(G - v) \quad \text{(po principu nadaljevanja)} \\
&\leq \gamma_g(G - v) + 2 \quad \text{(po izreku 1.2)}\,.
\end{aligned}$$

V igri 2 obravnavamo dva primera. Če zavlačevalka v prvi potezi igra na v, dobimo

$$\gamma_g'(G) = 1 + \gamma_g(G|N[v])$$

$$
\begin{aligned}
&= 1+\gamma_g((G-v)|(N[v]-\{v\})) \\
&\le 1+\gamma_g(G-v) \quad \text{(po principu nadaljevanja)} \\
&\le \gamma_g'(G-v)+2 \quad \text{(po izreku 1.2)}\,.
\end{aligned}
$$

V drugem primeru zavlačevalka najprej izbere vozlišče $x \neq v$. Če dominator odgovori s potezo na v, dobimo

$$
\begin{aligned}
\gamma_g'(G) &= 1+\gamma_g(G|N[x]) \\
&\le 2+\gamma_g'(G|(N[x]\cup N[v])) \\
&= 2+\gamma_g'((G-v)|(N[x]\cup N[v]-\{v\})) \\
&\le \gamma_g'(G-v)+2 \quad \text{(po principu nadaljevanja)}\,.
\end{aligned}
$$

■

Zgoraj smo že ugotovili, da je razlika $\gamma_g(G-v)-\gamma_g(G)$ oziroma $\gamma_g'(G-v)-\gamma_g'(G)$ poljubno velika. V nadaljevanju poglavja bomo poiskali še (povezane) družine grafov, za katere bo veljalo $\gamma_g(G)-\gamma_g(G-v)\ge 0$ oziroma $\gamma_g'(G)-\gamma_g'(G-v)\ge 0$.

6.2.1 $\gamma_g(G)-\gamma_g(G-v)=0$

Naj bo $\ell \ge 1$ in G' graf z $\gamma_g(G')=\ell$. Naj bo x dominatorjevo optimalno začetno vozlišče na G'. Potem graf G dobimo tako, da vozlišču x pripnemo list v. Trdimo, da je $\gamma_g(G)=\gamma_g(G-v)=\ell$. Očitno je, $\gamma_g(G-v)=\ell$, saj je $G-v=G'$. Po principu nadaljevanja dominator na G' raje igra na x kot na v, kar pomeni, da je x dominatorjevo optimalno začetno vozlišče tudi v grafu G in zato je $\gamma_g(G)=\ell$.

6.2.2 $\gamma_g(G)-\gamma_g(G-v)=1$

Poiskati želimo graf G z vozliščem v, za katerega velja $\gamma_g(G)-\gamma_g(G-v)=1$. Iz izreka 3.1 sledi, da je zaporedje $\big(\gamma_g(P_n)\big)_{n\ge 1}$ neomejeno, nepadajoče in zanj velja $\gamma_g(P_{n+1})-\gamma_g(P_n)\le 1$ za vsak $n\ge 1$.

6.2.3 $\gamma_g(G)-\gamma_g(G-v)=2$

Najprej si poglejmo majhne vrednosti γ_g.

Trditev 6.15 *Naj bo G graf in v njegovo vozlišče. Če je $\gamma_g(G)<5$, potem velja $\gamma_g(G)-\gamma_g(G-v)\le 1$.*

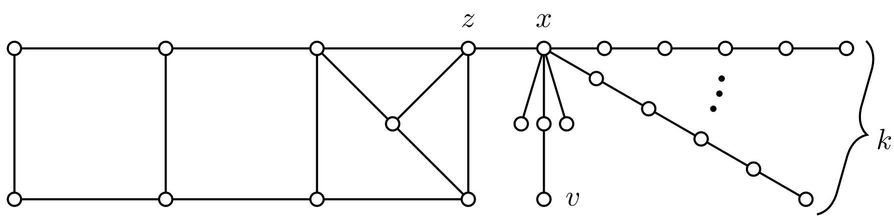
Dokaz: Naj bo $\gamma_g(G) = 3$. Denimo, da je $\gamma_g(G - v) = 1$. Potem v $G - v$ obstaja univerzalno vozlišče u. Če dominator v G igra najprej na u, dominira vsa vozlišče razen mogoče vozlišča v. Ker tega dominira zavlačevalka v svoji prvi potezi, sledi, da je $\gamma_g(G) \leq 2$. Dobimo protislovje, kar pomeni, da je $\gamma_g(G - v) \geq 2$.

Naj bo sedaj $\gamma_g(G) = 4$. Denimo, da je $\gamma_g(G - v) = 2$. Po prvi dominatorjevi optimalni potezi v $G - v$ množica nedominiranih vozlišč C inducira poln podgraf v $G - v$ in vsako vozlišče v $G - C$, ki ima soseda v C, dominira vsa vozlišča v C. Potem v G dominator v prvi potezi izbere isto vozlišče kot v prvi potezi igre na $G - v$. Ker je množica nedominiranih vozlišč enaka $G \cup \{v\}$, sledi, da sta potrebni še največ dve potezi za dokončanje igre, tj. $\gamma_g(G) \leq 3$. ■

Za vse ostale vrednosti pa graf z iskano lastnostjo obstaja.

Trditev 6.16 *Za vsak $\ell \geq 5$ obstaja graf G z vozliščem v, za katerega je $\gamma_g(G) = \ell$ in $\gamma_g(G - v) = \ell - 2$.*

Dokaz: Najprej poiščimo družino, ki realizira sode ℓ. Naj bo S graf, ki ga dobimo iz $K_{1,3}$ tako, da z x označimo centralno vozlišče ter enemu izmed listov pripnemo vozlišče v. Graf Z_0 dobimo iz disjunktne unije grafov Z in S tako, da povežemo vozlišči z in x, glej sliko 6.7. Na koncu definiramo $Z_k = P_6^k[Z_0[x]]$ za vsak $k \geq 1$, ponovno glej sliko 6.7. Trdimo, da velja $\gamma_g(Z_k) = 2k + 6$ in $\gamma_g(Z_k - v) = 2k + 4$. Po izreku 6.14 zadostuje dokazati, da velja $\gamma_g(Z_k) \geq 2k + 6$ in $\gamma_g(Z_k - v) \leq 2k + 4$.



Slika 6.7: Graf Z_k

Najprej dokažimo prvo neenakost. Opazimo, da sta na vsaki izmed poti potrebni vsaj dve potezi. Prav tako igralca potrebujeta dve potezi tudi za dominacijo podgrafa, izomorfnega S. Če so na omenjenih podgrafih odigrane natanko $2k + 2$ poteze, dominator naredi prvo potezo na Z, kar pomeni, da je na Z_k skupaj odigranih vsaj $2k + 6$ potez. Če pa je zavlačevalka prisiljena prva igrati na Z, je bilo na preostanku Z_k odigranih vsaj $2k+3$ potez. Ker so na Z potrebne vsaj tri poteze ($\gamma(Z) = \gamma(Z|z) = 3$), tudi v tem primeru sledi, da je $\gamma_g(Z_k) \geq 2k+6$.

Pri dokazu druge neenakosti potrebujemo dominatorjevo strategijo na $G-v$. Če najprej igra na x, po izreku 2.10 in lemi 6.2 dobimo

$$\gamma_g(G-v) \leq 1 + \gamma_g'((Z|z) \cup \bigcup_{i=1}^{k} P_4') = 1 + \gamma_g'(Z|z) + \gamma_g(P_4') \cdot k = 1 + 3 + 2k = 2k+4\,.$$

Za lihe ℓ skonstruiramo podobno družino. Graf W_0 dobimo iz disjunktne unije grafov C_6 in S tako, da povežemo poljubno vozlišče z grafa C_6 z x, nato pa definiramo $W_k = P_6^k[W_0[x]]$ za $k \geq 1$. Trdimo, da velja $\gamma_g(W_k) = 2k+5$ in $\gamma_g(W_k - v) = 2k+3$. V dokazu uporabimo enake argumente kot zgoraj. V posebnem uporabimo lastnost 6-cikla, da je $\gamma_g(C_6) = 3 = \gamma_g(C_6|z)$ in $\gamma_g'(C_6) = 2 = \gamma_g'(C_6|z)$. ∎

6.2.4 $\gamma_g'(G) - \gamma_g'(G-v) = 0$

Naj bo $\ell \geq 0$ in G graf, ki ga dobimo tako, da polnemu grafu $K_{\ell+2}$ na ℓ izmed njegovih vozlišč pripnemo list. Naj bo v vozlišče G, ki nima pripetega lista. Enostavno je videti, da je $\gamma_g(G) = \gamma_g(G-v) = \ell+1$.

6.2.5 $\gamma_g'(G) - \gamma_g'(G-v) = 1$

Uporabimo družino poti na enak način kot v podpoglavju 6.2.2.

6.2.6 $\gamma_g'(G) - \gamma_g'(G-v) = 2$

Podobno kot v podpoglavju 6.2.3 lahko dokažemo, da velja $\gamma_g'(Z_k) = 2k+7$ in $\gamma_g'(Z_k - v) = 2k+5$ ter $\gamma_g'(W_k) = 2k+6$ in $\gamma_g'(W_k - v) = 2k+4$ za vsak $k \geq 0$. Dodajmo le, da zavlačevalka v svoji prvi potezi izbere enega izmed listov, sosednjih z x.

Naj bo H graf, ki ga dobimo tako, da enemu izmed vozlišč grafa C_6 pripnemo list v. Očitno je $\gamma_g'(H) = 4$ in $\gamma_g'(H-v) = 2$. Če vozlišču z na grafu Z pripnemo list v, dobimo graf H', za katerega velja $\gamma_g'(H') = 5$ in $\gamma_g'(H'-v) = 3$. Enostavno je preveriti še, da graf G z vozliščem v in lastnostima $\gamma_g'(G) = 3$ ter $\gamma_g'(G-v) = 1$ ne obstaja.

Trditev 6.17 *Za vsak $\ell \geq 4$ obstaja graf G z vozliščem v, za katerega je $\gamma_g'(G) = \ell$ in $\gamma_g'(G-v) = \ell - 2$.*

Poglavje 7

Podobne kombinatorne igre

Kombinatorna igra je igra dveh igralcev, ki izmenično vlečeta poteze. Začetni položaj igre označimo z G. Pogosto bomo tudi samo igro, ki se začne v položaju G, označili z G. Igra je *nepristranska*, če imata oba igralca popolno informacijo o možnih potezah, tj. oba igralca imata v vsakem položaju igre na voljo enake poteze. Če temu ni tako, pravimo, da je igra *pristranska*. Vsak igralec v svoji potezi v položaju G izbere naslednji položaj iz množice možnih položajev $\mathcal{O}(G) = \{G_1, \ldots, G_k\}$ ($\mathcal{O}(G)$ ustreza množici dovoljenih potez v igri G). Poleg tega za kombinatorno igro predpostavimo še, da se konča v končno mnogo korakih ter da je na koncu igre vedno eden izmed igralcev zmagovalec. Glede na izid igre obstajata dve osnovni različici. V prvi, *normalni* igri, je zmagovalec igralec, ki je naredil zadnjo potezo (v položaj G z $\mathcal{O}(G) = \emptyset$). V drugi različici igre, *beraču*, pa je zmagovalec tisti, ki prvi ostane brez poteze (iz položaja G z $\mathcal{O}(G) = \emptyset$). Temeljna lastnost nepristranskih kombinatornih iger je ta, da je zmagovalec igre popolnoma določen z začetnim položajem oziroma z igro samo.

Pri analizi igre želimo za vsak položaj ugotoviti, kdo je igralec, ki ima zmagovalno strategijo. Če je mogoče, želimo to tudi poiskati. Z $o(G)$ označimo izid (ang. outcome) igre G. Če ima prvi (oziroma naslednji) igralec zmagovalno strategijo na G, potem je $o(G) = \mathcal{N}$, medtem ko je $o(G) = \mathcal{P}$, če je zmagovalec igre drugi (oziroma prejšnji) igralec.

V veliko pomoč pri analizi iger nam je *Sprague-Grundyjeva teorija*, ki je obsežno raziskana v [4, 15]. Teorija, ki sta jo neodvisno predstavila Sprague v [36] in Grundy v [22], pravi, da lahko vsakemu položaju oziroma igri v nepristranski kombinatorni igri v normalni različici priredimo nenegativno celo število. Število, prirejeno igri G, bomo imenovali *Sprague-Grundyjevo število* in označili z $\mathcal{G}(G)$ ter ga definirali kot najmanjše nenegativno število (ang. maximum excluded number), ki ni v množici $\{\mathcal{G}(G_i) \mid G_i \in \mathcal{O}(G)\}$. Pisali bomo $\mathcal{G}(G) = \text{mex}\{\mathcal{G}(G_i) \mid G_i \in \mathcal{O}(G)\}$. Iz definicije sledi, da je $o(G) = \mathcal{P}$ natanko takrat, ko je $\mathcal{G}(G) = 0$. Zmagovalno strategijo je potem enostavno določiti, saj v igri G z $o(G) = \mathcal{N}$ (in s tem $\mathcal{G}(G) > 0$) igralec naredi potezo, ki vodi v igro $G_i \in \mathcal{O}(G)$ z $\mathcal{G}(G_i) = 0$. Taka poteza po definiciji $\mathcal{G}$ vedno obstaja. Sprague-Grundyjevo teorijo nekateri imenujejo tudi NIM-teorija, katere ime izvira iz igre NIM. To je že leta 1901 v [7] definiral ter rešil Bouton.

S pomočjo opisane teorije je enostavno opisati tudi igro na *disjunktni vsoti iger* $G+H$, ki je induktivno definirana z $\mathcal{O}(G+H) = \{G_i+H \mid G_i \in \mathcal{O}(G)\} \cup \{G+H_i \mid H_i \in \mathcal{O}(H)\}$. Definicija nam pove, da igralec naredi potezo bodisi v G bodisi v H. Sprague-Grundyevo število disjunktne vsote je potem definirano kot $\mathcal{G}(G+H) = \mathcal{G}(G) \oplus \mathcal{G}(H)$, kjer $\oplus$ označuje binarno operacijo, imenovano NIM-vsota, ki je definirana na sledeč način. Naj bosta a in b nenegativni celi števili ter $(a_k \cdots a_1 a_0)_2$ in $(b_\ell \cdots b_1 b_0)_2$ njuna zapisa v dvojiškem sistemu. Potem je $a \oplus b = c = (c_{\max\{k,\ell\}} \cdots c_1 c_0)_2$, kjer je $c_i = (a_i + b_i) \bmod 2$ za vsak $i = 0, 1, \ldots, \max\{k, \ell\}$, pri čemer lahko manjšemu izmed števil a, b v dvojiškem zapisu spredaj dodamo še ničle.

Očitno je, da dominacijska igra ni kombinatorna igra, saj na koncu igre ni zmagovalca. Še preden pa si pogledamo kombinatorno igro *Node Kayles*, ki je najbolj podobna dominacijski, si poglejmo njeno predhodnico, poimenovano *Kayles*.

7.1 Kayles

Igra izvira iz Velike Britanije, kjer je bila popularna že v 14. stoletju. Igrata jo dva igralca, ki izmenično izbijata keglje, postavljene v vodoravno vrsto. Zaradi svojih spretnosti sta sposobna zbiti poljuben kegelj ali poljubna dva sosednja keglja. Tisti, ki zbije zadnjega, zmaga.

Igro sta kot nepristransko kombinatorno igro neodvisno definirala Dudeney leta 1910 v [19] in Loyd leta 1914 v [32]. Igro si lahko predstavljamo tudi nekoliko drugače. Na mizo postavimo v vodoravno vrsto n žetonov. Igralca v svoji potezi nato lahko odstranita enega ali dva žetona ter razporedita preostanek v dve vrsti. Igro označimo s K_n, možni položaji pa so enaki množici

$$\mathcal{O}(K_n) = \{K_i + K_j \mid i + j \in \{n-1, n-2\},\ i, j \geq 0\}\,.$$

Hitro lahko opazimo, da je $o(K_n) = \mathcal{N}$ za vsak $n \geq 1$, saj lahko prvi igralec odstrani enega (v primeru, da je n lih) ali dva (ko je n sod) žetona tako, da sta preostali vrsti žetonov enake dolžine. Prvi igralec nato v vsaki naslednji potezi zgolj posnema drugega igralca in si s tem zagotovi, da iz igre odstrani zadnji žeton.

Izračunajmo sedaj nekaj prvih Sprague-Grundyjevih vrednosti igre Kayles.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(K_0) &= 0 \\
\mathcal{G}(K_1) &= \operatorname{mex}\{\mathcal{G}(K_0)\} = \operatorname{mex}\{0\} = 1 \\
\mathcal{G}(K_2) &= \operatorname{mex}\{\mathcal{G}(K_0), \mathcal{G}(K_1)\} = \operatorname{mex}\{0,1\} = 2 \\
\mathcal{G}(K_3) &= \operatorname{mex}\{\mathcal{G}(K_1), \mathcal{G}(K_2), \mathcal{G}(K_1+K_1)\} = \operatorname{mex}\{1,2,0\} = 3 \\
\mathcal{G}(K_4) &= \operatorname{mex}\{\mathcal{G}(K_2), \mathcal{G}(K_1+K_1), \mathcal{G}(K_3), \mathcal{G}(K_1+K_2)\} = \operatorname{mex}\{2,0,3,3\} = 1
\end{aligned}$$

Guy je kot prvi izračunal Sprague-Grundyjevo število igre K_n za vsak $n \geq 0$. Ugotovil je, da je $\mathcal{G}(K_n)$ periodična funkcija s periodo 12 od $n = 72$ naprej. V tabeli 7.1 so naštete Sprague-Grundyjeva števila za K_n, kjer je $0 \leq n \leq 83$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0+	0	1	2	3	1	4	3	2	1	4	2	6
12+	4	1	2	7	1	4	3	2	1	4	6	7
24+	4	1	2	8	5	4	7	2	1	8	6	7
36+	4	1	2	3	1	4	7	2	1	8	2	7
48+	4	1	2	8	1	4	7	2	1	4	2	7
60+	4	1	2	8	1	4	7	2	1	8	6	7
72+	4	1	2	8	1	4	7	2	1	8	2	7

Tabela 7.1: Sprague-Grundyjeva števila igre K_n

Mnogi različni avtorji so nato Kayles raziskovali še v posplošeni verziji, ki jo je Schaeffer v [35] poimenoval Node Kayles.

7.2 Node Kayles

Node Kayles je nepristranska kombinatorna igra na neusmerjenem grafu, na katerem v vsaki potezi igralec izbere neko vozlišče in iz grafa odstrani vsa vozlišča iz njegove zaprte okolice, tj. $\mathcal{O}(G) = \{G - N[v] \mid v \in V(G)\}$ za vsak graf (oziroma igro) G. V primeru, ko je graf pot, je igra ekvivalentna Dawsonovi igri iz [16], imenovani Dawsonov šah. Možni položaji poti dolžine n, $n \geq 3$, so torej enaki množici $\mathcal{O}(P_n) = \{P_{n-2}, P_{n-3}\} \cup \{P_i \cup P_j \mid i + j = n - 3,\ i, j \geq 0\}$. S pomočjo Sprague-Grundyjeve teorije je bila igra popolnoma rešena. Ugotovili so, da so Sprague-Grundyjeva števila periodična s periodo 34 od $n = 52$ naprej. Skoraj vse različice igre na poteh, ki jih je v splošnem opisal Conway v [15], sta rešila Guignard in Sopena v [23].

Na splošnem grafu pa je igra precej težja. Že leta 1978 je Schaeffer v [35] dokazal, da je določitev zmagovalca igre na splošnem grafu PSPACE-poln problem. Razred PSPACE vsebuje vse probleme, ki imajo polinomsko prostorsko zahtevnost (lahko pa so rešljivi šele v eksponentnem času), medtem ko njegova podmožica PSPACE-polnih problemov predstavlja probleme, na katere je v polinomskem času prevedljiv vsak problem iz PSPACE. Razred PSPACE-polnih problemov torej predstavlja najtežje probleme v PSPACE.

Zaradi Schaefferjevega rezultata je torej smiselno preučevati igro na posameznih družinah grafov. Bodlaender in Kratsch sta tako v [5] poiskala družino grafov, ki ji lahko določimo zmagovalca v polinomskem času. Natančneje, to je družina grafov z omejenim asteroidnim številom, ki med drugim vsebuje permutacijske in intervalne grafe ter tudi kografe.

Časovna zahtevnost določitve zmagovalca na drevesih še vedno ostaja odprt problem. Schaeffer je že leta 1978 omenil ta problem na posebnih drevesih, t.i. zvezdah, kjer imajo vsa vozlišča razen enega stopnjo manjšo ali enako 2. Zoženemu problemu sta se posvetila Fleischer in Trippen v [20] in ugotovila, da je zmagovalca na zvezdi z omejeno stopnjo možno določiti v polinomskem času.

Avtorja [23] sta študirala različne variante vsote iger na poteh in dokazala, da so rešljive v linearnem času, medtem ko sta Bodlaender in Kratsch v [6] izboljšala časovno zahtevnost eksaktnega algoritma. S pregledom vseh možnosti je enostavno določiti zmagovalca v času $O(2^n)$, medtem ko sta omenjena avtorja ta čas izboljšala na $O(1.6052^n)$ v splošnem in na $O(1.4423^n)$ na drevesih.

7.3 DOM

Pravila igre Node Kayles lahko spremenimo na naslednji način. Igralcema je v vsaki potezi dovoljeno izbrati vozlišče, ki v svoji zaprti okolici vsebuje vsaj eno nedominirano vozlišče. Splošen položaj v tej igri opišemo z grafom G in množico že dominiranih vozlišč S. Takemu položaju oziroma igri bomo (podobno kot v dominacijski igri) rekli delno dominiran graf in ga označili z $G|S$. V začetnem položaju ni dominiranih vozlišč, zato bomo namesto $G|\emptyset$ pisali kar G. Možni položaji so definirani z $\mathcal{O}(G|S) = \{G|(S \cup N[v]) \mid v \in V(G),\ N[v] \not\subseteq S\}$ za vsak graf G in množico vozlišč S. Podobno kot pri preostalih kombinatornih igrah je zmagovalec v normalni različici tisti, ki naredi zadnjo potezo, medtem ko je pri beraču cilj prvi ostati brez poteze. Opisani igri bomo po predlogu E. Sopene rekli DOM.

Dodajmo še, da v igri Node Kayles množica dominiranih vozlišč na koncu igre tvori neodvisno dominacijsko množico, medtem ko v igri DOM ta množica podobno kot v dominacijski igri ni nujno neodvisna.

Očitno je, da množica možnih položajev grafa G v DOM vsebuje vse položaje G v Node Kayles, zato je naravno postaviti naslednjo domnevo.

Domneva 7.1 *Odločitev, ali je prvi igralec zmagovalec igre* DOM *na danem grafu, je PSPACE-poln problem.*

V luči te domneve je potem smiselno študirati igro na posameznih družinah grafov.

7.3.1 Poti in cikli

Podobno kot v razdelku 3.1 si bomo pri iskanju Sprague-Grundyjevih števil poti in ciklov pomagali z delno dominiranima potema P_n'' in P_n' s slike 3.2 na strani 34.

Lema 7.2 *Za vsak* $n \geq 0$ *je* $\mathcal{G}(P_n'') = n \bmod 4$*.*

Dokaz: Uporabimo indukcijo na n. Prva štiri Sprague-Grundyjeva števila so

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(P_0'') &= \operatorname{mex}\{\ \} = 0, \\
\mathcal{G}(P_1'') &= \operatorname{mex}\{\mathcal{G}(P_0'')\} = \operatorname{mex}\{0\} = 1, \\
\mathcal{G}(P_2'') &= \operatorname{mex}\{\mathcal{G}(P_0''), \mathcal{G}(P_1'')\} = \operatorname{mex}\{0,1\} = 2, \\
\mathcal{G}(P_3'') &= \operatorname{mex}\{\mathcal{G}(P_0''), \mathcal{G}(P_1''), \mathcal{G}(P_2'')\} = \operatorname{mex}\{0,1,2\} = 3\,.
\end{aligned}$$

Torej baza indukcije za $n \leq 3$ drži. Naj bo sedaj $n \geq 4$. Po definiciji možnih položajev $\mathcal{O}(P_n'')$ dobimo

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(P_n'') &= \operatorname{mex}\big[\{\mathcal{G}(P_{n-1}''), \mathcal{G}(P_{n-2}''), \mathcal{G}(P_{n-3}'')\} \cup \{\mathcal{G}(P_i'' \cup P_{n-3-i}'') \mid 1 \leq i \leq n-4\}\big] \\
&= \operatorname{mex}\big[\{\mathcal{G}(P_{n-1}''), \mathcal{G}(P_{n-2}''), \mathcal{G}(P_{n-3}'')\} \cup \{\mathcal{G}(P_i'') \oplus \mathcal{G}(P_{n-3-i}'') \mid 1 \leq i \leq n-4\}\big] \\
&\overset{\text{IP}}{=} \operatorname{mex}\big[(\{0,1,2,3\} \setminus \{n \bmod 4\}) \cup \{\mathcal{G}(P_i'') \oplus \mathcal{G}(P_{n-3-i}'') \mid 1 \leq i \leq n-4\}\big]\,.
\end{aligned}$$

Dokazati moramo še, da je $\mathcal{G}(P_i'') \oplus \mathcal{G}(P_{n-3-i}'') \bmod 4 \neq n \bmod 4$ za vsak $i = 1, \ldots, n-4$. Število $\mathcal{G}(P_i'') \oplus \mathcal{G}(P_{n-3-i}'')$ ima za vsak $i = 1, \ldots, n-3$ enako parnost kot $n-3$, katerega parnost je očitno drugačna od parnosti n. Od tu sledi, da je $\mathcal{G}(P_n'') = n \bmod 4$. ∎

Ker je $\mathcal{O}(C_n) = \{P_{n-3}''\}$, po pravkar dokazani lemi dobimo Sprague-Grundyjeva števila ciklov.

Posledica 7.3 *Za vsak* $n \geq 3$ *je* $\mathcal{G}(C_n) = \begin{cases} 1, & n \equiv 3 \pmod 4 \\ 0, & \textit{sicer} \end{cases}$.

Naprej izračunamo še Sprague-Grundyjeva števila za poti z enim dominiranim listom.

Lema 7.4 *Za vsak* $n \geq 0$ *je* $\mathcal{G}(P''_n) = \mathcal{G}(P'_n)$.

Dokaz: Uporabimo indukcijo na n. Baza indukcije za $n \leq 3$ očitno drži. Naj bo sedaj $n \geq 4$. Po definiciji možnih položajev v igri na P'_n in indukcijski predpostavki dobimo

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(P'_n) &= \operatorname{mex}\big[\{\mathcal{G}(P'_{n-1}), \mathcal{G}(P'_{n-2}), \mathcal{G}(P'_{n-3})\} \cup \{\mathcal{G}(P''_{n-2}), \mathcal{G}(P''_{n-3})\} \\
&\quad \cup \{\mathcal{G}(P''_i) \oplus \mathcal{G}(P'_{n-3-i}) \mid 1 \leq i \leq n-4\}\big] \\
&\overset{\text{IP}}{=} \operatorname{mex}\big[\{\mathcal{G}(P''_{n-1}), \mathcal{G}(P''_{n-2}), \mathcal{G}(P''_{n-3})\} \cup \{\mathcal{G}(P''_i) \oplus \mathcal{G}(P''_{n-3-i}) \mid 1 \leq i \leq n-4\}\big] \\
&= \operatorname{mex}\big[\{\mathcal{G}(P''_{n-1}), \mathcal{G}(P''_{n-2}), \mathcal{G}(P''_{n-3})\} \cup \{\mathcal{G}(P''_i \cup P''_{n-3-i}) \mid 1 \leq i \leq n-4\}\big] \\
&= \mathcal{G}(P''_n)\,.
\end{aligned}$$

■

S pomočjo zadnjih dveh lem lahko sedaj rešimo igro še na poteh.

Izrek 7.5 *Za vsak* $n \geq 0$ *velja*

$$\mathcal{G}(P_n) = \begin{cases} 0, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ 1, & n \equiv 1 \pmod 4 \ \textit{ali}\ n \equiv 2 \pmod 4 \\ 2, & n = 3 \\ 3, & n \equiv 3 \pmod 4 \ \textit{in}\ n > 3 \end{cases}.$$

Dokaz: S pomočjo lem 7.4 in 7.2 izračunajmo prvih osem Sprague-Grundyjevih števil:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(P_0) &= \operatorname{mex}\{\ \} = 0, \\
\mathcal{G}(P_1) &= \operatorname{mex}\{\mathcal{G}(P_0)\} = \operatorname{mex}\{0\} = 1, \\
\mathcal{G}(P_2) &= \operatorname{mex}\{\mathcal{G}(P_0)\} = \operatorname{mex}\{0\} = 1, \\
\mathcal{G}(P_3) &= \operatorname{mex}\{\mathcal{G}(P_0), \mathcal{G}(P'_1)\} = \operatorname{mex}\{0, 1\} = 2 \\
\mathcal{G}(P_4) &= \operatorname{mex}\{\mathcal{G}(P'_1), \mathcal{G}(P'_2)\} = \operatorname{mex}\{1, 2\} = 0 \\
\mathcal{G}(P_5) &= \operatorname{mex}\{\mathcal{G}(P'_2), \mathcal{G}(P'_1 \cup P'_1), \mathcal{G}(P'_3)\} = \operatorname{mex}\{2, 0, 3\} = 1 \\
\mathcal{G}(P_6) &= \operatorname{mex}\{\mathcal{G}(P'_3), \mathcal{G}(P'_1 \cup P'_2), \mathcal{G}(P'_4)\} = \operatorname{mex}\{3, 3, 0\} = 1
\end{aligned}$$

$$\mathcal{G}(P_7) \;=\; \text{mex}\{\mathcal{G}(P_4'), \mathcal{G}(P_1' \cup P_3'), \mathcal{G}(P_2' \cup P_2'), \mathcal{G}(P_5')\} = \text{mex}\{0,2,0,1\} = 3\,.$$

Naj bo sedaj $n \geq 8$. Po definiciji možnih položajev dobimo

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(P_n) &= \text{mex}\big[\{\mathcal{G}(P_{n-2}'), \mathcal{G}(P_{n-3}')\} \cup \{\mathcal{G}(P_i' \cup P_{n-3-i}') \mid 1 \leq i \leq n-4\}\big] \\
&= \text{mex}\big[\{\mathcal{G}(P_{n-2}')\} \cup \{\mathcal{G}(P_i') \oplus \mathcal{G}(P_{n-3-i}') \mid 0 \leq i \leq n-4\}\big]\,.
\end{aligned}$$

Obravnavajmo sedaj štiri primere glede na ostanek n pri deljenju s 4. Za vsak $k \geq 2$ s pomočjo lem 7.4 in 7.2 dobimo

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(P_{4k}) &= \text{mex}\big[\{\mathcal{G}(P_{4(k-1)+2}')\} \cup \{\mathcal{G}(P_{4\ell}') \oplus \mathcal{G}(P_{4(k-\ell-1)+1}') \mid 0 \leq \ell \leq k-1\} \\
&\quad \cup \{\mathcal{G}(P_{4\ell+2}') \oplus (P_{4(k-\ell-2)+3}') \mid 0 \leq \ell \leq k-2\}\big] \\
&= \text{mex}\{2, 0 \oplus 1, 2 \oplus 3\} = \text{mex}\{2,1,1\} = 0\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(P_{4k+1}) &= \text{mex}\big[\{\mathcal{G}(P_{4(k-1)+3}')\} \cup \{\mathcal{G}(P_{4\ell}') \oplus \mathcal{G}(P_{4(k-\ell-1)+2}') \mid 0 \leq \ell \leq k-1\} \\
&\quad \cup \{\mathcal{G}(P_{4\ell+1}') \oplus \mathcal{G}(P_{4(k-\ell-1)+1}') \mid 0 \leq \ell \leq k-1\} \\
&\quad \cup \{\mathcal{G}(P_{4\ell+3}') \oplus \mathcal{G}(P_{4(k-\ell-2)+3}') \mid 0 \leq \ell \leq k-2\}\big] \\
&= \text{mex}\{3, 0 \oplus 2, 1 \oplus 1, 3 \oplus 3\} = \text{mex}\{3,2,0,0\} = 1\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(P_{4k+2}) &= \text{mex}\big[\{\mathcal{G}(P_{4k}')\} \cup \{\mathcal{G}(P_{4\ell}') \oplus \mathcal{G}(P_{4(k-\ell-1)+3}') \mid 0 \leq \ell \leq k-1\} \\
&\quad \cup \{\mathcal{G}(P_{4\ell+1}') \oplus \mathcal{G}(P_{4(k-\ell-1)+2}') \mid 0 \leq \ell \leq k-1\}\big] \\
&= \text{mex}\{0, 0 \oplus 3, 1 \oplus 2\} = \text{mex}\{0,3,3\} = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(P_{4k+3}) &= \text{mex}\big[\{\mathcal{G}(P_{4k+1}')\} \cup \{\mathcal{G}(P_{4\ell}') \oplus \mathcal{G}(P_{4(k-\ell)}') \mid 0 \leq \ell \leq k\} \\
&\quad \cup \{\mathcal{G}(P_{4\ell+1}') \oplus \mathcal{G}(P_{4(k-\ell-1)+3}') \mid 0 \leq \ell \leq k-1\} \\
&\quad \cup \{\mathcal{G}(P_{4\ell+2}') \oplus \mathcal{G}(P_{4(k-\ell-1)+2}') \mid 0 \leq \ell \leq k-1\}\big] \\
&= \text{mex}\{1, 0 \oplus 0, 1 \oplus 3, 2 \oplus 2\} = \text{mex}\{1,0,2,0\} = 3\,.
\end{aligned}$$

■

7.3.2 Pajki

Naj bo S_n družina grafov, definirana na sliki 3.1 na strani 34. Centralno vozlišče pajka S_n bomo označili z x, z y_i, $1 \leq i \leq n$, označimo vse sosede vozlišča x, z z_i pa v enakem vrstem redu še vse liste. Za vsak $i = 1, \ldots, n$ velja, da je $N[x] = \{x\} \cup \{y_j \mid 1 \leq j \leq n\}$, $N[y_i] = \{x, y_i, z_i\}$ in $N[z_i] = \{y_i, z_i\}$.

Definirajmo sedaj še tri delno dominirane grafe, ki se pogosto pojavljajo tekom igre na S_n. S S'_n označimo graf S_{n+1}, kjer sta edini dominirani vozlišči y_i in z_i za neki i, $1 \leq i \leq n+1$, tj. $S'_n = S_{n+1}|N[z_i]$. Opazimo, da v oznaki S'_n ne potrebujemo indeksa i, saj je $S_{n+1}|N[z_j]$ izomorfen delno dominiranemu grafu $S_{n+1}|N[z_k]$ za poljubno izbiro indeksov j, k. Definiramo še $S''_n = S_n|x$ in $S'''_n = S_n|N[x]$. Najprej izračunajmo Sprague-Grundyjeva števila slednjega.

Lema 7.6 *Za vsak $n \geq 0$ velja $\mathcal{G}(S'''_n) = n \bmod 2$.*

Dokaz: Ker je dominirana celotna zaprta okolica vozlišča x, je S'''_n izomorfen uniji k kopij grafa P'_1. Po lemi 7.4 potem sledi, da velja

$$\mathcal{G}(S'''_n) = \mathcal{G}(\bigcup_{k=1}^{n} P'_1) = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathcal{G}(P'_1) = n \bmod 2\,.$$

■

Naprej izračunajmo Sprague-Grundyjeve vrednosti igre na S''_n.

Lema 7.7 *Velja $\mathcal{G}(S''_0) = 0$, $\mathcal{G}(S''_1) = 2$ in $\mathcal{G}(S''_n) = (n-1) \bmod 2$ za vsak $n \geq 2$.*

Dokaz: Očitno je $\mathcal{G}(S''_0) = 0$, saj je $\mathcal{O}(S''_0) = \emptyset$, medtem ko po lemi 7.4 dobimo še $\mathcal{G}(S''_1) = \mathcal{G}(P'_2) = 2$. Preostanek leme dokažimo s pomočjo indukcije na n. Baza indukcije za $n = 2$ drži, saj po lemi 7.6 sledi $\mathcal{G}(S''_2) = \text{mex}\{\mathcal{G}(S'''_2), \mathcal{G}(S''_1)\} = \text{mex}\{0, 2\} = 1$.

Naj bo sedaj $n \geq 3$. Na S''_n so zaradi simetričnosti grafa možne tri različne poteze. Prva je izbira x, ki vodi do položaja S'''_n, medtem ko drugi dve, izbira y_i ali z_i za poljuben indeks i, $1 \leq i \leq n$, vodita do položaja S''_{n-1}. Po lemi 7.6 in indukcijski predpostavki potem dobimo

$$\mathcal{G}(S''_n) = \text{mex}\{\mathcal{G}(S'''_n), \mathcal{G}(S''_{n-1})\} = \text{mex}\{n \bmod 2, (n-2) \bmod 2\} = (n-1) \bmod 2\,.$$

■

Zdaj si poglejmo delno dominiran graf S'_n.

Lema 7.8 *Velja $\mathcal{G}(S'_0) = 1$, $\mathcal{G}(S'_1) = 3$, $\mathcal{G}(S'_2) = 4$ in $\mathcal{G}(S'_n) = 2 + (n+1) \bmod 2$ za vsak $n \geq 3$.*

Dokaz: Po lemi 7.4 dobimo, da je $\mathcal{G}(S'_0) = \mathcal{G}(P'_1) = 1$ in $\mathcal{G}(S'_1) = \mathcal{G}(P'_3) = 3$. Ker je $\mathcal{O}(S'_2) = \{S''_2, S'''_2, P'_2, S'_1\}$, dobimo, da je $\mathcal{G}(S'_2) = \text{mex}\{1, 0, 2, 3\} = 4$. Preostanek leme dokažemo z indukcijo na n. Najprej pokažimo bazo indukcije za $n = 3$. Ker je $\mathcal{O}(S'_3) = \{S''_3, S'''_3, S''_2, S'_2\}$, sledi, da velja $\mathcal{G}(S'_3) = \text{mex}\{0, 1, 1, 4\} = 2$.

Naj bo sedaj $n \geq 4$. Ker so možni položaji iz S'_n enaki $\mathcal{O}(S'_n) = \{S''_n, S'''_n, S''_{n-1}, S'_{n-1}\}$, po lemah 7.6 in 7.7 ter indukcijski predpostavki dobimo

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}(S'_n) &= \text{mex}\{(n-1) \bmod 2, n \bmod 2, (n-2) \bmod 2, 2 + n \bmod 2\} \\
&= \text{mex}\{0, 1, 2 + n \bmod 2\} = 2 + (n+1) \bmod 2\,.
\end{aligned}
$$

■

Na koncu lahko izračunamo še Sprague-Grundyjeva števila pajkov.

Izrek 7.9 *Velja $\mathcal{G}(S_0) = 1$, $\mathcal{G}(S_1) = 2$ in $\mathcal{G}(S_n) = (n-1) \bmod 2$ za vsak $n \geq 2$.*

Dokaz: Po izreku 7.5 sledi, da je $\mathcal{G}(S_0) = \mathcal{G}(P_1) = 1$, $\mathcal{G}(S_1) = \mathcal{G}(P_3) = 2$ in $\mathcal{G}(S_2) = \mathcal{G}(P_5) = 1$. Naj bo sedaj $n \geq 3$. Zaradi simetričnosti grafa S_n je dovolj obravnavati zgolj tri različne začetne poteze oziroma njim pripadajoče položaje. To so poteze na x, y_i in z_i za poljuben $1 \leq i \leq n$. Dobimo torej, da je $\mathcal{O}(S_n) = \{S'''_n, S''_{n-1}, S'_{n-1}\}$, od koder po lemah 7.6, 7.7 in 7.8 sledi $\mathcal{G}(S_n) = (n-1) \bmod 2$, saj je $\mathcal{G}(S'''_n) = \mathcal{G}(S''_{n-1}) = n \bmod 2 \in \{0, 1\}$ ter $\mathcal{G}(S'_{n-1}) \geq 2$. ■

7.3.3 Glavniki

Na koncu si poglejmo še glavnike. To so grafi, definirani na strani 43 v razdelku 3.2 in označeni s $\widetilde{P}_n$. Za razliko od poti, ciklov in pajkov bomo zanje dokazali le, za kateri n ima prvi igralec zmagovalno strategijo.

Izrek 7.10 *Za vsak $n \geq 0$ velja, da je $o(\widetilde{P}_n) = \mathcal{N}$ natanko tedaj, ko je n lih.*

Dokaz: Naj bo $n = 2k + 1$ za neki $k \geq 0$. Dokažimo, da je $\mathcal{G}(\widetilde{P}_n) > 0$. Zadostuje poiskati potezo, ki vodi v položaj s Sprague-Grundyjevim številom 0. Naj bo v vozlišče grafa $\widetilde{P}_n$, ki je od obeh vozlišč stopnje 2 oddaljeno k. Potem lahko na $\widetilde{P}_n | N[v]$ gledamo kot na disjunktno vsoto dveh enakih komponent izomorfnih delno dominiranem grafu $\widetilde{P}_k$ z enim dominiranim vozliščem stopnje 2. Po definiciji je NIM-vsota dveh enakih komponent vedno enaka 0.

Naj bo sedaj $n = 2k$ za $k \geq 0$. Potem ima drugi igralec strategijo, ki mu zagotovi zmago. V dokazu bomo uporabili oznake s slike 3.4 na strani 43. Če prvi igralec igra na vozlišče i oziroma i', $1 \leq i \leq 2k$, potem drugi igralec igra na tak j oziroma j', da je $i + j = 2k + 1$. Potencialno edini problem pri tej strategiji je, če sta v množici $N[k] \cup N[k+1]$ edini nedominirani vozlišči k in $k+1$. Če bi potem prvi igralec igral na k, izbira $k+1$ drugega igralca ne bi bila dovoljena poteza. Ampak do take situacije ne more nikoli priti, saj je v primeru, ko je vozlišče k' dominirano, dominirano tudi vozlišče k, saj lahko k' dominiramo le s potezo na eno izmed vozlišč k ali k'. ∎

S pregledom možnosti lahko poiščemo Sprague-Grundyjeve vrednosti prvih nekaj glavnikov in postavimo naslednjo domnevo.

Domneva 7.11 *Za vsak $n \geq 0$ velja*

$$\mathcal{G}(\widetilde{P}_n) = \begin{cases} 2, & n = 3 \\ n \bmod 2, & n \neq 3 \end{cases} .$$

Literatura

[1] M. H. Albert, R. J. Nowakowski, D. Wolfe, *Lessons in Play*, 2007, A K Peters Ltd.

[2] T. Bartnicki, J. Grytczuk, H. A. Kierstead, X. Zhu, *The map-coloring game*, Amer. Math. Monthly 114 (2007), 793-–803.

[3] C. Berge, *Theory of Graphs and its Applications*, Methuen, London, 1962.

[4] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy, *Winning ways for your mathematical plays*, Vol. 1, (2nd edition) 2001, A K Peters Ltd.

[5] H. L. Bodlaender, D. Kratsch, *Kayles and nimbers*, Journal of Algorithms 43 (2002), 106–119.

[6] H. L. Bodlaender, D. Kratsch, *Exact algorithms for Kayles*, Proceedings of WG 2011, Springer-Verlag, 2011, Lecture Notes in Computer Science 6968, 59–70.

[7] C. L. Bouton, *Nim, a game with a complete mathematical theory*, Ann. of Math. (2) 3 (1901/02), no. 1-4, 35—39.

[8] A. Brandstädt, F.F. Dragan, V.D. Chepoi, V.I. Voloshin, *Dually chordal graphs*, SIAM J. Discrete Math. 11 (1998), 437–455.

[9] B. Brešar, S. Klavžar, D. F. Rall, *Domination game and an imagination strategy*, SIAM J. Discrete Math. 24 (2010), 979–991.

[10] B. Brešar, S. Klavžar, D. F. Rall, *Domination game played on trees and spanning subgraphs*, Discrete Math. 313 (2013) 915–923.

[11] B. Brešar, S. Klavžar, G. Košmrlj, D.F. Rall, *Domination game: extremal families of graphs for 3/5-conjectures*, Discrete Appl. Math. 161 (2013), no. 10-11, 1308–1316.

[12] B. Brešar, P. Dorbec, S. Klavžar, G. Košmrlj, *Domination game: effect of edge- and vertex-removal*, Discrete Math. 330C (2014), 1–10.

[13] Cs. Bujtás, *Domination game on forests*, arxiv:1404.1382, 2014.

[14] E. J. Cockayne, S. T. Hedetniemi, *Towards a theory of domination in graphs*, Networks, (1977), 247–261.

[15] J. H. Conway, *On Numbers and Games*, Academic Press, (2nd edition) 2001, A. K. Peters Ltd.

[16] T. R. Dawson, *Caissa's wild roses*, 1935, ponatis v *Five Classics of Fairy Chess*, Dover Publication, Inc., 1973.

[17] C. F. De Jaenisch, *Applications de l'Analyse mathematique an Jen des Echecs*, 1862.

[18] P. Dorbec, G. Košmrlj, G. Renault, *The domination game played on unions of graphs*, Discrete Math. 338 (2015) 71–79.

[19] H. E. Dudeney, *Canterbury Puzzles*, London, 1910, 118, 220.

[20] R. Fleischer, G. Trippen, *Kayles on the way to the stars*, Proceedings of CG 2004, LNCS 3846, Springer, 232–245.

[21] M. Gardner, *Mathematical games*, Sci. Amer. 244 (1981), 18-–26.

[22] P. M. Grundy, *Mathematics and games*, Eureka, 2:6–8, 1939.

[23] A. Guignard, E. Sopena, *Compound Node-Kayles on paths*, Theoretical Computer Science 410 (2009), 2033–2044.

[24] R. Hammack, W. Imrich, S. Klavžar, *Handbook of product graphs*, CRC Press, Boca Raton, 2011.

[25] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, P.J. Slater (Eds.), *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1998.

[26] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, P.J. Slater (Eds.), *Domination in Graphs: Advanced Topics*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1998.

[27] M. Henning, osebna komunikacija, 2014.

[28] W. B. Kinnersley, osebna komunikacija, 2012.

[29] W. B. Kinnersley, D. B. West, R. Zamani, *Game domination for grid-like graphs*, rokopis, 2012.

[30] W. B. Kinnersley, D. B. West, R. Zamani, *Extremal problems for game domination number*, SIAM J. Discrete Math. 27 (2013) 2090–2107.

[31] G. Košmrlj, *Realizations of the game domination number*, J. Comb. Optim. 28 (2014) 447–461.

[32] S. Loyd, *Cyclopedia of Tricks and Puzzles*, New York, 1914, 232.

[33] B. McKay, Trees, `http://cs.anu.edu.au/people/bdm/data/trees.html`, dostop 10.1.2014.

[34] O. Ore, *Theory of Graphs*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 38, 1962.

[35] T. J. Schaefer, *On the complexity of some two-person perfect-information games*, Journal of Computer and System Sciences 16 (1978), 185–225.

[36] R. Sprague, *Über mathematische Kampfspiele*, Tôhoku Math. J. (1936), 438-–444.

[37] D. P. Sumner, E. Wojcicka, *Graphs critical with respect to the domination number*, in: T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater (Eds.), *Domination in Graphs: Advanced Topics*, Marcel Dekker, New York, 1998, 439–469, Chapter 16.

[38] V. G. Vizing, *Some unsolved problems in graph theory*, Uspehi Mat. Nauk (1968), 117–134.

[39] R. Zamani, *Hamiltonian cycles through specified edges in bipartite graphs, domination game, and the game of revolutionaries and spies*, Ph. D. Thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, Pro-Quest/UMI, Ann Arbor (Publication No. AAT 3496787), 2011.