

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA MATEMATIKO

Katja Berčič

Konstrukcije in katalogizacija simetričnih grafov

Doktorska disertacija

MENTOR: prof. dr. Primož Potočnik

Ljubljana, 2015

Staršem.

*Mentorju,
za izreden trud in potrpljenje.*

Janu, Davidu in Marku.

Izjava o avtorstvu

Podpisana Katja Berčič izjavljam:

- da sem doktorsko disertacijo z naslovom Konstrukcije in katalogizacija simetričnih grafov izdelala samostojno pod mentorstvom prof. dr. Primoža Potočnika in
- da Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani dovoljujem objavo elektronske oblike svojega dela na spletnih straneh.

Ljubljana, 30. april 2014

Podpis:

Povzetek

Klasifikacija simetričnih grafov je obsežno delo, ki se je začelo v šestdesetih letih prejšnjega stoletja. Od takrat je bilo na to temo napisanih veliko člankov, področje pa je še vedno aktivno. Največ je bilo narejenega na temo simetričnih grafov stopnje 3, vključno s prvim katalogom simetričnih grafov, ki ga poznamo pod imenom Fosterjev cenzus. Fokus raziskovanja se je v zadnjem času premaknil na področje grafov stopnje 4.

V disertaciji preučujemo ločno tranzitivne grafe stopnje 4 in z njimi povezane digrafe stopnje 2, katerih red ima preprost praštevilski razcep. Postavimo jih v širši okvir simetričnih grafov in predstavimo znane rezultate. V literaturi se klasifikacije pojavljajo v različnih oblikah, nekatere družine grafov in posamezni grafi pa pod raznovrstnimi oznakami, zato v prvem poglavju pregledamo znane klasifikacije ločno tranzitivnih in $1/2$ -ločno tranzitivnih grafov stopnje 4 in jih zapišemo v enotnem jeziku.

Eno poglavje je v celoti namenjeno predstavitvi dveh pripomočkov pri klasificiranju simetričnih grafov. V prvem delu zapišemo definicije krovov in kvocientov za grafe in digrafe, skupaj z nekaj priročnimi rezultati. Preostanek je namenjen povzetku teorije o izmeničnih ciklih in alter-eksponentih, ki jo s pridom uporabimo v dokazu izreka za digrafe.

Kot zgled uporabe kvocientne metode s polenostavnimi grupami nato dokončamo klasifikacijo ločno tranzitivnih grafov stopnje 4 in reda $2pq$ (za različni lihi praštevili p in q), ki je bila do sedaj narejena le za ločno regularne grafe. V naslednjem poglavju s pridom uporabimo teorijo izmeničnih ciklov, da dokažemo klasifikacijo ločno tranzitivnih digrafov stopnje 2 nekaterih redov s predpisanim praštevilskim razcepom. Zadnje poglavje je prispevek h katalogu digrafov stopnje 2.

Math. Subj. Class. (2010): 05C25, 05C20, 05C75, 20B25, 05C38

Ključne besede: ločno tranzitiven graf, ločno tranzitiven digraf, ločno regularen digraf, graf stopnje 4, digraf stopnje 2.

Abstract

Classification of symmetric graphs is an extensive project started in the sixties. Since then, many articles have been published on this topic and the area is still very much active. Much of the research has been dedicated to cubic symmetric graphs, including the first census of symmetric graphs, known as the Foster census. Recently, researchers have been focusing on tetravalent graphs.

In this disertation we will study tetravalent arc-transitive graphs with a simple prime factorization of the order and related digraphs of valency 2. We frame them in the wider context of symmetric graphs and present some known results. Since classifications appear in different forms in the literature, with varied notations for certain families and graphs, we put some effort into a consistent notation, which we then use in the overview of existent classificatons of arc-transitive and $1/2$ -arc-transitive tetravalent graphs.

We dedicate a whole chapter to two tools commonly used in classification of symmetric graphs. First, we define covers and quotients for graphs and digraphs and present some useful results. Then we summarize the theory of alter-relations and alter-exponents, to be used later in proving our result about digraphs.

As an example of the quotient method with semisimple groups we then finish the clasification of tetravalent arc-transitive graphs and order $2pq$ (for distinct primes p and q), which until know existed only for arc-regular graphs. In the following chapter we take advantage of the theory of alter-relations and alter-exponents to prove a classifications of arc-transitive digraphs of valency 2 of orders with a certains prime factorization. The last chapter is a contribution to the census of digraphs of valency 2.

Math. Subj. Class. (2010): 05C25, 05C20, 05C75, 20B25, 05C38

Keywords: arc-transitive graph, arc-transitive digraph, arc-regular digraph, 4-valent graph, 2-valent digraph.

Kazalo

1	Uvod	1
2	Pregled obstoječih rezultatov	5
2.1	Klasifikacije s predpisanim praštevilskim razcepom reda grafa	6
2.2	Grafi stopnje 4	8
2.3	Digrafi in $1/2$ -ločno tranzitivni grafi	11
2.4	$1/2$ -ločno tranzitivni grafi stopnje 4	13
3	Definicije	17
4	Nekateri grafi in digrafi	21
4.1	Neenostavni digrafi	22
4.2	Družina grafov praštevilskega reda in nekatere razširitve	23
4.3	Delni povezavni grafi in Praeger-Xu digrafi	24
4.4	Metacirkulanti	26
4.5	Družine Cayleyevih grafov	27
4.6	Družine grafov iz [35, Lemma 8.4, 8.7]	30
4.7	Ostale družine in nekateri posamezni grafi	31
5	Metode	33
5.1	Krovi in kvocienti	33

5.2	Izmenični cikli, alter-eksponenti, radij in obseg	35
6	Ločno tranzitivni grafi stopnje 4 reda dvakratnik dveh praštevil	41
6.1	Opisi grafov iz tabel	41
6.2	Grafi stopnje 4, ki dopuščajo ločno tranzitivna delovanja polenostavnih grup . .	42
6.3	Dokaz glavnega rezultata	45
7	2-ločno tranzitivni digrafi stopnje 2 nekaterih redov	49
7.1	Dokaza glavnih rezultatov	52
8	$(2, *)$-grupe, LR digrafi in PR grafi	61
8.1	Ločno tranzitivni digrafi $(2, *)$ -grup	62
8.2	O katalogu	64
A	Preglednica manjših grafov	69
	Literatura	73

1. poglavje

Uvod

Pojem simetričnega grafa je imel zgodovinsko gledano več pomenov; včasih so tako rekli grafom, katerih grupa avtomorfizmov deluje tranzitivno na vozliščih in povezavah, najbolj pogosto pa so bili mišljeni grafi, katerih grupa avtomorfizmov deluje tranzitivno na urejenih parih sosednjih vozlišč. Danes se pojem včasih uporablja tudi, kadar ni mišljena določena vrsta simetrije.

Zanimanje za simetrične grafe gotovo seže vsaj do začetka dvajsetega stoletja, saj je že v tridesetih letih Ronald M. Foster začel zbirati primere majhnih simetričnih grafov stopnje tri. Leta 1988 so objavili tedanjo verzijo Fosterjevega cenzusa, v katerem so bili vključeni grafi do reda 512. Katalog je že takrat vseboval konstrukcijo večine grafov in nekatere podatke, ni pa še bilo eksplicitnega zapisa vseh vključenih grafov. Originalni katalog je bil skoraj popoln, saj je v njem do vključno reda 512 manjkalo le deset grafov.

V šestdesetih letih prejšnjega stoletja so se pojavili prvi rezultati v zvezi s simetričnimi grafi, na katerih so temeljile kasnejše klasifikacije. Ne presenetljivo so bili najprej klasificirani simetrični grafi praštevilskega reda, tem pa so sledili še drugi razredi grafov. V novejših klasifikacijah je bolj pogosto kot o simetričnih grafih govora na primer o vozliščno, povezavno, ločno ali $1/2$ -ločno tranzitivnih grafih. V pregledu rezultatov se bomo omejili na klasifikacije s predpisanim praštevilskim razcepom, pri katerih je ponavadi določena tudi stopnja grafov — klasifikacije te vrste so ena od popularnejših vej klasifikacij simetričnih grafov.

Najbolje so raziskani simetrični grafi stopnje 3, v zadnjem času pa je bilo več zanimanja za grafe stopnje 4. Na to področje spadata tudi glavna rezultata, ki ju bomo dokazali v tem delu. V 6. poglavju bomo zaključili bomo klasifikacijo ločno tranzitivnih grafov stopnje 4, katerih red je dvakratnik produkta dveh praštevil — za ta red so bili do sedaj klasificirani le

ločno regularni grafi. Naj bosta torej p in q različni lihi praštevili. Pokazali bomo, da je vsak ločno tranzitiven graf stopnje 4 in reda $2pq$, ki ni ločno regularen, bodisi izomorfen $PX(pq, 1)$, bodisi je izomorfen enemu od grafov v tabeli 6.1 ali enemu od grafov $D(F_{14})$, \mathcal{X}_4^{182} ali \mathcal{X}_6^{506} (glej izrek 6.1). Ta rezultat je bil objavljen v članku Berčič, Ghasemi, Tetravalent arc-transitive graphs of order twice a product of two primes [5].

Z naslednjim rezultatom (poglavje 7), sicer zapisanim za digrafe, pripravimo teren za morebitno kasnejšo klasifikacijo neusmerjenih grafov; klasificirali bomo povezane ločno tranzitivne digrafe stopnje dva za nekatere rede s tremi praštevili delitelji. Na problem klasifikacije odgovorimo v dveh delih. Prvi del (glej izrek 7.1, [6]) opiše primer, ko je digraf z $2^a q^b p^c$ vozlišči 2-ločno G -tranzitiven za neko nerešljivo grupo G , kjer so a, b in c števila, ki zadoščajo pogojem $a \in \{0, 1, 2, 3\}$, $b, c \in \{0, 1, 2\}$ in $(b, c) \neq (2, 2)$, p in q pa sta različni lihi praštevili. Dokažemo, da je v tem primeru red digrafa kvečjemu 1224 in zapišemo vseh sedeminšestdesetih takih digrafov v tabelo 7.1. V drugem delu (glej izrek 7.2, [6]) opišemo še primer, ko je digraf 2-ločno G -tranzitiven za neko rešljivo grupo G . Dodatno predpostavimo, da za red digrafa velja ena od naslednjih trditev.

- (i) n je lih in ni deljiv s tretjo potenco kakega praštevila,
- (ii) $n = 2^a m$, kjer je $a \in \{1, 2, 3\}$ in m liho število, ki ni deljivo s kvadratom kakega praštevila,
- (iii) $n = 2^a q^b p^2$, kjer je $a \in \{1, 2, 3\}$, $b \in \{0, 1\}$ in sta q in p različni lihi praštevili.

Tedaj se izkaže, da je bodisi digraf izomorfen $\overrightarrow{PX}(t, s)$ za nek $t \geq 1$ in $s \geq 0$, bodisi velja pogoj iz zadnje od zgornjih treh trditev, G ima podgrupo Sylowa P , ki je edinka, elementarno abelska reda p^2 in velja, da je kvocient digrafa po P izomorfen $\overrightarrow{PX}(t, s)$ za nek $t \geq 1$ in $s \geq 0$. V slednjem primeru se bomo sklicali na dobro znano teorijo dvigovanja grup vzdolž elementarno abelskih krovnih projekcij, s pomočjo katere bi bilo mogoče določiti vse krovne digrafe za izbrane (a, b, c) . Ta rezultat je opisan tudi v članku Berčič, Potočnik, Two-arc-transitive two-valent digraphs of certain orders [6], ki je bil sprejet v objavo v *Ars Mathematica Contemporanea*.

Po uvodu pregledamo znane rezultate, ki se dotikajo teme te disertacije. Zaradi obilja rezultatov na tem področju se omejimo skoraj izključno na klasifikacije grafov stopnje 4 s predpisanim redom. Kljub temu na začetku navedemo nekaj splošnejših rezultatov in namignemo na sorodne klasifikacije, npr. Cayleyevih grafov. Nato se podrobno spustimo v pregled klasifikacij ločno tranzitivnih grafov stopnje 4, katerih red ima predpisan praštevili razcep; in sicer povzamemo klasifikacije za ločno tranzitivne grafe stopnje 4 za vse rede oblike $p, 2pq$ ali kp^ϵ , kjer je k bodisi 4 bodisi praštevilo $q \neq p$ in $\epsilon \in \{1, 2\}$. Zanimali nas bodo tudi digrafi stopnje 2, ki so v tesni zvezi z $1/2$ -ločno tranzitivnimi grafi stopnje 4, zato je drugi del pregleda posvečen najprej pregledu rezultatov s tega področja, nato pa še pregledu posameznih klasifikacij $1/2$ -ločno tranzitivnih grafov.

Ker imamo v delu opravka tako z grafi kot z digrafi, v poglavju z definicijami poskrbimo, da izrazi, ki jih uporabljamo, delujejo tako za ene kot za druge. S tem tudi pripravimo teren za manjkajoče definicije grafov in družin grafov iz pregleda. Posebno pozornost namenimo družinama grafov \overrightarrow{PX} in PX , ki bosta igrali pomembno vlogo v obeh glavnih rezultatih.

V poglavju Metode predstavimo teorijo krovov in kvocientov, ter teorijo izmeničnih ciklov, s čimer imamo do 6. poglavja pripravljeno vse potrebno, da dokažemo napovedana rezultata. V zadnjem poglavju uporabimo katalog $(2, *)$ -grup, da pripravimo katalog z njimi povezanih digrafov; natančneje, digrafov stopnje 2, ki dopuščajo ločno regularno grupo avtomorfizmov.

Končno v dodatku naredimo povzetek vseh manjših grafov, ki smo jih omenili, in naštejemo njihove indekse v katalogih, kjer se pojavijo. Mnogi od teh grafov se pojavljajo tudi v literaturi (še posebej klasifikacijah) pod mnogimi oznakami, ki jih zaradi preglednosti na tem mestu zapišemo.

2. poglavje

Pregled obstoječih rezultatov

Zgodovinsko je bil eden od prvih rezultatov o simetričnih grafih Tuttov [119]; ta je pokazal, da s -ločno tranzitivni grafi stopnje 3 ne obstajajo za $s \geq 6$. Šele mnogo let kasneje je ta rezultat razširil Weiss [125], ko je dokazal, da s -ločno tranzitivni grafi poljubnih stopenj ne obstajajo za $s \geq 8$. Primere s -ločno tranzitivnih grafov za velike s so iskali na primer Conder, Li in drugi [13, 17, 54].

Tuttu lahko pripišemo tudi prvi znan rezultat, ki poveže vozliščno in povezavno tranzitivne grafe: vsak vozliščno in povezavno tranzitiven graf lihe stopnje je ločno tranzitiven [119, str. 59]. To sledi iz splošnejšega dejstva, da ima grupa avtomorfizmov grafa, ki deluje tranzitivno na vozliščih in povezavah, ne pa tudi lokih, nujno dve orbiti na množici lokov, kjer vsaka orbita vsebuje natanko en lok za vsako povezavo — v tem primeru rečemo, da grupa deluje $1/2$ -ločno tranzitivno na grafu. Tuttovega rezultata ni moč razširiti na grafe sode stopnje: prvi protiprimer je objavil Bouwer [10], ki je konstruiral $1/2$ -ločno tranzitivne grafe stopnje $2k$ za vsak $k \geq 2$. V resnici se je prvi protiprimer skrival že v prvem konstruiranem ločno regularnem kubičnem grafu (na 432 vozliščih) [34], saj je povezavni graf vsakega ločno regularnega kubičnega grafa $1/2$ -ločno tranzitiven graf stopnje 4 [84]. Več o $1/2$ -ločno tranzitivnih grafih bomo povedali v nadaljevanju.

Ker so edini simetrični grafi stopnje 2 cikli, je prva zanimiva stopnja 3 — ni presenetljivo, da se je med ločno tranzitivnimi grafi največ študiralo ravno grafe te stopnje [19, 86, 118]. Kot primere klasifikacij lahko navedemo na primer klasifikacije trivalentnih ločno tranzitivnih grafov reda kp za $k \leq 10$ [26, 27, 28, 29]. Kot omenjeno že v uvodu, se je v zadnjem času veliko pozornosti posvečalo grafom stopnje 4. Konkretnije, v [92, 126] so se ukvarjali z 2-ločno tranzitivnimi grafi stopnje 4 in v [35, 36, 85, 94] z ločno tranzitivnimi grafi, ki niso 2-ločno tranzitivni. Li in soavtorji so klasificirali vozliščno primitivne, ločno tranzitivne grafe stopnje 3 in 4 [57].

Preden začnemo s klasifikacijami s predpisanim redom, omenimo še nekaj rezultatov o cirkulantih (Cayleyevih grafih cikličnih grup) in Cayleyevih grafih stopnje 4. Tako prve kot druge bomo ponovno srečali tudi v nadaljevanju. Znano je, da so vsi ločno tranzitivni grafi reda p cirkulanti, prav tako pa so cirkulanti tudi ločno regularni grafi reda $2p$ [12, 69]. Izkaže se, da so cirkulanti vsi ločno regularni grafi reda pq za poljubni (morda enaki) praštevili p in q . Ločno regularni grafi reda p^2 so Caylejevi grafi komutativnih grup; vsaka p -podgrupa Sylowa v njihovih grupah avtomorfizmov je reda p^2 in torej regularna na vozliščih, po [130] pa je tak graf tudi cirkulant. Za različni lihi praštevili so ločno regularni grafi reda pq neprimitivni po [109, 124] in zato cirkulanti po [79, 107, 124].

Za končne komutativne grupe so klasificirani vsi ločno tranzitivni Caylejevi grafi [130] stopnje kvečjemu 4. Za končne nekomutativne grupe pa sta klasificirana razreda povezavno tranzitivnih grafov, katerih red ne vsebuje kvadrata kakega praštevila (dokažejo, da so bodisi ločno bodisi povezavno regularni [56]) in grafi z lihim številom vozlišč [58]. Klasifikacijo ločno regularnih Cayleyevih grafov stopnje 4 na diedrskih grupah je mogoče dobiti iz [53, 123].

Nadaljevali bomo s klasifikacijami ločno tranzitivnih grafov s predpisano stopnjo in obliko reda.

2.1 Klasifikacije s predpisanim praštevilskim razcepom reda grafa

Ker bomo v nadaljevanju govorili o grafih s predpisanim praštevilskim razcepom reda, privzemimo že zdaj, da sta p in q (različni, lihi) praštevili. Chao [11] ter Cheng in Oxley [12] so neodvisno od stopnje klasificirali vse povezane in nepovezane grafe redov p in $2p$, katerih grupa avtomorfizmov je tranzitivna na vozliščih in povezavah. Še pred Chaom je Turner [117] klasificiral vozliščno tranzitivne grafe praštevilskega reda in postavil hipotezo o tem, kateri od njih so povezavno tranzitivni. Leto za Chaom je Berggren [8] poenostavil dokaz klasifikacije grafov praštevilskega reda. Za grafe reda $2p$ sta Chen in Oxley med drugim pokazala, da so vsi, ki so vozliščno in povezavno tranzitivni, tudi ločno tranzitivni.

Med klasifikacijo grafov praštevilskega reda in grafov reda $2p$ je minilo več kot desetletje, saj je bil za slednjo potreben rezultat Liebecka in Saxla [60], ki sta klasificirali vse primitivne grupe reda mp , kjer je m neko število in $m < p$. S pomočjo tega rezultata bi bilo mogoče brez večjih težav klasificirati ločno tranzitivne grafe reda mp , kjer je m neko število in $m < p$, katerih grupa avtomorfizmov deluje primitivno na vozliščih, kar pa ne velja za neprimitivne grafe; za te so potrebna druga orodja. V splošnejšem kontekstu so Toida ter Alspach in Sutcliffe [3] neodvisno postavili hipotezo o karakterizaciji vozliščno tranzitivnih grafov reda $2p$. Karakterizacijo je dokazal Marušič [69] za določene šibke pogoje na p . Ker po klasifikaciji enostavnih grup ne obstaja enostavno primitivna grupa stopnje $2p$ za praštevilo p večje od 5 [60], lahko rezultate združimo v klasifikacijo vseh vozliščno tranzitivnih grafov reda $2p$. Izkaže se, da so vsi ti grafi

metacirkulanti.

Naslednji korak so grafi, katerih red je produkt dveh lihih praštevil. V posebnem primeru, ko je red grafa enak p^2 , je znano, da so vsi vozliščno tranzitivni grafi tega reda Cayleyevi [70]. Situacija je bolj kompleksna, kadar imamo opravka z redom, ki je produkt dveh različnih praštevil. Za red $3p$ sta klasifikacijo naredila že Wang in Xu [124] — tu uporabljeno metodo so uspešno uporabili tudi za klasifikacijo ločno tranzitivnih grafov reda pq [107].

Grafi z redi pq so bili neodvisno klasificirani veliko splošneje, v okviru vseh vozliščno tranzitivnih grafov. Alspach in Parsons [2] sta definirala velik razred takih grafov — metacirkulante (glej 4.4). Marušič in Scapellato [77, 78] sta pokazala, da je vsak vozliščno tranzitiven neprimitiven graf na pq vozliščih enak bodisi nekemu (q, p) -metacirkulantu bodisi grafu iz družine [2], za katero je značilno, da njihove grupe avtomorfizmov vsebujejo $SL(2, q)$, ki na vozliščih deluje tranzitivno, kjer je p oblike $2^{2^s} + 1$ in q deli $2^{2^s} - 1$.

Ta klasifikacija žal ni v pomoč pri klasificiranju ločno tranzitivnih grafov reda pq , saj ni jasno, ali grupa avtomorfizmov (q, p) -metacirkulanta vsebuje podgrupo G , ki je ločno tranzitivna na Γ in ima sistem blokov sestavljen iz p -tih blokov velikosti q . Prav tako ni jasno, ali imajo grafi reda pq iz [78] grupo avtomorfizmov, ki vsebuje $SL(2, q)$ kot pravo podgrupo — zato so v analizi vseh neprimitivnih, ločno tranzitivnih grafov reda pq [107] vključili tudi potrebno analizo metacirkulantov in grafov povezanih z $SL(2, q)$. Ta analiza skupaj s sorodnim rezultatom za primitivne grafe [109] zaključí uporabnejšo klasifikacijo ločno tranzitivnih grafov reda pq . V slednjem delu sta avtorja določila tudi, kateri grafi so Cayleyevi za grupe reda pq , in klasificirala vse povezavno tranzitivne digrafe reda pq , za katere je sosednost antisimetrična relacija. Klasifikaciji vozliščno primitivnih in vozliščno primitivnih, ločno tranzitivnih grafov reda pq sta povezani, vendar ni nobena posledica druge; za dan vozliščno primitiven graf namreč ni lahko določiti, ali grupa avtomorfizmov deluje tranzitivno na lokih. Obratno je seveda jasno, da s klasificiranjem ločno tranzitivnih, vozliščno primitivnih grafov dobimo precej, ne pa vseh, vozliščno primitivnih grafov tako, da opazujemo unije ločno tranzitivnih grafov s trivialnimi preseki množic povezav.

V nadaljnjih klasifikacijah je omejitev na obliko reda presplošna, zaradi česar so avtorji poleg oblike reda omejili tudi stopnjo. Feng in njegovi soavtorji so v [24, 29, 25, 28] klasificirali vse kubične s -ločno tranzitivne grafe redov np za $n = 4, 6, 8, 10$, v [26] pa so klasificirali kubične s -ločno tranzitivne grafe reda $2p^2$ kot posledico klasifikacije grup avtomorfizmov kubičnih s -ločno tranzitivnih grafov reda potence praštevila.

Klasifikacije ločno regularnih grafov stopnje 4 in redov $4p^2$, $6p^2$ in $2pq$ so opisane v [23, 40, 132], delno pa so klasificirani tudi grafi reda $3p^2$ [38]. Zhou in Feng sta klasificirala vse ločno regularne grafe reda $2pq$ in stopnje 4 [132]. V poglavju 6 zaključimo klasifikacijo vseh ločno tranzitivnih grafov stopnje 4 in reda dvakrat produkt dveh praštevil, za katero potrebujemo klasifikacijo končnih enostavnih grup. Ločno tranzitivne grafe stopnje 4 in reda $4p$ je klasificiral

Zhou [131]; iz klasifikacije med drugim sledi, da so z izjemo dveh grafov redov 8 in 28 vsi taki grafi 1-ločno tranzitivni. Ta rezultat skupaj z rezultatom [32] za $1/2$ -ločno tranzitivne grafe reda $4p$ zaključi tudi klasifikacijo grafov reda $4p$, ki so vozliščno in povezavno tranzitivni.

2.2 Grafi stopnje 4

Ločno tranzitivni grafi z enostavnejšimi praštevilskimi razcepi redov (t.j. p in pq za $q \geq 2$) so že bili klasificirani neodvisno od stopnje. Skupaj s klasifikacijami (nekaterimi za zdaj le delnimi) grafov stopnje 4 za rede $4p, 2p^2, 3p^2, 4p^2, qp^2, 2pq$ so torej skoraj v celoti klasificirani grafi stopnje 4 za vse rede oblike $p, 2pq$ ali kp^ϵ , kjer je k bodisi 4 bodisi praštevilo $q \neq p$ in $\epsilon \in \{1, 2\}$. Zaradi preglednosti je vključen tudi rezultat o ločno tranzitivnih grafih stopnje 4 in reda $2pq$, ki ga bomo dokazali v 6. poglavju.

Za družine in posamezne grafe manjših redov bomo v sledečem pregledu uporabljali enotne oznake, ki jih bomo podrobneje opisali in definirali v naslednjih poglavjih. V poglavju 4 definiramo vse v pregledu omenjene družine, kjer zapišemo tudi oznake, pod katerimi so bile vpeljane.

V pregledu se bomo najprej srečali z družino grafov $G(p, 4)$ praštevilskih redov, ki jo bomo definirali v poglavju 4.2, kjer bomo opisali tudi družini $G(2p, 4)$, $G(p, 2, 2)$ in $G(3p, 2)$. Grafe, ki jih bomo označili s PX, sta najprej raziskovala Praegerjeva in Xu v okviru enostavnih grafov [109]; definirali jih bomo v poglavju 4.3. Družine Cayleyevih grafov bomo označevali s \mathcal{C}_n^i in jih definirali v poglavju 4.5. Za opisa družin $C^{\pm 1}(p; 4, 2)$ in $C^{\pm \epsilon}(p; 4, 2)$ bralca napotimo k izvornemu članku [35], podobno za grafe $G(qp; 2, 2, 2)$ in $G(qp; 4, 1, 1)$ [107, 3.4]. Družine grafov $\mathcal{G}_{4p^2}^0, \mathcal{G}_{4p^2}^1$ in $\mathcal{G}_{2p^3}^3$ bomo definirali v poglavju 4.

Kjer je mogoče, so posamezni grafi označeni z oznakami \mathcal{X}_i^n : to so grafi, ki se pojavljajo pod oznako AT4val[n, i] v katalogu [97, 95], pri čemer n predstavlja red grafa, i pa je njegovo zaporedno število med grafi reda n v katalogu; nekaj več besed katalogom namenimo v 4. poglavju. V preglednici v dodatku A povzamemo oznake teh grafov v katalogih in literaturi.

(p) Vsi ločno tranzitivni grafi stopnje 4 praštevilškega reda so ločno regularni in pripadajo družini $G(p, 4)$, $p \equiv 1 \pmod{4}$ [11], opisani v 4.2.

(2p) Vsak ločno tranzitiven graf stopnje 4 reda $2p$ je izomorfen enemu od naslednjih [12]:

- (i) $G(2p, 4)$ za $p \equiv 1 \pmod{4}$ (2-ločno tranzitiven je le $G(10, 4) \cong K_{5,5} - 5K_2$ [133]);
- (ii) $PX(p, 1)$ za liha praštevila p ;
- (iii) \mathcal{X}_2^{14} (neincidenčni graf $PG(2, 2)$) ali \mathcal{X}_3^{26} (incidenčni graf $PG(2, 3)$), ki sta 2-ločno in 4-ločno tranzitivna [133].

- (3p) Vsak ločno tranzitiven graf stopnje 4 reda $3p$ je izomorfen enemu od naslednjih [124]:
- (i) $G(3p, 2)$ za liha praštevila p (vsi ti grafi so ločno regularni);
 - (ii) $PX(3, 1)$, 3×3 mreža \mathcal{X}_1^9 , povezavni graf Petersenovega grafa \mathcal{X}_1^{15} ali povezavni graf Heawoodovega grafa \mathcal{X}_1^{21} .
- (4p) Vsak ločno tranzitiven graf stopnje 4 reda $4p$ je izomorfen enemu od naslednjih grafov [131]:
- (i) \mathcal{X}_3^{28} ,
 - (ii) $PX(2^{3-s}p, s)$ za $s \in \{1, 2\}$ in $p \geq 2$,
 - (iii) $\text{Cay}(\mathbf{Z}_{2p} \times \mathbf{Z}_2, \{a, a^{-1}, a^{w^i}b, a^{-w^i}b\})$ za $i \in \{1, 2\}$, kjer je $\mathbf{Z}_{2p} \times \mathbf{Z}_2 = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$.
- (p^2) Vsi ločno tranzitivni grafi stopnje 4 reda p^2 so Cayleyevi [70].
- ($2p^2$) Vsak ločno tranzitiven graf stopnje 4 reda $2p^2$ je izomorfen enemu od spodnjih grafov [133, Theorem 3.3]:
- (i) $PX(p^2, 1)$ za $p \geq 2$,
 - (ii) Cayleyevi grafi $\mathcal{C}_{2p^2}^1$ (4.4) definirani na ciklični grupi reda $2p^2$,
 - (iii) Cayleyevi grafi $\mathcal{C}_{2p^2}^2$ (4.5) definirani na grupi $\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_2$ in
 - (iv) Cayleyevi grafi $\mathcal{C}_{2p^2}^3$ (4.6) definirani na posplošeni diedrski grupi reda $2p^2$.
- ($3p^2$) Vsak ločno tranzitiven graf stopnje 4 reda $3p^2$ je izomorfen enemu od naslednjih grafov [38, 39]; z izjemo \mathcal{X}_2^{12} in \mathcal{X}_1^{27} so vsi ločno regularni, kar za $p > 13$ velja po [39], za $p \leq 13$ pa podatek poiščemo v katalogu [97, 95].
- (i) \mathcal{X}_1^{12} , \mathcal{X}_2^{27} ali \mathcal{X}_i^n za $n \in \{75, 147, 363, 507\}$ in $i \in \{1, 2, 3\}$;
 - (ii) $\text{Cay}(G, \{y, y^{-1}, xy, x^{-1}y^{-1}\})$ za $G = \langle x, y | x^p = y^{6p} = [x, y] = 1 \rangle$;
 - (iii) eden od grafov iz [35, Lemma 8.4];
 - (iv) eden od Cayleyevih grafov, definiranih na ciklični grupi (cirkulanti).
- ($4p^2$) Vsak ločno tranzitiven graf stopnje 4 in reda $4p^2$ je izomorfen enemu od naslednjih grafov [41, Theorem 4.3], pri čemer so grafi iz družin (v)-(vii) ločno regularni.
- (i) \mathcal{X}_1^{16} , ki je 2-ločno tranzitiven,
 - (ii) \mathcal{X}_2^{16} , eden od grafov \mathcal{X}_i^{36} ali eden od grafov \mathcal{X}_j^{100} , kjer sta $i \leq 6$ in $j \leq 7$ pozitivni števili. Med temi grafi sta le \mathcal{X}_3^{36} in \mathcal{X}_4^{36} ločno regularna;

- (iii) $PX(2^{3-s}p^2, s)$, $s \in \{1, 2\}$;
- (iv) $C^{\pm 1}(p; 4, 2)$ ali $C^{\pm \epsilon}(p; 4, 2)$ iz [35];
- (v) družini grafov $\mathcal{G}_{4p^2}^0$ (4.18) ali $\mathcal{G}_{4p^2}^1$ (4.19);
- (vi) Cayleyevi grafi $\mathcal{C}_{4p^2}^0$ (4.10) definirani na grupi $\mathbf{Z}_{2p^2} \times \mathbf{Z}_2$,
- (vii) Cayleyevi grafi $\mathcal{C}_{4p^2}^1$ (4.11) ali $\mathcal{C}_{4p^2}^2$ (4.12) definirani na grupi $\mathbf{Z}_{4p} \times \mathbf{Z}_p$.

(pq) Naj za praštevili q in p velja $q < p$. Vsak ločno tranzitiven graf stopnje 4 in reda pq je izomorfen enemu od naslednjih grafov.

- (i) $G(p, 2)[3K_1] - 3G(p, 2)$ [107, 3.3],
- (ii) $G(qp; 2, 2, 2)$ in $G(qp; 4, 1, 1)$ [107, 3.4],
- (iii) \mathcal{X}_1^{15} , Marušič–Scapellato graf $X(2, 3, \emptyset, \{0\})$ [107, 3.8],
- (iv) vozliščno primitivni grafi \mathcal{X}_1^{21} , \mathcal{X}_2^{55} , \mathcal{X}_2^{253} (Cayleyevi) ali \mathcal{X}_1^{15} , \mathcal{X}_2^{35} [109, Table I].

($2pq$) Vsi ločno regularni grafi reda $2pq$ in stopnje 4 so izomorfnii enemu od spodnjih grafov [132]; za opise glej 4.5.

- (i) Cayleyevi grafi $\mathcal{C}_{2p^2}^3$ 4.6.
- (ii) Cayleyevi grafi \mathcal{C}_{2pq}^i definirani na ciklični grupi reda $2pq$ za $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.
- (iii) Cayleyevi grafi \mathcal{C}_{4p}^i definirani na grupi $\mathbf{Z}_{2p} \times \mathbf{Z}_2$ za $i \in \{0, 1\}$.
- (iv) Cayleyevi grafi \mathcal{C}_{2pq}^i , $i \in \{0, 1\}$ definirani na diedrski grupi reda $2pq$.
- (v) \mathcal{X}_1^{12} , \mathcal{X}_5^{30} , \mathcal{X}_7^{30} ali \mathcal{X}_8^{30} .

Ostali grafi reda $2pq$ in stopnje 4 so izomorfnii enemu od spodnjih grafov.

- (i) $PX(pq, 1)$,
- (ii) grafi iz tabele 6.1, $D(F_{14})$ na 42 vozliščih (poglavje 6.1), \mathcal{X}_4^{182} ali \mathcal{X}_6^{506} .

(p^2q) Ločno regularni grafi reda p^2q in stopnje 4 so izomorfnii enemu od spodnjih grafov [90, Theorem 5.3]; v tej klasifikaciji sicer niso opisane vse možne konstrukcije za Cayleyeve grafe, podan pa je splošen opis.

- (i) \mathcal{X}_i^{45} , kjer je $i \leq 4$ pozitivno število;
- (ii) \mathcal{X}_j^{63} , kjer je $j \in \{1, 2\}$;
- (iii) \mathcal{X}_k^{147} , kjer je $k \leq 3$ pozitivno število;
- (iv) \mathcal{X}_k^{75} ali \mathcal{X}_4^{153} .

(v) Naj bo Γ ločno regularen Cayleyev graf $\text{Cay}(G, S)$ reda p^2q in stopnje 4. Naj bo nadalje H podgrupa grupe G , ki deluje regularno na vozliščih Γ in naj bo a nek element G . Tedaj natanko ena od naslednjih trditev.

- (1) Graf Γ je ločno H -tranzitiven in $S = \{a, a\sigma, a\sigma^2, a\sigma^3\}$ za $\sigma \in \text{Aut}(G)$ reda 4.
- (2) Velja $H_1 \leq \mathbb{Z}_2^2$ in $S = \{a, a\tau, a^{-1}, a^{-\tau}\}$, kjer je $\tau \in \text{Aut}(G)$ involucija.

(p^k) Vsi ločno tranzitivni grafi stopnje 4, katerih red je potencia praštevila p^{m+1} , so s -ločno tranzitivni za $s \leq 3$. Če je Γ dodatno G -enostaven s -ločno tranzitiven za neko grupo $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$, potem velja ena od naslednjih trditev.

- (i) Γ je enak bodisi K_5 ($s = 2$) bodisi $K_{4,4}$ ($s = 3$).
- (ii) Γ je primitiven ali biprimitiven afin graf glede na $\text{Aut}(\Gamma)$ ($s = 2$).

Po [55, Proposition 2.14] je Γ regularen krov enega od grafov

- (i) $K_{4,4}, Q_4$ ali K_5 , če je $s = 2$;
- (ii) $K_{4,4}$, če je $s = 3$.

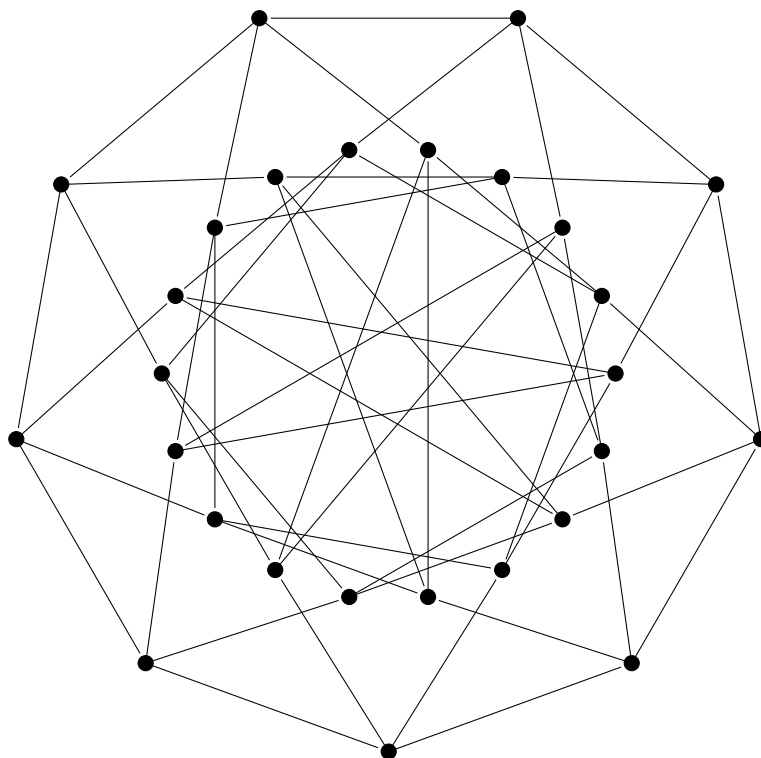
($2p^k$) Po [133, Theorem 3.2] za s -ločno tranzitivne grafe takih redov velja, da je $s \leq 4$. Ob dodatni predpostavki $s \geq 2$ je znano še, da so vsi ti grafi regularni krovi sledečih grafov.

- (i) $s = 2$: $Q_4, K_5, K_{5,5} - 5K_2, \mathcal{X}_2^{14}$ ali $\mathcal{G}_{2p^3}^3 4.21$;
- (ii) $s = 2, 3$: $K_{4,4}$;
- (iii) $s = 4$: \mathcal{X}_3^{26} (incidenčni graf $\text{PG}(2, 3)$).

2.3 Digrafi in $1/2$ -ločno tranzitivni grafi

Kot je prvi ugotovil Tutte, morajo biti grafi, za katere zahtevamo, da je njihova grupa avtomorfizmov tranzitivna na vozliščih in povezavah, ne pa tudi na lokih, nujno regularni sode stopnje [119]. Prve primere je opisal Brouwer [10], med katerimi je bil najmanjši na 54 vozliščih. Kasneje sta Doyle (1976) in Holt (1981) odkrila graf na 27 vozliščih, ki je najmanjši primer $1/2$ -ločno tranzitivnih grafov. Ta graf je moč dobiti iz najmanjšega Brouwerjevega primera tako, da identificiramo pare diametralnih vozlišč [20].

Grupe avtomorfizmov Holtovega grafa [47] in grafov iz Brouwerjeve družine so vse neprimitivne, kar je verjetno napeljalo na vprašanje [47, 48] obstoja $1/2$ -ločno tranzitivnega grafa s primitivno grupo avtomorfizmov, na kar so odgovorili v [109] s stranskim rezultatom klasifikacije vozliščno primitivnih grafov, katerih red je produkt dveh praštevil. Vsi grafi v [109, Table III] so primeri grafov, ki so povezavno tranzitivni, niso ločno tranzitivni, polna grupa



Slika 2.1: Holtov graf.

avtomorfizmov pa je primitivna na vozliščih. V devetdesetih letih se je raziskovanje $1/2$ -ločno tranzitivnih grafov razvejilo na konstrukcije $1/2$ -ločno tranzitivnih grafov s primitivnimi grupami avtomorfizmov, na klasifikacije $1/2$ -ločno tranzitivnih grafov določenih redov in na raziskovanje strukture $1/2$ -ločno tranzitivnih grafov stopnje 4. Omenjeni rezultati so podrobneje opisani v [72, 23], tu pa povzamemo samo rezultate, ki se tičejo grafov določenih redov in grafov stopnje 4.

V [107] in neodvisno v [79] so s pomočjo klasifikacije končnih enostavnih grup klasificirali vse ločno tranzitivne grafe in digrafe, katerih red je produkt dveh različnih praštevil; posebej so vse 2-ločno tranzitivne določili v [82]. S praštevilskim razcepom postanejo kompleksnejši tudi rezultati te vrste (za zgled težav, ki lahko nastanejo, če je red produkt treh različnih praštevil, lahko damo [111]). Z določitvijo stopnje grafa (in morda dodatnih pogojev) postane nadaljnja analiza spet mogoča (recimo [14, 28, 23, 40]).

Ker je vsak povezan digraf stopnje 1 izomorfen usmerjenemu ciklu, je stopnja 2 prva zanimiva stopnja v kontekstu ločno tranzitivnih digrafov. V literaturi se ločno tranzitivni digrafi stopnje 2 pogosto pojavijo zakrinkani kot neusmerjeni grafi stopnje 4, ki dopuščajo grupo avtomorfizmov, ki deluje tranzitivno na povezavah in vozliščih, ne pa tudi lokih; za taka delovanja ponavadi rečemo, da so $1/2$ -ločno tranzitivna. Natančneje, če je Γ ločno G -tranzitiven digraf stopnje 2, njegov temeljni graf Γ' dopušča $1/2$ -ločno tranzitivno delovanje grupe G ; velja

tudi obratno, če grupa avtomorfizmov neusmerjenega grafa Γ' stopnje 4 vsebuje podgrupo G , ki deluje $1/2$ -ločno tranzitivno na Γ' , tedaj obstaja usmeritev povezav grafa Γ' , ki porodi ločno G -tranzitiven digraf Γ stopnje 2, katerega temeljni graf je Γ' (pravzaprav sta taki usmeritvi natanko dve in porodita par nasprotno usmerjenih digrafov). V tem smislu je študij ločno G -tranzitivnih digrafov stopnje 2 ekvivalenten študiju $1/2$ -ločno G -tranzitivnih grafov stopnje 4; ta stopnja je tudi prva zanimiva za $1/2$ -ločno tranzitivne grafe. O slednjem razredu grafov obstaja obširna literatura (recimo [16, 72, 71, 76, 75, 83, 113]) in mnogi od rezultatov, uporabljenih v tem poglavju, izvirajo iz konteksta neusmerjenih grafov stopnje 4.

V [22, 128, 31] so klasificirali $1/2$ -ločno tranzitivne grafe stopnje 4 in reda $2pq$, p^3 in p^4 . O strukturnih lastnostih $1/2$ -ločno tranzitivnih grafov se je pisalo v [15, 21, 57, 59, 61, 62, 71, 73, 74, 80, 84, 113, 114], kot zgled nekaterih konstrukcij pa lahko navedemo [1, 47, 109, 116].

Znano je že, da Caylejev graf komutativne grupe ne more biti $1/2$ -ločno tranzitiven [1], zaradi česar vemo, da ne obstajajo $1/2$ -ločno tranzitivni grafi redov p ali p^2 , kjer je p praštevilo. V [128] so klasificirali vse $1/2$ -ločno tranzitivne grafe redov p^3 in p^4 , od koder med drugim sledi enoličnost Holtovega grafa na 27 vozliščih. Klasifikacije $1/2$ -ločno tranzitivnih grafov reda pq za $q < p$ sta se lotila Alspach in Xu v [4] za $q = 3$ in Wang [120] za primer $q \geq 5$. Alspach in Xu sta pokazala, da je vsak graf reda $3p$ $1/2$ -ločno tranzitiven natanko tedaj, ko je $(3, p)$ -metacirkulant oblike $M(d; 3, p)$, kjer je $(d, p) \neq (2, 7)$ ali $(3, 19)$. Po [72] je v Wangovem dokazu na žalost pomanjkljivost, zaradi česar so morda potrebne spremembe v rezultatu [72, Conjecture 3.2].

Feng in soavtorji so pokazali, da je vsak $1/2$ -ločno tranzitiven graf stopnje 4 in reda $4p$ izomorfen grafu \mathcal{G}_{4p} , kjer je $p \equiv 1 \pmod{8}$; noben od teh grafov ni Cayleyev, za vsak red obstaja natanko en tak graf. Iz te klasifikacije, klasifikacij enostavnejših redov in kataloga majhnih vozliščno tranzitivnih grafov reda kvečjemu 26 [87, 88, 106] sledi, da je najmanjši $1/2$ -ločno tranzitiven graf na 27 vozliščih Holtov graf [47] (najmanjši že po [1]). Holtov graf je po [128] enoličen za stopnjo 4.

V naslednjem koraku so bili klasificirani vsi grafi reda $4p$, katerih stopnja je dvakratnik praštevila [32, 121, 122]; izkaže se, da so vsi ti grafi metacirkulanti. Končno je iz klasifikacije $1/2$ -ločno tranzitivnih grafov reda $4p$ ne glede na stopnjo [51] nadalje razvidno, da poleg očitne družine šibkih $(4, p)$ -metacirkulantov za $p \equiv 1 \pmod{4}$ obstaja še enolična družina $1/2$ -ločno tranzitivnih grafov reda $4p$ in stopnje 12, ki obstaja le, če je praštevilo $p \equiv 1 \pmod{6}$ oblike $2^{2k} + 2^k + 1$ za $k > 1$.

2.4 $1/2$ -ločno tranzitivni grafi stopnje 4

Spodaj so povzeti rezultati, ki se tičejo $1/2$ -ločno tranzitivnih grafov stopnje 4. Ne obstajajo $1/2$ -ločno tranzitivni grafi reda p , p^2 [1] in $2p$ [12].

Skoraj vsi grafi, ki se bodo pojavili v sledečem pregledu, bodo šibki metacirkulanti, ki jih

bomo definirali v razdelku 4.4. Družine Cayleyevih grafov $C_{p^3}^i$, $C_{p^4}^{i,j}$, $C_{2pq}^{1,l}$ in $\Gamma_{\alpha,\beta,\gamma,k,i}$ bomo definirali v poglavju 2.4. V tem pregledu bomo srečali še družino grafov \mathcal{G}_{2pq}^k , opisano v poglavju 4.7.

Iz izrekov 7.1 in 7.2 bi bilo mogoče izluščiti še klasifikacije $1/2$ -ločno tranzitivnih grafov stopnje 4, katerih red je oblike kp ali kp^2 za vsa praštevila p in števila $k \leq 14$.

(3p) [4, Theorem 3.4]. Graf reda $3p$ stopnje 4 je $1/2$ -ločno tranzitiven natanko tedaj, ko je šibek $(3, p)$ -metacirkulant (glej 4.4) stopnje 4 za $p \neq 7$.

(4p) [32, 51, Theorem 3.3] Graf Γ stopnje 4 in reda $4p$ je $1/2$ -ločno tranzitiven natanko tedaj, ko je šibek $(4, p)$ -metacirkulant za $p \equiv 1 \pmod{8}$ (glej 4.20). V izvornem članku so ti grafi označeni z $X(4, p)$.

(p³) [128, Theorem 1.1] Vsi $1/2$ -ločno tranzitivni grafi reda p^3 in stopnje 4 so izomorfni $C_{p^3}^i$. Takih grafov (stopnje 4) je po [128] natanko $\frac{p-1}{2}$ paroma neizomorfni. Vsi ti grafi so šibki metacirkulanti; izomorfni so $C_{p^3}^i$ (glej 4.14).

(p⁴) [32, Theorem 1.1] Povezan graf stopnje 4 in reda p^4 je $1/2$ -ločno tranzitiven natanko tedaj, ko je $p \geq 3$, graf pa je izomorfen enemu od grafov iz družin $C_{p^4}^{i,j}$ (glej 4.15 in 4.16), kjer je $i \in \{1, 2\}$ in $1 \leq j \leq \frac{p-1}{2}$.

(p^k) [59, Theorem 1.1] Naj bo n neko število. Tedaj za vsak $1/2$ -ločno tranzitiven šibek metacirkulant reda p^k velja ena izmed naslednjih trditev.

(i) Naj bo Γ povezan, šibek (p^α, p^β) -metacirkulant reda p^n in stopnje kvečjemu $2p$. Tedaj je Γ $1/2$ -ločno tranzitiven natanko tedaj, ko je $\Gamma \cong \Gamma_{\alpha,\beta,\gamma,k,i}$, tako da $n = \alpha + \beta \geq 3$, $k \geq 2$ deli $p - 1$ in je p tuje $ie(e - 1)$.

(ii) Grafa $\Gamma_{\alpha,\beta,\gamma,k,i}$ in $\Gamma_{\alpha',\beta',\gamma',k',i'}$ sta izomorfna natanko tedaj, ko velja $(\alpha, \beta, \gamma, k) = (\alpha', \beta', \gamma', k')$ in $i \equiv i' \pmod{p^{\alpha-\gamma}}$.

(iii) Naj bo $n \geq 3$. Potem za vsak $k \mid p - 1$, $k > 1$, velja, da je natanko $(p^{n-2} - 1)/2 + p^{n-3} - 1$ neizomorfni povezanih $1/2$ -ločno tranzitivnih šibkih metacirkulantov reda p^n in stopnje $2k$.

Grafe $\Gamma_{\alpha,\beta,\gamma,k,i}$ bomo opisali v 4.17.

(pq) [120, Theorem 5.5] Naj bosta $5 \leq q < p$ praštevili in Γ $1/2$ -ločno tranzitiven graf reda pq . Potem je Γ bodisi eden od desetih vozliščno-primitivnih grafov iz [120, Theorem 1.1],

ali pa je Γ šibek (q, p) -metacirkulant stopnje 4, kot v primeru [120, Example 9.1], tako da $(q, p) \neq (5, 11), (11, 23)$ (več v razdelku 4.4).

(2pq) [30, Theorem 4.1] Naj bosta $q < p$ lihi praštevili in naj bo Γ povezan graf stopnje 4 in reda $2pq$. Potem je Γ $1/2$ -ločno tranzitiven natanko tedaj, ko velja ena od naslednjih trditev:

- (i) $(p, q) \neq (7, 3)$, q deli $p - 1$ in Γ je izomorfen $C_{2pq}^{1,l}$ za pozitivno celo število $l \leq 1/2(q - 1)$ (glej 4.13),
- (ii) $4q$ deli $p - 1$ in Γ je izomorfen $\mathcal{G}_{2pq}^{r,k}$, kjer je r element reda $4q$ v \mathbf{Z}_p^* , k pa je liho število, ki zadošča pogoju $1 \leq k \leq q - 1$ (glej 4.22).

Nadalje je število neizomorfnih $1/2$ -ločno tranzitivnih povezanih grafov stopnje 4 in reda $2pq$ enako

$$\begin{cases} 0 & \text{če je } q \nmid (p - 1) \text{ ali } (p, q) = (7, 3), \\ q - 1 & \text{če je } q \mid (p - 1) \text{ in } 4 \mid (p - 1), \\ \frac{1}{2}(q - 1) & \text{če je } q \mid (p - 1), 4 \nmid (p - 1) \text{ in } (p, q) \neq (7, 3). \end{cases}$$

3. poglavje

Definicije

Ker ne bomo potrebovali večje splošnosti, bomo v disertaciji vedno tiho privzeli, da je govora le o povezanih in končnih grafih ter digrafih. Za prve, ne pa tudi za druge, bomo večinoma predpostavili še enostavnost, zaradi česar začnemo to poglavje z običajnim definicijama. *Graf* je določen s parom množic V in E , kjer je V množica vozlišč, E pa množica povezav, podanih z neurejenimi pari vozlišč. Podobno *digraf* običajno definiramo s parom množic V in A , kjer je V kot prej, A pa je množica lokov, podanih z urejenimi pari vozlišč. Obeh definicij se bomo poslužili, kadar ne bo potrebe po večji kompleksnosti.

Sledeči definiciji bosta prišli prav, kadar bomo imeli opravka z grafi in digrafi, ki niso nujno enostavni. Graf Γ namreč lahko definiramo tudi z množico vozlišč $V(\Gamma)$, množico povezav $E(\Gamma)$ in funkcijo

$$\text{end} : E(\Gamma) \rightarrow \{X \subseteq V(\Gamma) : |X| \in \{1, 2\}\},$$

ki določi par *krajišč* vsaki povezavi Γ . Povezavi grafa e rečemo *zanka*, če je $|\text{end}(e)| = 1$, medtem ko za povezavi x in y rečemo, da sta *vzporedni*, če velja $\text{end}(x) = \text{end}(y)$. Graf brez zank in vzporednih povezav je *enostaven* in je enolično določen z $V(\Gamma)$ ter $\{\text{end}(e) : e \in E(\Gamma)\}$. V tem primeru je definicija seveda ekvivalentna običajni. V nadaljevanju bomo potrebovali še pojem loka v grafu: množico lokov $A(\Gamma)$ grafa Γ definiramo tako, da vsaki povezavi $e = \{u, v\}$ priredimo loka (u, v) in (v, u) .

Digraf Γ splošneje definiramo kot četverec $(V, A, \text{glava}, \text{rep})$, kjer sta V in A neprazni, končni množici, *glava* in *rep* pa sta funkciji iz A v V . Množicama A in V rečemo, v tem vrstnem redu, *loki* in *vozlišča* Γ ; označevali ju bomo z $A(\Gamma)$ in $V(\Gamma)$. Kardinalnosti $V(\Gamma)$ rečemo *red* Γ . Mislimo si, da lok kaže od *repa* proti *glavi*. Lok x je zanka, če je $\text{glava}(x) = \text{rep}(x)$ in je vzporeden loku y , če je $\{\text{glava}(x), \text{rep}(x)\} = \{\text{glava}(y), \text{rep}(y)\}$. Vsakemu digrafu lahko pri-

redimo pripadajoč neusmerjen graf, določen z vozlišči $V(\Gamma)$, povezavami $E(\Gamma)$ in funkcijo $\text{end} : x \mapsto \{\text{rep}(x), \text{glava}(x)\}$. Rekli bomo, da je digraf enostaven, če nima vzporednih lokov in zank oziroma ekvivalentno, če je njegov temeljni graf enostaven. V tem primeru je, kot prej, ta definicija ekvivalentna običajni definiciji digrafa.

Če je v rep in u glava loka x , rečemo, da je u *zunanjji sosed* v in v *notranji sosed* u . Za vozlišče $v \in V(\Gamma)$ tako definiramo

$$\begin{aligned}\Gamma^+(v) &= \{x \in A(\Gamma) : \text{rep}(x) = v\} \quad \text{in} \\ \Gamma^-(v) &= \{x \in A(\Gamma) : \text{glava}(x) = v\},\end{aligned}\tag{3.1}$$

kardinalnosti teh množic pa (v tem vrstnem redu) rečemo *zunanja* in *notranja stopnja* v v Γ . Zunanja in notranja stopnja nista nujno enaki številu zunanjih in notranjih sosedov. Če za neko število k velja, da je notranja (zunanja) stopnja enaka k , rečemo, da ima digraf notranjo (zunanjjo) stopnjo k . Digraf je stopnje k , če sta tako notranja kot zunanja stopnja enaki k .

Zaporedju lokov (x_1, \dots, x_s) digrafa Γ rečemo *s-lok*, če velja $\text{glava}(x_i) = \text{rep}(x_{i+1})$ za vse $i \in \{1, \dots, s-1\}$. Množico vseh *s-lokov* Γ bomo označili z $A_s(\Gamma)$. Podobno lahko definiramo tudi *s-loke* grafov. Zaporedju paroma različnih vozlišč (v_0, v_1, \dots, v_s) grafa Γ rečemo *s-lok*, če je $\{v_{i-1}, v_i\}$ povezava v Γ za vsak $1 \leq i \leq s$.

Avtomorfizem grafa Γ je permutacija množice $V(\Gamma) \cup E(\Gamma)$, ki ohranja množico $V(\Gamma)$ in komutira s funkcijo end . Podobno je avtomorfizem digrafa Γ permutacija množice $V(\Gamma) \cup A(\Gamma)$, ki ohranja množico $V(\Gamma)$ in komutira s funkcijama glava in rep . Naj bo G podgrupa $\text{Aut}(\Gamma)$. Rekli bomo, da je graf ali digraf ločno G -tranzitiven, s -ločno G -tranzitiven ali ločno G -regularen, kadar bo delovanje G tranzitivno na $A(\Gamma)$, $A_s(\Gamma)$ ali regularno na $A(\Gamma)$. V oznakah bomo izpustili G , kadar bo mišljeno $G = \text{Aut}(\Gamma)$. V primeru, ko za graf ali digraf Γ in grupo G velja, da je Γ ločno G -tranzitiven, bomo rekli, da Γ *dopušča* G .

Naj bo $s \geq 2$ število, naj bo Γ regularen graf in naj bo $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$, tako da je Γ s -ločno G -tranzitiven. Za neko netranzitivno edinko N v G je kvocient po edinki Γ_N definiran kot graf, katerega množica vozlišč so ravno vse N -orbite, tako da sta orbiti Δ_1 in Δ_2 povezani natanko tedaj, ko je neko vozlišče v Δ_1 sosednje nekemu vozlišču v Δ_2 . Jasno je, da velja bodisi $\Gamma_N \cong K_2$ ali pa imata Γ in Γ_N enako stopnjo. V prvem primeru včasih rečemo kvocientu *trivialni* kvocient. Kadar Γ nima netrivialnega kvocienta glede na G , rečemo, da je Γ G -enostaven.

Za dani graf Γ , neko njegovo vozlišče v in podgrupo $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$ označimo okolico v v Γ z $\Gamma(v)$, permutacijsko grupo, ki jo inducira delovanje stabilizatorja G_v na tej okolici, pa z $G_v^{\Gamma(v)}$. Pri digrafih nas bo podobno zanimalo delovanje stabilizatorja na $\Gamma^+(v)$, ki ga bomo označevali z $G_v^{\Gamma^+(v)}$.

Za dano množico različnih praštevil π rečemo, da je grupa G π -grupa, kadar je vsak praštevski delitelj reda G vsebovan v π . Grupe brez netrivialnih abelskih edink igrajo posebno vlogo in zanje uporabimo izraz *polenostavne grupe* [110]. V disertaciji bomo imeli opravka z redi

Tabela 3.1: Enostavne grupe, katerih redi so deljivi z največ tremi različnimi praštevilami

T	$ T $	razcep	$ \text{Aut}(T) $	razcep
Alt(5)	60	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$	120	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$
PSL(2, 7)	168	$2^3 \cdot 3 \cdot 7$	336	$2^4 \cdot 3 \cdot 7$
Alt(6)	360	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$	1440	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$
PSL(2, 8)	504	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$	1512	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 7$
PSL(2, 17)	2448	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 17$	4896	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 17$
PSL(3, 3)	5616	$2^4 \cdot 3^3 \cdot 13$	11232	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 13$
PSU(3, 3)	6048	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$	12096	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$
PSU(4, 2)	25920	$2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$	51840	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$

grafov z omejenim številom praštevilskih deliteljev, zaradi česar se bomo pogosto sklicevali na rezultat, opisan v [37, Chapter 1.1.] in tu povzet v tabeli 3.1 enostavnih grup z največ tremi praštevilskimi delitelji. Ta je razdeljena na dva dela, od katerih prvi vsebuje natanko vse take grupe, da lihi prafaktorji v njihovih redih nastopajo s potenco kvečjemu 2.

4. poglavje

Nekateri grafi in digrafi

Kot zgled uporabe teoretičnih rezultatov o redu vozliščnega stabilizatorja [97] so Potočnik, Spiga in Verret izračunali popoln katalog ločno tranzitivnih grafov stopnje 4 do reda 640 [95, 98], na katerega se bomo pogosto sklicevali. Kot smo že omenili, grafe $AT4val[n, i]$ iz tega kataloga označujemo z \mathcal{X}_i^n . V dodatku A so v preglednici izpisani vsi manjši grafi, omenjeni v tem delu, skupaj s pripadajočimi indeksi v katalogih 2-ločno tranzitivnih grafov stopnje 4 [92] in povezavno tranzitivnih grafov [127]. V poglavju 7 se bomo sklicevali še na katalog ločno tranzitivnih digrafov stopnje 2 do vključno reda 1000. Digrafe, ki v tem katalogu nastopajo pod oznako $ATD[n, i]$ bomo označevali z \mathcal{Y}_i^n .

Za dan graf Γ definiramo *povezavni graf* $L(\Gamma)$ tako, da so njegova vozlišča povezave grafa Γ , vozlišči pa sta povezani natanko tedaj, kadar imata ustrezni povezavi v Γ skupno vozlišče. Podobno je graf puščic $D(\Gamma)$ [127] grafa Γ graf, katerega vozlišča so loki grafa Γ , vozlišči pa sta povezani natanko tedaj, kadar za ustrezna loka (u, v) in (v, w) velja, da sta u in w različni sosednji vozlišči vozlišča v . Kanonični 2-krov $cdc(\Gamma)$ grafa Γ je graf z množico vozlišč $V(\Gamma) \times \mathbf{Z}_2$, kjer je vozlišče (u, i) sosednje vozliščem $(v, i + 1)$ pri dodatnem pogoju, da je $\{u, v\}$ povezava v Γ . *Lihni graf* $O(n)$ je graf, pri katerem je množica vozlišč množica vseh podmnožic \mathbf{Z}_{2n-1} z $n - 1$ elementi. Dve vozlišči sta sosednji natanko tedaj, ko sta ustrezni podmnožici disjunktni.

Leksikografski produkt grafa Γ z grafom Λ označimo z $\Gamma[\Lambda]$. Definiran je z množico vozlišč $V(\Gamma) \times V(\Lambda)$, vozlišči (α, α') in (β, β') pa sta povezani natanko tedaj, ko je bodisi $\{\alpha, \beta\} \in E(\Gamma)$ bodisi $\alpha = \beta$ in $\{\alpha', \beta'\} \in E(\Lambda)$.

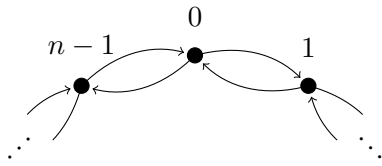
Odsekovni digraf grupe G glede na podgrupo H in podmnožico S je definiran z množico vozlišč $G/H = \{Hg : g \in G\}$, tako da za Hx in Hy velja, da je (Hx, Hy) lok natanko tedaj, ko je $yx^{-1} \in HSH$. Odsekovni graf je temeljni graf ustreznega digrafa.

4.1 Neenostavni digrafi

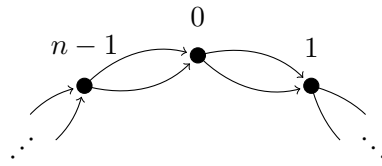
V tem razdelku se na kratko posvetimo ločno tranzitivnim digrafom stopnje 2, ki niso enostavni. Pokazali bomo, da obstajata le dve družini takšnih digrafov, in sicer $\vec{C}_n^{(2)}$ in $\overleftarrow{C}_n^{(2)}$ za $n \geq 1$. Obe dobimo iz neusmerjenega cikla s podvojitvijo vseh povezav. V obeh primerih vzamemo za vozlišča množico \mathbf{Z}_n , za loke pa $\mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_2$. Za družini dvojnih ciklov definiramo funkciji glava in rep s spodnjimi predpisi za vsak lok $(i, \epsilon) \in \mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_2$.

$$\begin{aligned} \vec{C}_n^{(2)} : \quad & \text{glava}(i, \epsilon) = i + 1, \quad \text{rep}(i, \epsilon) = i; \\ \overleftarrow{C}_n^{(2)} : \quad & \text{glava}(i, 0) = i + 1, \quad \text{rep}(i, 0) = i, \\ & \text{glava}(i, 1) = 1, \quad \text{rep}(i, 1) = i + 1. \end{aligned}$$

Opazimo, da sta $\vec{C}_1^{(2)}$ in $\overleftarrow{C}_1^{(2)}$ oba izomorfna digrafu z enim samim vozliščem in dvema usmerjenima zankama, medtem ko sta $\vec{C}_2^{(2)}$ in $\overleftarrow{C}_2^{(2)}$ oba sestavljena iz dveh vozlišč in štirih lokov med njima, tako da po dva loka kažeta v obe možni smeri.



(a) Dvojni cikel $\overleftarrow{C}_n^{(2)}$.



(b) Dvojni cikel $\vec{C}_n^{(2)}$.

Lema 4.1. Če je Γ povezan, neenostaven, ločno tranzitiven digraf stopnje 2 in reda n , je izomorfen bodisi $\vec{C}_n^{(2)}$ bodisi $\overleftarrow{C}_n^{(2)}$. Če je Γ 2-ločno tranzitiven, je izomorfen $\vec{C}_n^{(2)}$ za nek $n \geq 2$.

Dokaz. Opazujmo temeljni graf digrafa Γ ; kot slednji je tudi ta neenostaven, povezan in vozliščno tranzitiven, zato je v njem število vzporednih povezav med poljubnima sosednjima vozliščema konstantno in enako nekemu pravemu delitelju stopnje 4. Če je $n = 1$, je temeljni graf vozlišče z dvema zankama, iz katerega lahko dobimo le en digraf, ki je izomorfen $\vec{C}_1^{(2)} \cong \overleftarrow{C}_1^{(2)}$. Če je $n = 2$, je temeljni graf dipol, ki je zaradi vozliščne tranzitivnosti izomorfen $\vec{C}_2^{(2)} \cong \overleftarrow{C}_2^{(2)}$.

Naj bo $n \geq 3$. Temeljni graf je dvojni cikel; tega lahko usmerimo na dva načina. V enem primeru dobimo $\vec{C}_n^{(2)}$, v drugem pa $\overleftarrow{C}_n^{(2)}$. \square

Naslednji rezultat bomo potrebovali v dokazu izreka 7.2.

Lema 4.2. Naj bo G podgrupa $\text{Aut}(\vec{C}_n^{(2)})$, ki deluje ločno tranzitivno na s -lokih, ne pa tudi na $(s + 1)$ -lokih $\vec{C}_n^{(2)}$, in naj bo v vozlišče $\vec{C}_n^{(2)}$. Potem je G_v elementarno abelska 2-grupa reda 2^s in je edinka v G . Če je G_v reda 4 in vsebuje netrivialen centralni element G , je n sod.

Dokaz. Najprej opazimo, da vsak avtomorfizem $\vec{C}_n^{(2)}$, ki pribije vozlišče v , pribije vsa vozlišča, odkoder sledi, da je G_v jedro delovanja G na vozliščih $\vec{C}_n^{(2)}$ in torej edinka v G . Še več, G_v ohranja pare lokov z isto glavo (in torej tudi repom). Odtod že sledi, da je G_v elementarno abelska 2-grupa. Ker je G tranzitivna na s -lokih, ne pa tudi na $(s + 1)$ -lokih, je enostavno pokazati, da G_v deluje regularno na s -lokih, ki se začenjajo pri vozlišču v . Ker jih je 2^s , je torej tudi red G_v enak 2^s .

Predpostavimo zdaj, da je n lih, da je $|G_v| = 4$ in da je τ netrivialni centralni element G , vsebovan v G_v . Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da τ deluje netrivialno na paru lokov, ki kažeta iz v . Nadalje, ker je indeks G_v v G enak n , sledi, da je G_v enolično določena 2-podgrupa Sylowa v G in torej, da velja $G = G_v \rtimes H$, kjer je H grupa reda n . Še več, ker je G_v jedro delovanja G na vozliščih $\vec{C}_n^{(2)}$, sledi, da H deluje regularno na vozliščih $\vec{C}_n^{(2)}$, oziroma da velja $H = \langle g \rangle$, kjer je g avtomorfizem reda n , ki slika vsako vozlišče v njegovega (enoličnega) zunanjšega soseda.

Ker je $\tau = \tau^g$, element τ deluje netrivialno na vsakem paru lokov, ki imata isti rep. Več, τ je enolično določeni netrivialni centralni element G , ki je vsebovan v G_v . Ker je $G = G_v H$ in ker je G_v abelski, sledi, da H ne centralizira nobenega elementa $G_v \setminus \{1, \tau\}$. To pa ni mogoče, saj je H lihega reda in $|G_v \setminus \{1, \tau\}| = 2$. To protislovje zaključuje dokaz leme. \square

4.2 Družina grafov praštevilskega reda in nekatere razširitve

Naj bo p praštevilo, r pa pozitivno število, ki deli $p - 1$. Tedaj ima \mathbf{Z}_p^* enolično določeno podgrupo reda r , recimo ji $H(p, r)$. Graf $G(p, r)$ stopnje r je definiran z množico vozlišč \mathbf{Z}_p in množico povezav

$$\{\{x, y\} : x, y \in \mathbf{Z}_p \text{ in } y - x \in H(p, r)\}.$$

Ti grafi so ločno regularni [11] in enolično določeni s p in r , pogoj $p \equiv 1 \pmod{r}$ pa je potreben za obstoj. Ker je za liha praštevila \mathbf{Z}_p^* ciklična, je za vsak n podgrupa reda n natanko ena.

Poiščimo $H(p, 4)$, oziroma element reda 4 v \mathbf{Z}_p^* , kjer je $p \equiv 1 \pmod{4}$. Najprej opazimo, da je $(p - 1)^2 \equiv 1 \pmod{p}$, zaradi česar je dovolj najti $a \in \mathbf{Z}_p^*$, tako da je $a^2 \equiv p - 1 \pmod{p}$. Po Eulerjevem kriteriju je $y \equiv x^2 \pmod{p}$ za nek $x \in \mathbf{Z}_p^*$, če je $y^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$; če y ni tak kvadrat, pa velja $y^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$. Če izračunamo to kongruenco za $p - 1$, dobimo

$$(p - 1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (p - 1)^{2k} \equiv (p^2 - 2p + 1)^k \equiv 1 \pmod{p},$$

kot smo želeli. Preveriti moramo le še, da je tudi $-a \in H(p, 4)$:

$$(-a)^2 \equiv (p - a)^2 \equiv p^2 - 2pa + a^2 \equiv p - 1 \pmod{p}.$$

Čim je $p \equiv 1 \pmod{4}$ torej velja, da obstaja $a^2 = (-a)^2 = p - 1$ in da je $H(p, 4) = \{1, a, -a, p - 1\}$.

Grafe $G(2p, r)$ stopnje r iz [12] definiramo tako, da za množico vozlišč vzamemo dve disjunktni kopiji \mathbf{Z}_p ; označimo ju z Z in Z' . Grafi so stopnje r ; za množico povezav vzamemo

$$\{\{x, y'\} : x \in Z, y' \in Z' \text{ in } y - x \in H(p, r)\}.$$

V družinah $G(p, r, 2)$ [12] in $G(3p, r)$ [124] so grafi stopnje $2r$. Za grafe $G(p, r, 2)$ kot prej za množico vozlišč vzamemo dve disjunktni kopiji \mathbf{Z}_p , za množico povezav pa

$$\{\{x, y\}, \{x', y\}, \{x, y'\}, \{x', y'\} : x, y \in Z, x', y' \in Z' \text{ in } y - x \in H(p, r)\}.$$

Grafe $G(3p, r)$ definiramo tako, da za množico vozlišč vzamemo $\{x_i : i \in \mathbf{Z}_3, x \in \mathbf{Z}_p\}$, za množico povezav pa

$$\{\{x_i, y_{i+1}\} : i \in \mathbf{Z}_3, x, y \in \mathbf{Z}_p \text{ in } y - x \in H(p, r)\}.$$

4.3 Delni povezavni grafi in Praeger-Xu digrafi

V tem razdelku na kratko povzamemo pojem *delni povezavni graf*, ki je bil prvič uporabljen v [75] za analizo ločno G -tranzitivnih digrafov stopnje in polmera 2, in nadalje razvit v [99].

Za dani povezan digraf Γ in pozitivno število s je s -ti delni povezavni graf $\text{Pl}_s(\Gamma)$ digraf, ki ima za množico vozlišč natanko množico s -lokov $A_s(\Gamma)$ in množico lokov $A_{s+1}(\Gamma)$, funkciji glava in rep pa sta definirani s praviloma

$$\text{rep}(x_1, \dots, x_{s+1}) = (x_1, \dots, x_s) \text{ in } \text{glava}(x_1, \dots, x_{s+1}) = (x_2, \dots, x_{s+1}),$$

za vsak $(s + 1)$ -lok (x_1, \dots, x_{s+1}) v Γ . Nadalje, naj bo $\text{Pl}_0(\Gamma) = \Gamma$ in pišimo Pl namesto Pl_1 . Če je Γ digraf stopnje 2, je stopnje 2 tudi $\text{Pl}_s(\Gamma)$ za vsak $s \geq 0$. Naslednja formula (ki se v [99, Lemma 3.2(i)] pojavi v kontekstu enostavnih grafov) nakaže alternativno, rekurzivno definicijo operatorja Pl_s :

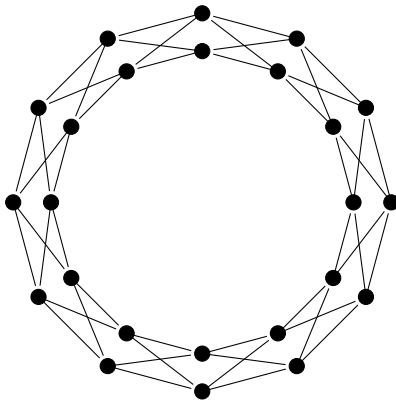
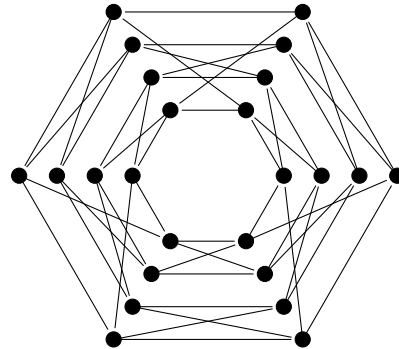
$$\text{Pl}_s(\Gamma) \cong \text{Pl}(\text{Pl}_{s-1}(\Gamma)) \tag{4.1}$$

Operator Pl lahko uporabimo za definicijo zelo pomembnega razreda digrafov, ki sta ga najprej študirala Praeger in Xu [108] za enostavne grafe in Praeger [104] za enostavne digrafe. Za števila n in s , $n \geq 1$, $s \geq 0$, naj bo

$$\overrightarrow{PX}(n, s) = \begin{cases} \overrightarrow{C}_n^{(2)} & \text{če } s = 0 \\ \text{Pl}(\overrightarrow{PX}(n, s-1)) & \text{če } s \geq 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

Graf, izomorfen temeljnemu grafu nekega digrafa $\overrightarrow{PX}(n, s)$, bomo označili z $PX(n, s)$ in mu rekli PX graf. Če združimo 4.2 z enakostjo 4.1, dobimo naslednjo definicijo.

$$\overrightarrow{PX}(n, s) = \text{Pl}_s(\overrightarrow{C}_n^{(2)}). \quad (4.3)$$

(a) Graf $PX(12, 1)$.(b) Graf $PX(6, 2)$.

Grupa avtomorfizmov $\overrightarrow{C}_n^{(2)}$ deluje naravno kot grupa avtomorfizmov na vsakem od $\overrightarrow{PX}(n, s)$ za $s \geq 1$. Naslednja presenetljiva karakterizacija \overrightarrow{PX} digrafov je bila dokazana v [104, Theorem 2.9] za enostavne digrafe. S pomočjo leme 4.1 lahko rezultat razširimo za potrebe ne-enostavnih digrafov.

Lema 4.3. *Naj bo Γ povezan, ločno G -tranzitiven digraf stopnje 2 in naj bo $v \in V(\Gamma)$. Če G vsebuje komutativno edinko N , tako da $N_v \neq \mathbf{1}$, je Γ izomorfen nekemu \overrightarrow{PX} digrafu.*

Sledeča lema je analogna rezultatu za neusmerjene grafe (glej [35, Lemma 3.1]) in naš dokaz je od tam le rahlo prirejen.

Lema 4.4. *Naj bo Γ povezan, ločno G -tranzitiven digraf stopnje 2 in naj bo N minimalna edinka v G . Predpostavimo, da je N 2-grupa in da velja $\Gamma/N \cong \overrightarrow{C}_n^{(2)}$ za nek $n \geq 1$. Potem je Γ izomorfen nekemu \overrightarrow{PX} digrafu.*

Dokaz. Ker je N minimalna edinka v G in 2-grupa, je elementarno abelska. Naj bo K jedro delovanja G na množici N -orbit na $V(\Gamma)$; opazimo, da G/K deluje zvesto na $V(\Gamma/N)$. Naj bo C centralizator N v K . Tedaj velja $N \leq C \leq K$. Ker sta N in K edinki v G , je edinka v G tudi C .

Nadalje, ker imata N in K iste orbite na $V(\Gamma)$, ima take tudi C , odkoder sledi $K = NK_v$ in zato $C = NC_v$ za poljubno vozlišče v .

Ker je kvocient Γ/N stopnje 2, iz leme 5.2 sledi, da je kvocientna projekcija $\Gamma \rightarrow \Gamma/N$ krovna projekcija in da je N semiregularna (saj bi bila sicer stopnja kvocienta manjša kot stopnja Γ). Zato velja $N \cap C_v \leq N_v = \mathbf{1}$, in ker C_v centralizira N , velja tudi $C = N \times C_v$. Ker je kvocientna projekcija $\Gamma \rightarrow \Gamma/N$ krovna projekcija, iz leme 5.1 sledi, da se G_v vloži v stabilizator vozlišč v $\text{Aut}(\vec{C}_n^{(2)})$. Natančneje, G_v (in zato C_v) je elementarno abelska 2-grupa, odkoder sledi, da je C komutativna edinka v G .

Pokažimo zdaj $C_v \neq \mathbf{1}$. Predpostavimo nasprotno, da je $C_v = \mathbf{1}$ in s tem $C = NC_v = N$. Spomnimo se, da velja $K = NK_v$ in $N \cap K_v = \mathbf{1}$. Ker sta N in K_v 2-grupi, je 2-grupa tudi K . Zato je center $Z(K)$ netrivialen. Po drugi strani iz $Z(K) \leq C$ in $C = N$ sledi, da $Z(K) \leq N$. Ker je N minimalna edinka v G , iz tega naprej sledi, da je $N = Z(K)$. Vendar potem $K = NK_v = N \times K_v$, zaradi česar je K elementarno abelska 2-grupa. Natančneje je N , ki je center K , enak K . Spomnimo se, da G/K deluje zvesto na $V(\Gamma/N)$. Po drugi strani je G/K enako G/N , ki je očitno nezvesto na $V(\Gamma/N)$. To protislovje pokaže, da je $C_v \neq \mathbf{1}$, zaradi česar je $\Gamma \vec{P}\vec{X}$ digraf po lemi 4.3, kot smo želeli dokazati. \square

Za konec zapišimo še lemo, ki jo bomo z dodatnimi podrobnostmi dokazali kot lemo 5.10 v razdelku 5.2.1, kjer bomo omenili še nekaj drugih lastnosti družine grafov PX , ki nam bodo prišle prav.

Lema 4.5. *Naj bosta n in s nenegativni celi števili, $n \geq 1$, naj bo $\Lambda = \vec{P}\vec{X}(n, s)$ in naj bo v vozlišče Λ . Naj bo G grupa, ki deluje tranzitivno na lokih Λ in naj bo $K = \langle G_u : u \in V(\Lambda) \rangle$, t.j. grupa generirana z vsemi stabilizatorji vozlišč v G . Potem je K edinka v G in velja, da je K elementarno abelska grupa reda $2^s |G_v|$, kvocientni digraf Λ/K je izomorfen usmerjenemu ciklu dolžine n , G/K pa je ciklična grupa reda n .*

V literaturi se poddružino $PX(n, 1)$ teh grafov pogosto označuje tudi z oznako oziroma konstrukcijo z leksikografskim produktom, $C_n[2K_1]$.

4.4 Metacirkulanti

Rečemo, da je permutacija (m, n) -semiregularna, če ima m orbit dolžine n . Graf je (m, n) -metacirkulant, če obstajata avtomorfizma ρ in σ v njegovi grupi avtomorfizmov, tako da je ρ (m, n) -semiregularen in da σ normalizira ρ , oziroma, da je

$$\sigma^{-1} \rho \sigma = \rho^r \quad \text{za nek } r \in \mathbf{Z}_n^*.$$

Nadalje zahtevamo za σ , da ciklično premutira orbite ρ tako, da σ^m pribije vsaj eno točko (in s tem vsaj eno točko znotraj vsake orbite ρ). Graf je metacirkulant, če je (m, n) -metacirkulant

za kaki števili $m \geq 1$ in $n \geq 2$. Ta definicija sovpada s prvotno definicijo metacirkulanta, ki sta jo postavila Alspach in Parsons [2]; v literaturi pa se za metacirkulante pogosto uporablja tudi splošnejša definicija, ki jo bomo opisali v nadaljevanju. Zaradi jasnosti bomo uporabljali izraza, ki ju je vpeljal Šparl [112]: metacirkulant za definicijo v strožjem smislu in šibek metacirkulant v splošnejšem smislu. Graf je *šibek* (m, n) -metacirkulant, če ima vse lastnosti (m, n) -metacirkulanta brez dodatnega pogoja, da σ^m pribije vsaj eno točko grafa. Ti definiciji se razlikujeta, saj obstajajo šibki (m, n) -metacirkulanti, ki niso (m, n) -metacirkulanti (tak je recimo $\mathcal{Y}(10, 100; 11, 90)$ [112]).

4.5 Družine Cayleyevih grafov

Družine Cayleyevih grafov bomo označevali s pisano črko \mathcal{C} , tako da bomo v spodnji indeks bomo zapisali obliko reda, zgornji indeks pa bomo uporabili razlikovanje med družinami.

4.5.1 Cayleyevi grafi reda $2p^2$

Po [133] obstajajo tri družine ločno tranzitivnih Cayleyevih grafov stopnje 4. Prva družina je označena z $X_{2p^2}^0$ [133, Example 2.2], tu pa jo bomo označili z $\mathcal{C}_{2p^2}^1$. Naj bo h generator enolično določene podgrupe reda 4 v $\mathbf{Z}_{2p^2}^*$. Grafe definiramo s predpisom

$$\mathcal{C}_{2p^2}^1 = \text{Cay}(\mathbf{Z}_{2p^2}, \{a, a^{-1}, a^h, a^{h^3}\}). \quad (4.4)$$

Ta družina se pojavi tudi v [132], in sicer pod oznako $\mathcal{C}\mathcal{C}_{2p^2}^0$.

Naj bo grupa G definirana kot $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle c \rangle = \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_2$. Potem so Cayleyevi grafi $\mathcal{C}_{2p^2}^2$ dani s predpisom

$$\mathcal{C}_{2p^2}^2 = \text{Cay}(G, \{ca, ca^{-1}, cb, cb^{-1}\}). \quad (4.5)$$

Ti grafi so v [133, Example 2.4] označeni z $X_{2p^2}^1$. Omenimo še, da grafi iz te družine niso ločno regularni.

Zadnja družina je označena kot $X_{2p^2}^2$ [133, Example 2.7] in kot $\mathcal{C}\mathcal{G}_{2p^2}$ v [132]. Tu bomo uporabili oznako $\mathcal{C}_{2p^2}^3$. Naj bo $p \equiv 1 \pmod{4}$, naj bosta $\pm\epsilon$ elementa reda 4 v \mathbf{Z}_p^* in naj bo

$$\text{GD}_{2p^2} = \langle a, b, c \mid a^p = b^p = c^2 = \mathbf{1}, cac = a^{-1}, cbc = b^{-1}, ab = ba \rangle$$

posplošena diedrska grupa reda $2p^2$ in $S = \{cab, ca^{-1}b^\epsilon, cab^{-1}, ca^{-1}b^{-\epsilon}\}$. Tedaj so Cayleyevi grafi $\mathcal{C}_{2p^2}^3$ definirani s predpisom

$$\mathcal{C}_{2p^2}^3 = \text{Cay}(\text{GD}_{2p^2}, S). \quad (4.6)$$

4.5.2 Cayleyevi grafi reda $2pq$

Ločno regularni Cayleyevi grafi stopnje 4 in reda $2pq$ za poljubni praštevili p in q so bili klasificirani v [132]. Za $p = q$ obstajata dve družini, ki smo jih omenili v prejšnjem razdelku pri Cayleyevih grafih reda $2p^2$. Podobno obstajata dve družini za $q = 2$, v [132, Example 3.4] označeni z \mathcal{CA}_{4p}^0 in \mathcal{CA}_{4p}^1 , tu pa bomo uporabljali oznaki \mathcal{C}_{4p}^0 in \mathcal{C}_{4p}^1 . Cayleyeve grafe \mathcal{C}_{4p}^i definiramo kot

$$\mathcal{C}_{4p}^i = \text{Cay}(G, S_i), \quad (4.7)$$

kjer je $i \in \{0, 1\}$ in $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle = \mathbf{Z}_{2p} \times \mathbf{Z}_2$, ter $S_i = \{a, a^{-1}, a^{w^{2-i}}b, a^{-w^{2-i}}b\}$.

Ločno tranzitivni Cayleyevi grafi stopnje 4 in reda $2pq$ za ciklično grupo \mathbf{Z}_{2pq} , kjer sta p in q lihi praštevili, so opisani v [132, Example 3.3]. V primeru, ko je $p = q$, dobimo ravno družino grafov $\mathcal{C}_{2p^2}^1$. Naj bosta torej p in q različni praštevili in naj bo a generator grupe \mathbf{Z}_{2pq} . Ta grupa ima enolično določeno neciklično grupo reda 4, ki ji recimo H_1 . Če sta $p - 1$ in $q - 1$ deljivi s 4, ima \mathbf{Z}_{2pq} natanko dve ciklični podgrupi reda 4, ki vsebujeta -1 , označimo ju s H_2 in H_3 . Tedaj definiramo Cayleyeve grafe \mathcal{C}_{2pq}^i za $1 \leq i \leq 3$ kot

$$\mathcal{C}_{2pq}^i = \text{Cay}(\mathbf{Z}_{2pq}, a^{H_i}), \quad (4.8)$$

v [132] pa so označeni s \mathcal{CC}_{2pq}^i .

Ostaneta nam še dve družini Cayleyevih grafov diedrske grupe reda $2pq$, ki sta v [132, Example 3.5] označeni kot \mathcal{CD}_{2pq}^i , $i \in \{0, 1\}$, mi pa bomo uporabili oznaki \mathcal{C}_{2pq}^4 in \mathcal{C}_{2pq}^5 . Družini definiramo s predpisoma

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{2pq}^4 &= \text{Cay}(D_{2pq}, S_0) \quad \text{in} \\ \mathcal{C}_{2pq}^5 &= \text{Cay}(D_{2pq}, S_1), \end{aligned} \quad (4.9)$$

kjer je $D_{2pq} = \langle a, b \mid a^{pq} = b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle$ in kjer sta za $i = 0$ in $i = 1$ definirani množici $S_i = \{b, ab, a^{s_i+1}b, a^{s_i^2+s_i+1}b\}$, pri čemer sta s_i generatorja podgrupe reda 4 v \mathbf{Z}_{pq}^* , tako da je

$$\begin{aligned} s_0^2 + 1 &\equiv 0 \pmod{p} \quad \text{in} \quad s_0 + 1 \equiv 0 \pmod{q} \quad \text{kjer je } p \equiv 1 \pmod{4}, \\ s_1^2 + 1 &\equiv 0 \pmod{q} \quad \text{in} \quad s_1 + 1 \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{kjer je } q \equiv 1 \pmod{4}. \end{aligned}$$

4.5.3 Cayleyevi grafi reda $4p^2$

Po [23] obstajajo tri družine ločno tranzitivnih Cayleyevih grafov reda $4p^2$ in stopnje 4. Prvo družino označijo z $\mathcal{A}_{4p^2}^0$ [23, Example 3.3], mi pa jo definiramo pod oznako $\mathcal{C}_{4p^2}^0$ z naslednjim predpisom.

$$\mathcal{C}_{4p^2}^0 = \text{Cay}(G_{4p^2}^0, \{a, a^{-1}, a^w b, a^{-w} b\}), \quad (4.10)$$

kjer je $G_{4p^2}^0 \cong \langle a \rangle \times \langle b \rangle \cong \mathbf{Z}_{2p^2} \times \mathbf{Z}_2$.

Naslednja družina, za grupo $G_{4p^2}^1 \cong \langle a, b \mid a^{4p} = b^p = 1, ab = ba \rangle \cong \mathbf{Z}_{4p} \times \mathbf{Z}_p$, je opisana

v [23, Example 3.4] iz označena kot $\mathcal{A}_{4p^2}^1$. Tu Cayleyeve grafe $\mathcal{C}_{4p^2}^1$ definiramo kot

$$\mathcal{C}_{4p^2}^1 = \text{Cay}(G_{4p^2}^1, \{ab, a^{-1}b, ab^{-1}, a^{-1}b^{-1}\}). \quad (4.11)$$

Zadnja družina Cayleyevih grafov, $\mathcal{A}_{4p^2}^0$, je definirana v [23, Example 3.4], mi pa jo označimo z $\mathcal{C}_{4p^2}^2$ in definiramo s predpisom

$$\mathcal{C}_{4p^2}^2 = \text{Cay}(G_{4p^2}^2, \{ab, a^{-1}b^\epsilon, ab^{-1}, a^{-1}b^{-\epsilon}\}), \quad (4.12)$$

kjer je grupa $G_{4p^2}^2$ izomorfna $\langle a, b \mid a^{4p} = b^p = \mathbf{1}, a^{-1}ba = b^\epsilon \rangle \cong \mathbf{Z}_{4p} \times \mathbf{Z}_p$ za $\epsilon \in \mathbf{Z}_p$.

4.5.4 Primitivni in biprimitivni afini grafi

Definicijo povzamemo po [55]. Naj bo $N \cong \mathbf{Z}_p^{m+1}$ elementarno abelska grupa za neko praštevilo p . Tedaj lahko N obravnavamo kot vektorski prostor nad $GF(p)$. Naj bo $AGL(m+1; p)$ grupa vseh afinih transformacij N . Cayleyev graf grupe N je afin 2-ločno tranzitiven graf, če obstaja grupa G , tako da je $N \triangleleft G \leq AGL(m+1; p)$. Če dodatno G deluje primitivno na vozliščih, rečemo, da je graf primitiven afin glede na G in biprimitiven afin, če je graf dvodelen z deloma Δ_1 in Δ_2 , tako da je G^+ zvesta in primitivna na Δ_i (kjer je G^+ največja podgrupa G , ki ohranja Δ_i kot množico). Ivanov in Praegerjeva sta klasificirala vse 2-ločno tranzitivne primitivne in biprimitivne affine grafe v [50].

4.5.5 $1/2$ -ločno tranzitivni Cayleyevi grafi

Naj bosta p in q praštevili in naj q deli $p-1$. Znano je, da obstaja enolična nekomutativna grupa reda pq , t.j. Frobeniusova grupa. Naj bo grupa G direktni produkt Frobeniusove grupe reda pq z grupo \mathbf{Z}_2 , ki jo z generatorji zapišemo kot spodaj.

$$\langle a, b, c \mid a^p = b^q = c^2 = \mathbf{1}, b^{-1}ab = a^r, ac = ca, cb = bc \rangle,$$

kjer je r element reda q v \mathbf{Z}_p^* . V [30] so avtorji definirali Cayleyeve grafe \mathcal{C}_{2pq}^k

$$\mathcal{C}_{2pq}^{1,k} = \text{Cay}\left(G, \{cb^k, cb^{-k}, cb^k a, (cb^k a)^{-1}\}\right) \quad (4.13)$$

za vsak $k \in \mathbf{Z}_q^*$.

Naj bo $G(p)$ grupa $\langle a, b \mid a^{p^2} = \mathbf{1}, b^p = \mathbf{1}, b^{-1}ab = a^{1+p} \rangle$. V [128] definirajo družino grafov $\Gamma_i(p)$, ki jo tu označimo s $\mathcal{C}_{p^3}^i$, s spodnjim predpisom.

$$\mathcal{C}_{p^3}^i = \text{Cay}(G(p), \{b^i a, b^i a^{-1}, (b^i a)^{-1}, ab^{-i}\}) \quad \text{za } 1 \leq i \leq \frac{p-1}{2}. \quad (4.14)$$

Na p^4 vozliščih je mogoče definirati dve družini $1/2$ -ločno tranzitivnih Cayleyevih grafov za

naslednji grupi [31];

$$\begin{aligned} G_1(p) &= \langle a, b \mid a^{p^3} = b^p = \mathbf{1}, [a, b] = a^{p^2} \rangle, \\ G_2(p) &= \langle a, b \mid a^{p^2} = b^2 = \mathbf{1}, b^{-1}ab = a^{p+1} \rangle. \end{aligned}$$

Za $1 \leq i \leq \frac{p-1}{2}$ spodaj definiramo še njihovi pripadajoči družini grafov.

$$C_{p^4}^{1,i} = \text{Cay}(G_1(p), \{a, a^{-1}b, a^{-1}, b^{-i}a\}). \quad (4.15)$$

$$C_{p^4}^{2,i} = \text{Cay}(G_2(p), \{b^i, ab^i, b^{-i}, b^{-i}a^{-1}\}). \quad (4.16)$$

V izvornem članku sta družini označeni kot $\text{Cay}(G_1(p), S_i)$ in $\text{Cay}(G_2(p), T_i)$, $1 \leq i \leq \frac{p-1}{2}$.

Še zadnja družina $1/2$ -ločno tranzitivnih Cayleyevih grafov, ki jo potrebujemo, je bila opisana v [59], kjer sta avtorja raziskovala $1/2$ -ločno tranzitivne metacirkulante, katerih red je potenca praštevila. Naj bodo α, β, γ, k in i pozitivna števila tako, da velja $\gamma < \alpha \leq \beta + \gamma$ in $1 \leq i \leq p^\beta - 1$. Grupo $G_{\alpha,\beta,\gamma}$ in množico $S_{\alpha,\beta,\gamma,k,i}$ definiramo s spodnjima predpisoma.

$$G_{\alpha,\beta,\gamma} = \langle a, b \mid a^{p^\alpha} = b^{p^\beta} = \mathbf{1}, b^{-1}ab = a^{1+p^\gamma} \rangle.$$

$$S_{\alpha,\beta,\gamma,k,i} = \left\{ b^i a, b^i a^e, \dots, b^i a^{e^{k-1}}, (b^i a)^{-1}, (b^i a^e)^{-1}, \dots, (b^i a^{e^{k-1}})^{-1} \right\}$$

Tedaj definiramo:

$$\Gamma_{\alpha,\beta,\gamma,k,i} = \text{Cay}(G_{\alpha,\beta,\gamma}, S_{\alpha,\beta,\gamma,k,i}). \quad (4.17)$$

4.6 Družine grafov iz [35, Lemma 8.4, 8.7]

V [35] avtorja klasificirata večino ločno tranzitivnih grafov Γ , ki se pojavijo v primeru, ko ima grupa avtomorfizmov grafa neko edinko N , ki ima vsaj 3 orbite na vozliščih, kvocient Γ_N pa ni stopnje 4 (v tem primeru je Γ_N izomorfen nekemu ciklu).

V primeru, ko je red grafa $4p^2$, so družini opisali v [23] pod oznakama za družini $\mathcal{N}_{4p^2}^0$ in $\mathcal{N}_{4p^2}^1$, mi pa ju bomo označili z $\mathcal{G}_{4p^2}^0$ in $\mathcal{G}_{4p^2}^1$, v tem vrstnem redu. Za obe družini vzamemo množico vozlišč $V = \mathbf{Z}_p^2 \times \mathbf{Z}_4 = \{(x, y, z) \mid x, y \in \mathbf{Z}_p, z \in \mathbf{Z}_4\}$.

$$\begin{aligned} E(\mathcal{G}_{4p^2}^0) &= \{(x, y, 0)(x \pm 1, y, 1), (x, y, 1)(x, y \pm 1, 2), \\ &\quad (x, y, 2)(x \mp 1, y \pm k, 3), (x, y, 3)(x \mp 3, y \pm 1, 0) \mid x, y, \in \mathbf{Z}_p\}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} E(\mathcal{G}_{4p^2}^1) &= \{(x, y, 0)(x \pm 1, y, 1), (x, y, 1)(x, y \pm 1, 2), \\ &\quad (x, y, 2)(x \pm 1, y \pm k, 3), (x, y, 3)(x \pm 3, y \mp 1, 0) \mid x, y, \in \mathbf{Z}_p\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

4.7 Ostale družine in nekateri posamezni grafi

Grafi iz družine $X(4, p)$ [32], ki jih bomo označili z \mathcal{G}_{4p} , so edini $1/2$ -ločno tranzitivni grafi takega reda stopnje 4 in niso Cayleyevi. Definirani so z množico vozlišč $\{v_i^j : i \in \mathbf{Z}_4, j \in \mathbf{Z}_p\}$ in množico povezav

$$\left\{ \{v_i^j, v_{i+1}^{j+r^i}\}, \{v_i^j, v_{i+1}^{j-r^i}\} : i \in \mathbf{Z}_4, j \in \mathbf{Z}_p \right\}. \quad (4.20)$$

Družina grafov $X_{2p^3}^3$ [133], ki jo bomo označili z $\mathcal{G}_{2p^3}^3$, je definirana z množico vozlišč $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_p^3$, tako da sta vozlišči $(0, (x_0, y_0, z_0))$ in $(1, (x_1, y_1, z_1))$ sosednji natanko tedaj, ko je

$$(x_1, y_1, z_1) - (x_0, y_0, z_0) \in \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (-1, -1, -1)\}. \quad (4.21)$$

Poleg Cayleyevih grafov se v klasifikaciji $1/2$ -ločno tranzitivnih grafov reda $2pq$ [30] pojavi še družina grafov, ki niso Cayleyevi, kot jo bomo opisali zdaj. Naj bosta p in q praštevilici, tako da $4q$ deli $p-1$ in naj bo r element reda $4q$ v \mathbf{Z}_p^* . Naj bo $K = \{\text{liha števila } k, \text{ tako da je } 1 \leq k \leq q-1\}$. Definiramo grafe $X(r; m, n)$ tako, da imajo množico vozlišč enako $\{u_i^j \mid i \in \mathbf{Z}_m, j \in \mathbf{Z}_n\}$, množico povezav pa enako

$$E = \left\{ \{u_i^j, u_{i+1}^{j \pm r^i}\} \mid i \in \mathbf{Z}_m, j \in \mathbf{Z}_n \right\}.$$

Tedaj je družina grafov $\mathcal{NC}_{2pq}^{r,k}$ (pod našo oznako $\mathcal{G}_{2pq}^{r,k}$) enaka

$$\mathcal{G}_{2pq}^{r,k} = X(r^k; 2q, p). \quad (4.22)$$

5. poglavje

Metode

To poglavje je namenjeno pregledu nekaterih znanih dejstev o krovih in kvocientih ter izmeničnih ciklih. V prvem delu opišemo pojma kvocientov in krovov, pri čemer ju prilagodimo za digrafe, ki dopuščajo zanke in vzporedne loke. V drugem delu povzamemo teorijo izmeničnih ciklov in jo povežemo s kvocientnimi grafi, ko za grafe in njihove kvociente zapišemo enakosti za velikost ekvivalenčnih razredov relacije $A_{\mathcal{I}}$ in za polmere. Končno lahko z opisanimi orodji dokažemo še lemo o nekaterih lastnostih digrafov \overrightarrow{PX} iz 4.3.

5.1 Krovi in kvocienti

Krovi grafov in digrafov so naslednje orodje, ki ga bomo pogosto uporabljali — običajno so definirani za neusmerjene grafe, a se da pojem naravno razširiti na usmerjene grafe. V tem razdelku predstavimo nekaj osnovnih dejstev in rezultatov, za podrobnosti pa bralca napotimo k [63, 68].

Naj bosta Γ in Λ digrafa. *Morfizem* iz Γ v Λ je funkcija

$$f : V(\Gamma) \cup A(\Gamma) \rightarrow V(\Lambda) \cup A(\Lambda),$$

ki ohranja množici $V(\Gamma)$ in $A(\Gamma)$, tako da za vsak $x \in A(\Gamma)$ velja

$$f(\text{rep}(x)) = \text{rep}(f(x)) \quad \text{in} \quad f(\text{glava}(x)) = \text{glava}(f(x)).$$

Morfizem je *epimorfizem* ali *izomorfizem*, če je *surjektiv* ali *bijektiv* (v tem vrstnem redu). Avtomorfizem digrafa je natanko izomorfizem digrafa samega nase.

Epimorfizem $\wp : \Gamma \rightarrow \Lambda$ je *krovnna projekcija*, če za vsako vozlišče $v \in V(\Gamma)$ velja še, da sta bijektivni njeni zožitvi na zunanjo in notranjo okolico vozlišča:

$$\wp_v^\pm : \Gamma^\pm(v) \rightarrow \Lambda^\pm(\wp(v)).$$

Zaradi enostavnosti bomo zahtevali, da sta Γ in Λ povezana digrafa. Praslika $\wp^{-1}(x)$ vozlišča ali loka v Λ je *vlakno* krovnne projekcije \wp , grupi vseh avtomorfizmov Γ , ki ohranja vsa vlakna kot množice, pa rečemo *grupa krovnih transformacij*. Če je še tranzitivna na vsakem vlaknu, rečemo, da je *regularna*.

Kvocienti enostavnih grafov po edinkah so bili predstavljeni v [103, 105] in so od tedaj postali običajno orodje za študij simetričnih grafov. Avtorji včasih uporabljajo definicijo kvocientnega grafa, pri kateri so vozlišča definirana kot množica orbit edinke grupe avtomorfizmov, vozlišči V in W pa sta povezani natanko tedaj, ko v pripadajočih orbitah obstajata sosednji vozlišči $v \in V$ in $w \in W$. Po tej definiciji je kvocientni graf vedno enostaven, čemur se bomo želeli izogniti, zato bomo uporabili naslednjo definicijo. Naj bo Γ graf in naj bo $N \leq \text{Aut}(\Gamma)$. Kot prej za množico vozlišč kvocientnega grafa vzamemo množico N -orbit na vozliščih: $V_N = \{v^N : v \in V(\Gamma)\}$, množico povezav pa definiramo z množico N -orbit na povezavah, $E_N = \{x^N : x \in E(\Gamma)\}$.

Za digrafe bomo uporabljali podobno definicijo kvocienta. Ker se bo to izkazalo za uporabno v dokazih glavnih rezultatov, jo bomo prilagodili za digrafe, ki dopuščajo zanke in vzporedne loke. Naj bo zdaj Γ digraf, $N \leq \text{Aut}(\Gamma)$ in naj bosta $A_N = \{x^N : x \in A(\Gamma)\}$ ter $V_N = \{v^N : v \in V(\Gamma)\}$ množici N -orbit na lokih in vozliščih Γ . Nadalje definiramo funkciji rep in glava.

$$\begin{array}{ccc} \text{rep}_N : A_N \rightarrow V_N, & & \text{glava}_N : A_N \rightarrow V_N, \\ \text{rep}_N(x^N) = \text{rep}(x)^N & \text{in} & \text{glava}_N(x^N) = \text{glava}(x)^N. \end{array}$$

S tem smo definirali kvocientni digraf $\Gamma/N = (V_N, A_N, \text{glava}_N, \text{rep}_N)$, skupaj z naravnim epimorfizmom $\wp_N : \Gamma \rightarrow \Gamma/N$, ki zadošča pogoju $\wp_N(x) = x^N$ za vsak $x \in A(\Gamma) \cup V(\Gamma)$. Temu epimorfizmu bomo rekli *kvocientna projekcija po edinki N* . Če je $N \trianglelefteq G \leq \text{Aut}(\Gamma)$, obstaja naravno, ne nujno zvesto, delovanje kvocientne grupe G/N na digrafu Γ/N . Če je \wp_N krovnna projekcija, velja naslednje:

Lema 5.1. *Naj bo Γ digraf, naj bo $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$ in naj bo N edinka v G . Če je kvocientna projekcija $\wp : \Gamma \rightarrow \Gamma/N$ krovnna, je delovanje G/N na $V(\Gamma/N) \cup A(\Gamma/N)$ zvesto. Poleg tega sta stabilizatorja G_v in $(G/N)_{v^N}$ izomorfna za vsako vozlišče $v \in V(\Gamma)$.*

V tem primeru rečemo, da se grupa G/N dvigne vzdolž \wp . Natančneje, grupa $H \leq \text{Aut}(\Gamma/N)$ se dvigne vzdolž \wp , če obstaja $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$, ki vsebuje edinko N , tako da velja $G/N = H$.

Sledita dva zelo uporabna zadostna pogoja za to, da je neka kvocientna projekcija po edinki regularna krovnna projekcija. Grupi N avtomorfizmov Γ bomo rekli *semiregularna*, čim bo stabi-

lizator N_v trivialen za vsako vozlišče $v \in V(\Gamma)$.

Lema 5.2. Naj bo Γ povezan digraf, naj bo $N \leq \text{Aut}(\Gamma)$ in naj bo $\varphi : \Gamma \rightarrow \Gamma/N$ pripadajoča kvocientna projekcija. Potem so naslednje trditve ekvivalentne:

- (a) N je semiregularna;
- (b) notranja in zunanja stopnja vozlišč v in $\varphi(v)$ sta enaki za vsak $v \in V(\Gamma)$;
- (c) φ je regularna krovna projekcija.

5.2 Izmenični cikli, alter-eksponenti, radij in obseg

V tem razdelku predstavimo izredno uporabno orodje za študiranje digrafov, ki temelji na orientaciji lokov in sprehodov v digrafu. Pojmi, ki jih bomo uporabljali, so bili najprej predstavljeni v [81, 91] (posplošitev za grafe z neskončnimi redi je bila narejena v [67]). Vsa spodaj navedena dejstva so bila dokazana v [81] in jih je moč brez sprememb posplošiti na digrafe z zankami in vzporednimi loki.

Sprehod od vozlišča v_0 do vozlišča v_s dolžine s v digrafu Γ je zaporedje

$$(v_0, x_1, v_1, \dots, v_{s-1}, x_s, v_s)$$

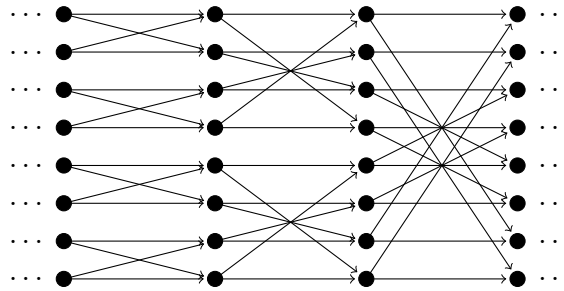
lokov $x_i \in A(\Gamma)$ in vozlišč $v_i \in V(\Gamma)$, tako da je za vsak $i \in \{1, \dots, s\}$ par $(\text{rep}(x_i), \text{glava}(x_i))$ enak bodisi (v_{i-1}, v_i) bodisi (v_i, v_{i-1}) . V prvem primeru bomo rekli, da je x_i pozitivno orientiran, v drugem pa, da je negativno orientiran v sprehodu. Sprehod je usmerjen, če so vsi njegovi loki pozitivno orientirani in izmeničen, če usmeritev lokov v njem alternira. Digraf Γ je (krepko) povezan, če za vsak par vozlišč $u, v \in \Gamma$ obstaja (usmerjen) sprehod od u do v . Vozliščno tranzitiven digraf je krepko povezan natanko tedaj, ko je povezan (glej npr. [89, Lemma 2]). Sprehod je zaprt, če se začne in konča v istem vozlišču.

Naj bo $W = (v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n)$ sprehod v digrafu Γ . Vsota $s(W)$ sprehoda W je razlika med številom pozitivno orientiranih in številom negativno orientiranih lokov v W . Podobno je k -ta delna vsota $s_k(W)$ definirana kot vsota začetnega sprehoda $(v_0, x_1, v_1, \dots, v_{s-1}, x_k, v_k)$ dolžine k . Množica $\{s_k(W), 0 \leq k \leq n\}$ je toleranca sprehoda W , vozlišči u in v pa sta alter-ekvivalentni s toleranco \mathcal{I} (pisano kot $uA_{\mathcal{I}}v$), če obstaja sprehod od u do v z vsoto 0 in toleranco, ki je vsebovana v \mathcal{I} .

Relacija $A_{\mathcal{I}}$ je ekvivalenčna za vsak interval \mathcal{I} , ki vsebuje 0, in je invariantna za vsak avtomorfizem digrafa Γ . Ekvivalenčni razred vozlišča v bomo označili z $A_{\mathcal{I}}(v)$ in uporabljali okrajšavo $A_i(v)$ za $A_{[0,i]}(v)$, če je $i \geq 0$ oziroma $A_{[i,0]}(v)$, če je $i \leq 0$. Ker je Γ končen digraf, obstaja nenegativno celo število e , tako da velja $A_e = A_{e+1}$ in (po indukciji) $A_e = A_{\infty}$. Najmanjšemu takemu številu rečemo alter-eksponent digrafa Γ in ga označimo z $\exp(\Gamma)$. Da se

dokazati, da je $\exp(\Gamma)$ enak najmanjšemu nenegativnemu celemu številu i , za katerega velja $A_{-i} = A_{-i-1}$ in $A_{[-i,i]} = A_{[-i-1,i+1]}$. Kadar bomo govorili o relacijah v različnih grafih, bomo zaradi jasnosti uporabljali simbol $A_{\mathcal{I}}^{\Gamma}$ namesto $A_{\mathcal{I}}$ relacijo v digrafu Γ .

Številu ekvivalenčnih razredov relacije A_{∞} rečemo *obseg* digrafa Γ in ga označimo s $\text{perim}(\Gamma)$. Če sta zunanja in notranja stopnja vsakega vozlišča pozitivni, lahko ekvivalenčne razrede B_i relacije A_{∞} oštevilčimo z elementi \mathbf{Z}_p (za $p = \text{perim}(\Gamma)$) tako, da ima vsak lok v Γ rep v nekem razredu B_i , glavo pa v B_{i+1} .



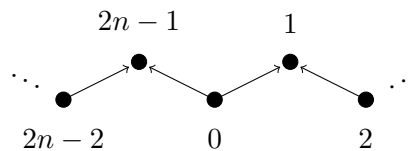
Slika 5.1: Zgled. Obseg digrafov $\overrightarrow{PX}(n, 3)$ je 8.

Še posebej nas bodo zanimala množice $A_1(v)$ in $A_{-1}(v)$, ki vsebujejo natanko tista vozlišča, ki jih lahko dosežemo iz v z izmeničnimi sprehodi sode dolžine, ki se začnejo s pozitivno (pri $A_{-1}(v)$ negativno) usmerjenim lokom. Presek $A_1(v) \cap A_{-1}(v)$ bomo označili z $\text{Att}(v)$ in mu rekli *spoj* (pri vozlišču v).

Odslej predpostavimo, da je Γ povezan, ločno G -tranzitiven digraf. Potem so množice $A_{\mathcal{I}}(v)$ in $\text{Att}(v)$ bloki delovanja G na $V(\Gamma)$, njihova velikost pa je odvisna le od \mathcal{I} in ne tudi od v . Tako lahko definiramo *polmer* Γ kot kardinalnost množice $\text{Att}(v)$ za poljubno vozlišče $v \in \Gamma$, označimo pa ga z $\text{rad}(\Gamma)$. Ker velja

$$\text{Att}(v) \subseteq A_1(v) \subseteq A_2(v) \subseteq \dots,$$

sledi, da $\text{Att}(v)$ deli $\text{rad}(\Gamma)$ in da $|A_i(v)|$ deli $|A_{i+1}(v)|$ za vsak $i \geq 1$.



Slika 5.2: Izmeničen cikel dolžine $2n$.

Naj bo zdaj Γ ločno tranzitiven digraf stopnje 2. Potem rečemo *izmeničen cikel* vsakemu njegovemu podgrafu, induciranemu z zaprtim sprehodom vsote 0, ki prepotuje vsak lok Γ največ enkrat. Izmenični cikli so bili vpeljani v [71] v kontekstu enostavnih $\frac{1}{2}$ -ločno G -tranzitivnih

digrafof stopne 2. Dolžina izmeničnega cikla je definirana kot dolžina pripadajočega zaprtega sprehoda.

Vsak izmeničen cikel je enolično določen s katerimkoli od svojih lokov, zato množica izmeničnih ciklov da razbitje množice lokov v Γ . To razbitje ohranjajo vsi avtomorfizmi Γ , od koder sledi, da so vsi izmenični cikli v Γ iste dolžine.

Do konca razdelka bomo dodatno, poleg 2-ločno tranzitivnosti Γ , privzeli tudi, da Γ ni izomorfen kakemu $\overleftarrow{C}_n^{(2)}$ za lih n . Tedaj je izmeničen cikel res cikel v smislu, da prepotuje vsako vozlišče digrafa kvečjemu enkrat in Γ vsebuje vsaj dva taka cikla.

Nadalje opazimo, da $A_1(v)$ vsebuje vsako drugo vozlišče izmeničnega cikla, ki se začne s pozitivno orientiranim lokom z repom v v ; podobno $A_{-1}(v)$ vsebuje vsako drugo vozlišče izmeničnega cikla, ki se začne z negativno orientiranim lokom z glavo v v . Natančneje, $|A_1(v)| = |A_{-1}(v)|$ in dolžina izmeničnega cikla je $2 \cdot \text{rad}(\Gamma)$. Za dano vozlišče v obstajata natanko dva izmenična cikla, ki se stikata v v , množica vozlišč, ki so vsebovana v obeh ciklih, pa je natanko $\text{Att}(v)$. Presek poljubnega para izmeničnih ciklov je torej prazen ali pa ima $|\text{Att}(v)|$ vozlišč.

Predpostavimo, da ima $\text{Att}(v)$ vsaj tri vozlišča in naj $g \in \text{Aut}(\Gamma)$ pribije lok $x \in A(\Gamma)$. Tedaj g pribije vsa vozlišča izmeničnega cikla C , ki vsebuje x , s tem pa tudi vsaj tri vozlišča vsakega izmeničnega cikla, ki ima neprazen presek s C . Zato pribije vsa vozlišča vsakega od teh ciklov, od koder po povezanosti sledi, da g pribije vsa vozlišča vseh izmeničnih ciklov Γ . Velja torej, da je g trivialen, s čimer smo dokazali naslednji lahek, a zelo uporaben rezultat.

Lema 5.3. Če je Γ povezan 2-ločno tranzitiven digraf stopnje 2, velja $|\text{Att}(v)| \leq 2$.

V naslednji lemi si pripravimo še en uporaben rezultat, tokrat za digrafe z eksponentom 1.

Lema 5.4. Če je Γ povezan 2-ločno tranzitiven digraf stopnje 2 in je $\exp(\Gamma) = 1$, velja $\Gamma \cong \overrightarrow{PX}(m, 1)$ za neko število m .

Dokaz. Če Γ ni enostaven, velja $\Gamma \cong \overrightarrow{C}_n^{(2)}$ za nek $n \geq 2$ po lemi 4.1, odkoder sledi $\exp(\Gamma) = 0$; protislovje. Zato je Γ enostaven in lahko uporabimo [99, Theorem 7.1] ter zaključimo, da velja $\text{rad}(\Gamma) = 2$. Ker je $\exp(\Gamma) = 1$, je lahko videti, da mora veljati tudi $|\text{Att}(v)| = 2$ in zato $\Gamma \cong \overrightarrow{PX}(m, 1)$ za nek m (glej npr. [71, Proposition 3.1]). \square

Preostanek razdelka o izmeničnih mrežah posvetimo povezavi med izmeničnimi relacijami in krovnimi projekcijami.

Lema 5.5. Naj bo $\wp : \Gamma \rightarrow \Lambda$ krovna projekcija, naj bo v vozlišče Γ in naj bo \mathcal{I} interval celih števil, ki vsebuje 0. Potem velja $\wp(A_{\mathcal{I}}^{\Gamma}(v)) = A_{\mathcal{I}}^{\Lambda}(\wp(v))$.

Dokaz. Naj bo $\tilde{u} \in \wp(A_{\mathcal{I}}^{\Gamma}(v))$. Potem obstaja $u \in V(\Gamma)$, tako da je $\wp(u) = \tilde{u}$ in ima sprehod

$(v, x_1, v_1, \dots, x_n)$ v Γ vsoto 0 in toleranco vsebovano v \mathcal{I} . Potem je projicirani sprehod

$$(\wp(v), \wp(x_1), \wp(v_1), \dots, \wp(x_n))$$

spet sprehod z vsoto 0 in toleranco vsebovano v \mathcal{I} , odkoder sledi $\tilde{u} \in A_{\mathcal{I}}^{\Lambda}(\wp(v))$.

Obratno, predpostavimo, da velja $\tilde{u} \in A_{\mathcal{I}}^{\Lambda}(\wp(v))$. Potem obstaja sprehod

$$(\wp(v), \tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{u})$$

z vsoto 0 in toleranco vsebovano v \mathcal{I} . Ker je \wp lokalno bijekcija, lahko konstruiramo dvig $(v, x_1, v_1, \dots, x_n, u)$, tako da je $\wp(x_i) = \tilde{x}_i$, $\wp(v_i) = \tilde{v}_i$ in $\wp(u) = \tilde{u}$. Ta dvig bo imel spet vsoto 0 in toleranco vsebovano v \mathcal{I} , zaradi česar mora biti u vsebovan v $A_{\mathcal{I}}^{\Gamma}(v)$ in torej $\tilde{u} \in \wp(A_{\mathcal{I}}^{\Gamma}(v))$. \square

Lema 5.6. *Naj bo Γ G -vozliščno tranzitiven digraf, naj bo N semiregularna edinka v G , naj bo $\Lambda = \Gamma/N$ in naj bo $\wp : \Gamma \rightarrow \Lambda$ pripadajoča krovna projekcija. Nadalje naj bo v vozlišče Γ in \mathcal{I} interval celih števil, ki vsebuje 0. Potem $|A_{\mathcal{I}}^{\Gamma}(v)|$ deli $|N| |A_{\mathcal{I}}^{\Lambda}(\wp(v))|$.*

Dokaz. V luči leme 5.5 vidimo, da velja

$$A_{\mathcal{I}}^{\Gamma}(v) \subseteq \wp^{-1}(\wp(A_{\mathcal{I}}^{\Gamma}(v))) = \wp^{-1}(A_{\mathcal{I}}^{\Lambda}(\wp(v))).$$

Ker je $A_{\mathcal{I}}^{\Lambda}(\wp(v))$ blok delovanja G/N na Λ , sledi, da je $\wp^{-1}(A_{\mathcal{I}}^{\Lambda}(\wp(v)))$ blok delovanja G na Γ . Ker je tudi $A_{\mathcal{I}}^{\Gamma}(v)$ blok G , velja, da $|A_{\mathcal{I}}^{\Gamma}(v)|$ deli $|\wp^{-1}(A_{\mathcal{I}}^{\Lambda}(\wp(v)))|$. Ker pa je praslika vozlišča v Λ vzdolž \wp N -orbita v Γ , sledi, da je slednje enako $|N| \cdot |A_{\mathcal{I}}^{\Lambda}(\wp(v))|$. \square

Lema 5.7. *Naj bo Γ povezan, 2-ločno G -tranzitiven digraf stopnje 2 in naj bo N edinka v G . Če je N lihega, praštevilskega reda, velja $\text{rad}(\Gamma/N) = \text{rad}(\Gamma)$.*

Dokaz. Naj bo q red N , naj bo $\Lambda = \Gamma/N$ in naj bo $\wp : \Gamma \rightarrow \Lambda$ pripadajoča krovna projekcija. Predpostavimo, da zaključek leme ne velja, t.j. da $\text{rad}(\Gamma/N) \neq \text{rad}(\Gamma)$.

Ker je G_v 2-grupa in je N lihega reda, N deluje semiregularno na $V(\Gamma)$. Po lemi 5.2 je \wp regularna krovna projekcija. Izberimo vozlišče v v Γ in $\epsilon \in \{-1, 1\}$ ter opazujmo množico $T = A_{\epsilon}^{\Gamma}(v)$. Jasno je $|T| = \text{rad}(\Gamma)$. Po lemi 5.5 je $\wp(T) = A_{\epsilon}^{\Lambda}(\wp(v))$. Ker je velikost slednjega enaka $\text{rad}(\Lambda)$, velja po začetni predpostavki $|\wp(T)| \neq |T|$, odkoder sledi, da T vsebuje vsaj dva elementa orbite v^T . Ker sta tako T kot v^N bloka delovanja G na $V(\Gamma)$, je blok tudi njun presek. Ker pa je v^N praštevilske velikosti, sledi, da je $v^N = v^N \cap T$ in zato $v^N \subseteq T$. Ker to velja za vsako izbiro ϵ , sledi

$$v^N \subseteq A_1^{\Lambda}(\wp(v)) \cap A_{-1}^{\Lambda}(\wp(v)) = \text{Att}(v).$$

Končno nas do protislovja pripelje lema 5.3, po kateri sledi, da Γ ni 2-ločno tranzitiven digraf. \square

5.2.1 O izmeničnih ciklih, operatorju Pl in družini grafov PX

Spodnja lema sledi iz [99, Lemma 3.1(iv), 3.2(ii)] v kontekstu enostavnih digrafov. Dokaz ostane nespremenjen tudi za ne-enostavne digrafe.

Lema 5.8. Če je Γ vozliščno tranzitiven digraf, potem je $\exp(\text{Pl}(\Gamma)) = \exp(\Gamma) + 1$.

Spodnji rezultat se je najprej pojavil v [99, Lemma 5.1] v kontekstu enostavnih digrafov in se da razširiti na splošne digrafe s pomočjo leme 4.1.

Lema 5.9. Če je Γ 2-ločno G -tranzitiven digraf, tako da je $\text{rad}(\Gamma) = 2$, potem velja $\Gamma \cong \text{Pl}(\Lambda)$, kjer je Λ 3-ločno G -tranzitiven digraf stopnje 2 in pol manjšega reda od Γ .

Za konec poglavja zapišemo in dokažemo še lemo, ki smo jo obljubili že v razdelku 4.3 pri lemi 4.5.

Lema 5.10. Naj bosta n in s nenegativni celi števili, $n \geq 1$, naj bo $\Lambda = \overrightarrow{\text{PX}}(n, s)$ in naj bo v vozlišče Λ . Potem je

$$(i) \exp(\Lambda) = s,$$

$$(ii) |A_\infty^\Lambda(v)| = 2^s \text{ in}$$

$$(iii) \text{perim}(\Lambda) = n.$$

Naj bo G grupa, ki deluje tranzitivno na lokih Λ in naj bo $K = \langle G_u : u \in V(\Lambda) \rangle$, t.j. grupa generirana z vsemi stabilizatorji vozlišč v G . Potem je K jedro delovanja G na razbitju $\{A_\infty^\Lambda(u) : u \in V(\Lambda)\}$ in $v^K = A_\infty^\Lambda(v)$; natančneje, K je edinka v G . Nadalje velja, da je K elementarno abelska grupa reda $2^s |G_v|$, kvocientni digraf Λ/K je izomorfen usmerjenemu ciklu dolžine n , kvocient G/K pa je ciklična grupa reda n .

Dokaz. Najprej opazimo, da je $\exp(\overrightarrow{\text{PX}}(n, 0)) = \exp(\overrightarrow{C}_n^{(2)}) = 0$. Po drugi strani po enačbi 4.2 velja $\Lambda = \text{Pl}(\overrightarrow{\text{PX}}(n, s-1))$ in zato po indukciji in lemi 5.8 $\exp(\Lambda) = s$, kot smo želeli dokazati.

Nadalje po enačbi 4.3 vozlišče digrafa Λ ustreza s -loku v $\overrightarrow{C}_n^{(2)}$. Spomnimo se, da je $V(\overrightarrow{C}_n^{(2)}) = \mathbf{Z}_n$ in da torej obstaja lok od i do j natanko tedaj, ko je $j - i = 1$. Če je v s -lok v $\overrightarrow{C}_n^{(2)}$, ki se začne v vozlišču i , in če je W sprehod v Λ z vsoto k , ki se začne v v , sledi, da je drugo krajišče W spet s -lok v $\overrightarrow{C}_n^{(2)}$, ki se začne v $i + k$. Natančneje je vsak element $A_\infty^\Lambda(v)$ eden od 2^s s -lokov v $\overrightarrow{C}_n^{(2)}$, ki se začnejo v i . Naj bosta zdaj w in u poljubna s -loka v $\overrightarrow{C}_n^{(2)}$, ki se začneta v i in $i + s$. Tedaj obstaja usmerjen sprehod dolžine s od v do u v Λ . Odtod sledi, da je $A_\infty^\Lambda(v)$ natanko množica vseh s -lokov $\overrightarrow{C}_n^{(2)}$, ki se začnejo v i , $|A_\infty^\Lambda(v)| = 2^s$, kot smo želeli dokazati. Sedaj lahko izračunamo

$$\text{perim}(\Lambda) = \frac{|V(\Lambda)|}{|A_\infty^\Lambda(v)|} = \frac{2^s n}{2^s} = n.$$

Enakost $v^K = A_\infty^\Lambda(v)$ sledi neposredno iz [99, Lemma 4.1, Corollary 4.2]. Natančneje, K ohranja vsak razred $A_\infty^\Lambda(u)$, $u \in \Lambda$ kot množico, odkoder sledi, da je K vsebovan v jedru (recimo mu M) delovanja G na razbitju $\{A_\infty^\Lambda(u) : u \in V(\Lambda)\}$. Več, velja $v^K = v^M$, in ker je $K_v = G_v = M_v$, sledi, da je $K = M$. Kot smo želeli dokazati, torej velja tudi

$$|K| = |v^K| |K_v| = 2^s |G_v|.$$

Dejstvo, da je Λ/K izomorfen usmerjenemu ciklu dolžine $\text{perim}(\Lambda)$ in dejstvo, da je G/K ciklična grupa reda $\text{perim}(\Lambda)$ sta neposredni posledici bodisi [81, Propositions 3.2 in 3.5] bodisi [104, Proposition 2.1].

Da končno dokažemo, da je K elementarno abelska, se ponovno spomnimo, da je vozlišče v Λ s -lok v $\vec{C}_n^{(2)}$ in da je torej stabilizator vozlišča v $\text{Aut}(\Lambda)$ enak stabilizatorju s -loka v $\text{Aut}(\vec{C}_n^{(2)})$. Vsak stabilizator s -loka v $\text{Aut}(\vec{C}_n^{(2)})$ je vsebovan tudi v jedru delovanja $\text{Aut}(\vec{C}_n^{(2)})$ na $V(\vec{C}_n^{(2)})$, ki je elementarno abelska grupa reda 2^s . Ker je K generirana s stabilizatorji vozlišč G_u , $u \in V(\Lambda)$, in torej s stabilizatorji s -lokov v $\vec{C}_n^{(2)}$ v G , sledi, da je tudi K elementarno abelska. \square

6. poglavje

Ločno tranzitivni grafi stopnje 4 reda dva-kratnik dveh praštevil

V tem poglavju bomo dokazali naslednji izrek, ki smo ga napovedali že v uvodu.

Izrek 6.1. *Naj bo Γ ločno tranzitiven graf stopnje 4 reda $2pq$, kjer sta p in q različni lihi praštevil. Potem velja ena od naslednjih trditev:*

- (a) Γ je ločno regularen in se pojavi v [132];
- (b) Γ je izomorfen grafu $PX(pq, 1)$;
- (c) Γ dopušča ločno tranzitivno polenostavno grupo in je izomorfen enemu od grafov v tabeli 6.1;
- (d) Γ je $D(F_{14})$ na 42 vozliščih, \mathcal{X}_4^{182} ali \mathcal{X}_6^{506} .

6.1 Opisi grafov iz tabel

Alternativni opis v tabelah 6.1 in 6.2 prihaja iz [127]. Grafi v tabeli 6.2 so reda pq in jih uporabimo v dokazu glavnega izreka v primeru, ko je graf reda $2pq$ krov nad grafom reda pq . Graf $\mathcal{Y}(5, 22; 5, 11)$ iz tabele 6.1 pripada družini grafov $\mathcal{Y}(m, n; r, t)$, ki so bili opisani v [80]. V obeh tabelah oznaka F_{10} predstavlja Petersenov graf, v tabeli 6.1 je Coxeterjev graf označen s F_{28} , v tabeli 6.2 pa je F_{14} Heawoodov graf (glej [33]). Grafa \mathcal{X}_2^{91} in \mathcal{X}_3^{91} v tabeli 6.2 sta ravno oba možna ločno tranzitivna odsekovna grafa delovanja $\text{PSL}(2, 13)$ glede na podgrupo A_4 . Delovanje $\text{PSL}(2, 13)$ glede na podgrupo, izomorfnu A_4 , je primitivno reda 91 in ima le en konjugiranostni razred podgrup, ki so izomorfne A_4 . Graf \mathcal{X}_5^{182} je ravno $\text{cdc}(\mathcal{X}_3^{91})$. Podobno so grafi

\mathcal{X}_3^{506} , \mathcal{X}_4^{506} in \mathcal{X}_5^{506} v tabeli 6.1 2-ločno tranzitivni odsekovni grafi delovanja grupe $PSL(2, 23)$ glede na podgrupo A_4 . Končno je T_{2162} graf na 2162 vozliščih (in torej prevelik, da bi že bil vključen v katerem od katalogov), ki dopušča 2-ločno tranzitivno delovanje grupe $PSL(2, 47)$. S programskim paketom Magma [9] je mogoče preveriti, da je to tudi edini graf, ki ga porodi to delovanje, saj se konjugirana razreda podgrup, izomorfnih A_4 , združita s konjugacijo v $PGL(2, 47)$, zato je vseeno, katero kopijo A_4 v $PSL(2, 47)$ izberemo za konstrukcijo odsekovnega grafa. Vsi grafi stopnje 4, ki dopuščajo ločno tranzitivno delovanje dvodimenzionalne projektivne specialne linearne grupe, vključno z omenjenimi, so bili opisani v [45, Proposition 5.1].

6.2 Grafi stopnje 4, ki dopuščajo ločno tranzitivna delovanja polenostavnih grup

Naj bosta zdaj p in q različni lihi praštevili, naj bo $\epsilon \in \{0, 1\}$ in naj bo Γ ločno G -tranzitiven graf stopnje 4 reda $2^\epsilon pq$. Če je Γ 2-ločno G -tranzitiven, potem red stabilizatorja G_v deli $2^4 3^6$ [126] oziroma je po [92] reda $2^\alpha 3^\beta$, kjer je

$$(\alpha, \beta) \in \{(2, 1), (3, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (4, 3), (4, 6)\}.$$

Torej mora veljati naslednji pogoj za red G :

$$|G| = 2^{\alpha+\epsilon} \cdot 3^\beta \cdot p \cdot q, \quad (6.1)$$

Če Γ ni 2-ločno G -tranzitiven, potem je inducirano delovanje $G_v^{\Gamma(v)}$ izomorfno C_4 , C_2^2 ali D_4 . V tem primeru iz povezanosti Γ sledi, da je stabilizator vozlišča G_v 2-grupa in da torej red grupe G zadostuje pogoju

$$|G| = 2^{\gamma+\epsilon} \cdot p \cdot q, \quad (6.2)$$

kjer je $\gamma \leq 2$. Naslednji izrek opisuje ločno tranzitivne grafe reda $2^\epsilon pq$ za $\epsilon \in \{0, 1\}$, ki dopuščajo ločno tranzitivno delovanje polenostavne grupe.

Izrek 6.2. *Naj bosta p in q različni lihi praštevili, naj bo $\epsilon \in \{0, 1\}$ in naj bo Γ ločno G -tranzitiven graf stopnje 4 reda $2^\epsilon pq$. Če Γ dopušča ločno tranzitivno delovanje polenostavne grupe G , potem ima G enolično določeno minimalno edinko T , ki je enostavna. Poleg tega se G vloži v $\text{Aut}(T)$. Še več, Γ je izomorfen enemu izmed grafov v tabeli 6.1, če je $\epsilon = 1$, ali tabeli 6.2, če je $\epsilon = 0$. Velja, da je bodisi T izomorfna A_5 ali $PSL(2, 7)$ bodisi je Γ 2-ločno G -tranzitiven.*

Dokaz. Po [18, Theorem 4.3A (iii)] sledi, da je vsaka minimalna edinka v G izomorfna T^k za

Tabela 6.1: Grafi reda $2pq$, ki dopuščata polenostavno grupo G

Γ	$ V(\Gamma) $	$G_v^{\Gamma(v)}$	G	Opis
\mathcal{X}_2^{30}	$2 \cdot 3 \cdot 5$	C_4	S_5	$D(F_{10})$
\mathcal{X}_3^{30}				$L(\text{cdc}(F_{10}))$
\mathcal{X}_4^{30}		C_2^2	S_5	$\text{cdc}(L(F_{10}))$
\mathcal{X}_5^{30}				
\mathcal{X}_3^{42}	$2 \cdot 3 \cdot 7$	C_4	$\text{PSL}(2, 7)$	$L(F_{28})$
		D_4	$\text{PGL}(2, 7)$	
\mathcal{X}_5^{42}	$2 \cdot 3 \cdot 7$	D_4	$\text{PGL}(2, 7)$	
\mathcal{X}_4^{70}	$2 \cdot 5 \cdot 7$	S_4	S_7	$\text{cdc}(O(4))$
\mathcal{X}_4^{110}	$2 \cdot 5 \cdot 11$	A_4	$\text{PGL}(2, 11)$	$\mathcal{Y}(5, 22; 5, 11)$
\mathcal{X}_5^{182}	$2 \cdot 7 \cdot 13$	A_4	$\text{PGL}(2, 13)$	
\mathcal{X}_3^{506}	$2 \cdot 11 \cdot 23$	A_4	$\text{PSL}(2, 23)$	
\mathcal{X}_4^{506}				
\mathcal{X}_5^{506}				
T_{2162}	$2 \cdot 23 \cdot 47$	S_4	$\text{PSL}(2, 47)$	

neko nekomutativno enostavno grupo T . Če je $k > 1$, potem iz pogojev 6.1 in 6.2 sledi, da je T $\{2, 3\}$ -grupa in torej rešljiva po dobro znanem Burnsideovem izreku. Iz tega protislovja sledi $k = 1$ in torej, da je vsaka minimalna edinka v G nekomutativna enostavna grupa.

1. Korak: G ima natanko eno minimalno edinko. Predpostavimo, da ima G dve neizomorfni minimalni edinki, ki sta obe nekomutativni in enostavni, recimo jima M in N . V tem primeru velja $\langle M, N \rangle \cong M \times N$ in zato je red G deljiv s produktom redov M in N . Če pq deli red ene od teh edink, je druga v luči pogojev 6.1 in 6.2 $\{2, 3\}$ -grupa in torej rešljiva. Ker je to protislovje, lahko predpostavimo, brez škode za splošnost, da je M $\{2, 3, q\}$ -grupa in N $\{2, 3, p\}$ -grupa. Vse grupe te oblike smo že zapisali v tabeli 3.1. Edina dva kartezična produkta parov omenjenih grup, katerih reda delita $2^5 3^6 pq$, sta $A_5 \times \text{PSL}(2, 7)$ in $A_5 \times \text{PSL}(2, 8)$. V obeh primerih je $\{p, q\} = \{5, 7\}$, zato lahko v spletnem katalogu ločno tranzitivnih grafov [98] preverimo, da nobena grupa avtomorfizmov grafov reda 35 ali 70 nima podgrupe, ki bi bila izomorfna kateremu od teh produktov.

Ravnokar dokazano protislovje pokaže, da ima G enolično določeno nekomutativno enostavno edinko T . Centralizator $C_G(T)$ je edinka v G in torej vsebuje minimalno edinko G , ki pa je po prejšnjem enolično določena — recimo ji T . Ker pa T ni komutativna, mora biti presek $C_G(T)$ s T trivialen in torej $C_G(T) = \{1\}$. Torej je delovanje grupe G na T s konjugiranjem zvesto in lahko G vložimo v $\text{Aut}(T)$, kot smo želeli pokazati.

Primer I: T ima tri praštevilske delitelje. Opazujmo torej pare grafov Γ in grup G , kjer je Γ

ločno G -tranzitiven in kjer ima red edine minimalne edinke v G , recimo ji T , samo tri različne praštevilske delitelje (glej 3.1). Če G zadostuje pogoju 6.2, potem mora biti bodisi $T \cong A_5$ bodisi $T \cong \text{PSL}(2, 7)$. V tem primeru je $\max\{p, q\} \leq 7$ in je torej red Γ kvečjemu 70. Tedaj je vsebovan v spletnem katalogu [98]. Po drugi strani, če G zadostuje pogoju 6.1, je T izomorfna eni od grup

$$A_6, \text{PSL}(2, 8), \text{PSL}(2, 17), \text{PSL}(3, 3) \text{ ali } \text{PSU}(3, 3). \quad (6.3)$$

V tem primeru je red Γ kvečjemu 102, graf Γ pa je vsebovan v katalogu [92] (glej tudi [97, 95]).

Primer II: T ima štiri praštevilske delitelje. Iz tabele enostavnih grup [37, Table 2.4., p. 135-136] lahko razberemo možne kandidate za T , tako da G zadostuje pogoju 6.1. V nadaljevanju bomo uporabljali oznake za grupe iz [37, Table 2.4.]. Naj bo r praštevilo. Red grup $T \cong G_2(r^k)$ je deljiv z r^6 , kar je v nasprotju s pogojem 6.1 razen če $r = 3$; v tem primeru je red deljiv z 2^6 . Podobno so redi grup $T \cong^2 B_2(2^{2m+1})$ deljivi z 2^6 . Edina alternirajoča grupa A_n , $n \geq 5$, katere red deli $2^5 3^6 pq$ in ima štiri različne prafaktorje, je A_7 , medtem ko je M_{11} edina sporadična grupa, katere red deli $2^5 3^6 pq$. Redi grup, ki pripadajo drugim družinam (z izjemo grup PSL) so deljivi s sedmo potenco nekega praštevila.

Preostane nam torej še, da si ogledamo primer $T \cong \text{PSL}(n, r^k)$ za praštevilo r , tako da ima red T natanko štiri različne prafaktorje. Opazimo, da potem $r^{\frac{kn(n-1)}{2}}$ deli red T . Lahko je preveriti, da če $n \geq 3$ ali $T \cong \text{PSL}(2, 3^k)$, potem ima bodisi red T kvečjemu 3 različne prafaktorje bodisi je red T prevelik, da bi G zadoščala pogoju 6.1. Možne kandidate za T smo torej omejili na $\text{PSL}(2, r^k)$ za $r \neq 3$. Ker je Γ 2-ločno G -tranzitiven graf in $T \leq G \leq \text{Aut}(T)$, velja po [45, Theorem 1.1], da je r lih in torej vsaj 5. Ker red Γ ni deljiv s kvadratom kekega praštevila in ker velja

$$|T| = \frac{1}{2}(r^k - 1)r^k(r^k + 1),$$

sledi, da je $k = 1$ in po istem izreku, da je bodisi $G_v \cong S_4$ in $r \equiv \pm 1 \pmod{8}$ bodisi $G_v \cong A_4$. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $T \cong \text{PSL}(2, q)$ in da je bodisi $T = G$ bodisi $G = \text{PGL}(2, q)$. Zdaj opazimo, da je eno izmed števil $q - 1$ in $q + 1$ deljivo z $2p$, drugo pa je oblike $2^k 3^l$ za $k \leq 4$ in $l \leq 6$, kar nam da končno mnogo možnosti za q , ki jih preverimo s pomočjo Magma. Po deljenju reda G z 12 ali 24 mora biti rezultat oblike $2^\epsilon pq$, $\epsilon \in \{0, 1\}$, kar nam da kandidate 11, 13, 23 in 47. Po primerjavi s katalogom ugotovimo, da ni nobenega grafa reda pq , ki bi dopuščal ločno tranzitivno delovanje grupe $\text{PSL}(2, 47)$.

2. Korak. Privzemimo zdaj, da Γ dopušča 2-ločno tranzitivno delovanje G , kjer je $T \leq G \leq \text{Aut}(T)$, T pa je izomorfna eni od grup s tremi prafaktorji iz 6.3, alternirajoči grupi A_7 , Mathieujevi grupi M_{11} ali eni od projektivnih linearnih grup $\text{PSL}(2, 11)$, $\text{PSL}(2, 13)$, $\text{PSL}(2, 23)$ ali $\text{PSL}(2, 47)$. V vseh primerih razen $\text{PSL}(2, 47)$ ima Γ manj kot 512 vozlišč in je torej vsebovan v

Tabela 6.2: Grafi reda pq , ki dopuščajo polenostavno grupo G

Γ	$ V(\Gamma) $	$G_v^{\Gamma(v)}$	G	Konstrukcija
\mathcal{X}_1^{15}	$3 \cdot 5$	C_2^2	A_5	$L(F_{10})$
		D_4	S_5	
\mathcal{X}_1^{21}	$3 \cdot 7$	D_4	$\text{PGL}(2, 7)$	$L(F_{14})$
\mathcal{X}_2^{35}	$5 \cdot 7$	S_4	A_7	$O(4)$
		S_4	S_7	
\mathcal{X}_2^{55}	$5 \cdot 11$	A_4	$\text{PSL}(2, 11)$	$\mathcal{Y}(5, 11; 2, 0)$
		S_4	$\text{PGL}(2, 11)$	
\mathcal{X}_2^{91}	$7 \cdot 13$	A_4	$\text{PSL}(2, 13)$	
\mathcal{X}_3^{91}	$7 \cdot 13$	A_4	$\text{PSL}(2, 13)$	
		S_4	$\text{PGL}(2, 13)$	
\mathcal{X}_2^{253}	$11 \cdot 23$	S_4	$\text{PSL}(2, 23)$	

katalogu [92]. V primeru, ko je $T \cong \text{PSL}(2, 47)$, lahko Γ generiramo z znanimi algoritmi z Magma. Spomnimo še, da če Γ dopušča delovanje $G, T \leq G \leq \text{Aut}(T)$, ki ni 2-ločno tranzitivno, ima red G kvečjemu tri različne prafaktorje in torej velja, da je $T \cong A_5$ ali $T \cong \text{PSL}(2, 7)$. Še več, kot smo že opazili, je Γ vsebovan v spletnem katalogu ločno tranzitivnih grafov [98]. Na tej točki lahko dobimo vse grafe te oblike in jih zapišemo v tabelo 6.1, pri čemer upoštevamo še odsekovni graf T_{2162} . \square

6.3 Dokaz glavnega rezultata

Lema 6.3. *Naj bo Γ graf stopnje 4 reda $2^c pq$, kjer sta p in q različni lihi praštevilci, in naj bo Γ ločno G -tranzitivno. Naj bo N netrivialna, minimalna abelska edinka v G reda n^k za neko pozitivno število k . Končno naj bo K jedro delovanja G na N -orbitah. Če je Γ_N izomorfen ciklu, potem velja ena od naslednjih trditev:*

(1) $n = 2$, $C_K(N) \neq 1$ in Γ je izomorfen $\text{PX}(pq, 1)$;

(2) n je liho, N_v je trivialen in Γ je ločno G -regularen.

Dokaz. Ker je N abelska, je vsebovana v $C_K(N)$. Prvi del leme sledi neposredno iz [35, Theorem 1.1 (a)], medtem ko iz drugega dela istega izreka sledi, da N deluje semiregularno čim je n lih. Orbite elementarno abelske grupe N so velikosti n^s za neko pozitivno število s . Ker red Γ ni deljiv s kvadratom nobenega praštevila, sledi, da je $s = 1$. Spet po [35, Theorem 1.1 (b)] red K_v deli $2^s = 2$. Zdaj upoštevamo, da je $G/K \cong D_r$, pri čemer je r število orbit N , in da je indeks

K_v v G_v enak 2. Zdaj iz ločno G -tranzitivnosti grafa Γ sledi, da je red G_v enak 4 in da je torej Γ ločno G -regularen. \square

Lema 6.4. *Naj bo Γ ločno G -tranzitiven graf in naj bo stabilizator vozlišča abelski. Potem je Γ ločno G -regularen.*

Dokaz. Naj bo v neko vozlišče v Γ . Najprej opazimo, da iz komutativnosti G_v sledi komutativnost $G_v^{\Gamma(v)}$, ki deluje tranzitivno na $\Gamma(v)$. Natančneje, $G_v^{\Gamma(v)}$ deluje regularno na $\Gamma(v)$. Iz povezanosti Γ sledi $G_v^{\Gamma(v)} \cong G_{uv}$ in torej, da je Γ ločno G -regularen. \square

Lema 6.5. *Naj bo Γ ločno G -tranzitiven graf stopnje 4 reda pq ter p in q različni lihi praštevili. Tedaj je bodisi Γ eden od grafov iz tabele 6.2 bodisi je Γ ločno G -regularen.*

Dokaz. Če je G polenostavna, sledi iz 6.2, da je Γ izomorfen enemu od grafov v tabeli 6.2. Predpostavimo torej lahko, da ima G elementarno abelsko minimalno edinko, recimo ji M . Orbita v^M vozlišča v je blok neprimitivnosti za G in je torej dolžine p , q ali pq ; natančneje, p ali q deli red M . Brez škode za splošnost privzamemo, da q deli $|M|$. Ker je M elementarno abelska, sledi iz $q = 3$, da $M \cong \mathbf{Z}_3^k$. Po izreku [82, Theorem 1.2] ne obstaja graf stopnje 4 reda $3p$ in torej lahko predpostavimo, da $M \cong \mathbf{Z}_q$. Sledi, da je M semiregularna na $V(\Gamma)$ z orbitami velikosti q in kvocientnim grafom Γ_M reda p . Opazimo, da je v tem primeru Γ elementarno abelski krov Γ_M (glej [63, 66] za splošno teorijo). Za dokaz ločno G -regularnosti Γ je dovolj pokazati, da je Γ/M ločno G/M -regularen graf.

Če je Γ_M izomorfen ciklu dolžine p , sledi po lemi 6.3 (2), da je Γ ločno G -regularen. Predpostavimo zdaj, da je kvocient stopnje 4. Po Burnsideovem rezultatu za grupe praštevilskega reda [18, Corollary 3.5B] velja, da je bodisi G/M 2-ločno tranzitivna na $V(\Gamma_M)$ bodise je izomorfna podgrupi affine grupe $\mathbf{Z}_p \rtimes \mathbf{Z}_{p-1}$. V slednjem primeru je stabilizator vozlišča v G/M ciklični, zaradi česar je Γ_M ločno G/M -regularen po 6.4. Ker je $\Gamma \rightarrow \Gamma_M$ krovna projekcija, sledi, da je Γ ločno G -regularen. Preostane nam primer, ko G/M deluje 2-ločno tranzitivno na $V(\Gamma_M)$. Potem je $\Gamma_M \cong K_5$ in Γ je ciklični ločno tranzitiven krov nad K_5 . Ti so bili klasificirani v [52, Theorem 3.1], od koder sledi, da je $G/M \cong \mathbf{Z}_5 \rtimes \mathbf{Z}_4$. Odtod G/M in zato G delujeta ločno regularno, kot smo videli že prej. \square

Končno smo pripravili teren za dokaz izreka. Naj bo Γ ločno G -tranzitiven graf, kjer je Γ reda $2pq$, kjer sta p in q različni lihi praštevili. Dokazali bomo, da je bodisi Γ ločno G -regularen in se pojavi v [132] bodisi je graf Γ izomorfen $PX(pq, 1)$, enemu od grafov iz tabele 6.1 ali enemu od grafov $D(F_{14})$, \mathcal{X}_5^{182} ter \mathcal{X}_6^{506} .

Dokaz. Če je Γ ločno G -regularen, velja 6.1 (a). Če je G polenostavna, sledi, da velja primer (c) iz izreka 6.2. Za preostanek dokaza bomo privzeli, da Γ ni ločno G -regularen in da ima G elementarno abelsko minimalno edinko, ki ji bomo rekli N . Če N ni semiregularna, je stopnja

Γ_N pravi delitelj števila 4 in primer (b) sledi iz leme 6.3, saj stopnja 1 ni možna, čim je red Γ_N večji od 2. Dodatno lahko torej privzamemo še, da je N semiregularna in da je torej red Γ ni deljiv s kvadratom kakega praštevila in da je N ciklična praštevilskega reda.

1. Korak: opravimo z lažjima primeroma, ko je $|N| = 2$ in ko je red N lih ter $C = C_G(N)$. Najprej predpostavimo, da je red N sod in torej enak 2. Če je Γ_N cikel, potem po lemi 6.3 velja $\Gamma \cong \text{PX}(pq, 1)$ in s tem primer (b) glavnega izreka. Če je Γ_N stopnje 4 in reda pq , potem je Γ 2-krov Γ_N . Po lemi 6.5 je Γ_N bodisi ločno G/N -regularen bodisi eden od grafov v tabeli 6.2. V prvem primeru je Γ ločno G -regularen, v drugem pa velja $|V(\Gamma)| \leq 506$ in torej lahko Γ najdemo v katalogu [92]; z Magmo je mogoče preveriti, da v tem primeru drži bodisi primer (c) bodisi primer (d).

Naj bo zdaj red N liho praštevilo; brez škode za splošnost lahko privzamemo $N \cong \mathbf{Z}_q$. Tedaj je Γ \mathbf{Z}_q -krov nad Γ_N , kvocientna preslikava pa je krovna projekcija. Predpostavimo, da je $C = C_G(N)$. Ker je N komutativna, je vsebovana v C . Če je $N = C$, potem G_v deluje zvesto s konjugiranjem na N in se torej vloži v $\text{Aut}(N)$. Torej je G_v komutativen in zato po lemi 6.4 sledi, da je Γ ločno G -regularen in drži primer 6.1 (a).

2. Korak: red N je lih in N je prava podgrupa C . Spomnimo, da red G zadostuje pogoju 6.1 ali 6.2. Če si $|C : N|$ in $|N|$ nista tuji števili, mora veljati $q = 3$, $N \cong \mathbf{Z}_3$ in $3 \mid G_v$. Še več, Γ je 2-ločno G -tranzitiven graf in Γ_N je reda $2p$. Po [82, Theorem 1.2] je kvocientni graf Γ_N izomorfen $K_{5,5} - 5K_2$, neincidenčnemu grafu $\text{PG}(2, 2)$ ali incidenčnemu grafu $\text{PG}(2, 3)$. Natančneje, red Γ_N je kvečjemu 26 in ker je Γ 3-krov nad Γ_N , je red Γ kvečjemu 78. Od treh možnih redov (30, 42 in 78) se samo en pojavi v katalogu [98] — to je $D(F_{14})$ v primeru (d) glavnega izreka.

Predpostavimo zdaj, da sta si $|C : N|$ in $|N|$ tuji števili. Po Schur-Zassenhausovem izreku obstaja podgrupa H v C , ki je izomorfná C/N , tako da velja $C = N \times H$. Ker je H množica vseh elementov v C reda tujega redu N , je karakteristična v C in torej edinka v G . Ker je $|H|$ tuj q , je H $\{2, 3, p\}$ -grupa. Ker je edinka, velikost vseh njenih orbit deli $2pq$. Odtod velja, da je indeks H_v v H enak 2, p ali $2p$ in da ima H vsaj q orbit. Dokazati želimo, da je H rešljiva, za kar zadostuje pokazati, da 3 deli red H . Če je tako, je H_v tranzitiven na $\Gamma(v)$ (in je torej H lokalno tranzitivna), zaradi česar ima H največ dve orbiti. Opazili smo že, da ima H največ q orbit, zato lahko zaključimo, da red H_v ni deljiv s 3. Torej mora 3 deliti indeks H_v v H , od koder sledi, da $p = 3$ ter da je H $\{2, 3\}$ -grupa in s tem rešljiva, kot smo želeli dokazati.

3. Korak: poiščemo novo edinko v G , ki nas bo privedla do že rešenega primera. Podstavek H je direkten produkt elementarno abelskih grup. Natančneje, vsebuje karakteristično elementarno abelsko grupo M , ki je tudi edinka v G . S ponovitvijo zgornjega argumenta, v katerem N nadomestimo z M , dobimo primer 6.1 (b) iz izreka, če M ni semiregularna, in primer (a) ali primer (d), če je M 2-grupa. Preostane nam še analiza primera, ko je M semiregularna in ni 2-grupa. Tedaj je $K = N \times M \cong \mathbf{Z}_{pq}$ semiregularna edinka v G z natanko dvema orbitama na $V(\Gamma)$, ki jima recimo U in W . Orbiti tvorita particijo za Γ in ker je Γ ločno

G -tranzitiven, so povezave lahko znotraj bodisi U bodisi W .

Opazujmo delovanje G_v na K s konjugiranjem. Če je zvesto, se G_v vloži v $\text{Aut}(N \times M) \cong \text{Aut}(N) \times \text{Aut}(M)$ in je torej komutativen. Po lemi 6.4 je tedaj Γ ločno G -regularen in velja 6.1 (a). Po drugi strani, če delovanje ni zvesto, obstaja $c \in C_{G_v}(K)$, ki deluje trivialno na U in ki preslika $w \in W$ v neko drugo vozlišče $w' \in W$. Ker je okolica vsakega vozlišča v W vsebovana v U , imata obe vozlišči enako okolico, kar pa je ekvivalentno definiciji neprimerne (unworthy) grafa. Po [100, Lemma 4.3] je zato Γ izomorfen $\text{PX}(pq, 1)$ in velja primer (b). \square

7. poglavje

2-ločno tranzitivni digrafi stopnje 2 nekaterih redov

V tem poglavju govorimo o povezanih ločno tranzitivnih digrafi, ki imajo vhodno in izhodno stopnjo enako 2, za katere dodatno zahtevamo določeno obliko praštevilskega razcepa reda. Če je Γ povezan, ločno tranzitiven 2-valenten digraf, potem za neko pozitivno število s grupa avtomorfizmov $\text{Aut}(T)$ deluje regularno na množici vseh s -lokov digrafa. Če je $s = 1$, potem grupa deluje regularno na množici lokov in ima red digrafov enostaven razcep. Tedaj je običajno mogoče določiti vse digrafe, na katerih lahko take grupe delujejo. Poučen primer, kako taka metoda deluje na primeru neusmerjenih, 4-valentnih grafov, se najde v [40]. V našem primeru se bomo temu izognili in se omejili na primer, ko je $s \geq 2$; t.j. privzeli bomo, da so naši digrafi vsi 2-ločno tranzitivni.

Glavna izreka tega poglavja sta 7.1 in 7.2, zapisana spodaj in dokazana v poglavju 7.1.

Izrek 7.1. *Naj bosta p in q različni lihi praštevili in naj bodo a , b in c števila, ki zadoščajo pogojem $a \in \{0, 1, 2, 3\}$, $b, c \in \{0, 1, 2\}$ in $(b, c) \neq (2, 2)$. Naj bo Γ povezan 2-ločno G -tranzitiven digraf stopnje 2 in reda $2^a q^b p^c$. Če G ni rešljiva, je red Γ kvečjemu 1224 in Γ je izomorfen enemu izmed sedeminšestdesetih grafov iz tabele 7.1.*

Opomba. Stolpec "oznaka" v tabeli 7.1 se nanaša na oznako digrafa v katalogu [96] (do reda 1000) ali v seznamu [7] (za rede večje od 1000). Število nerešljivih podgrup $\text{Aut}(\Gamma)$, ki delujejo na grafu 2-ločno tranzitivno, je podano v stolpcu $|S|$. Natančni opisi vseh grafov iz tabele 7.1 so na voljo na spletu [93] (za digrafe reda kvečjemu 1000) in na spletnem naslovu [7] za ostale grafe. Ti grafi so dani v obliki, berljivi z Magmo [9].

Tabela 7.1: Izredni digrafi iz izreka 7.1

Red	Razcep	Oznaka	$ \text{Aut}_v $	$ S $	$\text{soc}(\text{Aut})$
30	$2 \cdot 3 \cdot 5$	\mathcal{Y}_6^{30}	4	1	$\text{Alt}(5)$
42	$2 \cdot 3 \cdot 7$	\mathcal{Y}_3^{42}	8	1	$\text{PSL}(2, 7)$
60	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$	\mathcal{Y}_{16}^{60}	4	1	$\text{Alt}(5) \times C_2$
84	$2^2 \cdot 3 \cdot 7$	\mathcal{Y}_{20}^{84}	8	1	$\text{PSL}(2, 7) \times C_2$
		$\mathcal{Y}_{23}^{84}, \mathcal{Y}_{24}^{84}$	4	1	$\text{PSL}(2, 7)$
90	$2 \cdot 3^2 \cdot 5$	\mathcal{Y}_{12}^{90}	4	1	$\text{Alt}(5) \times C_3$
		\mathcal{Y}_{13}^{90}	16	3	$\text{Alt}(6)$
120	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	$\mathcal{Y}_{11}^{120}, \mathcal{Y}_{54}^{120}, \mathcal{Y}_{56}^{120}$	4	1	$\text{Alt}(5) \times C_2$
126	$2 \cdot 3^2 \cdot 7$	\mathcal{Y}_{15}^{126}	8	1	$\text{PSL}(2, 7) \times C_3$
150	$2 \cdot 3 \cdot 5^2$	\mathcal{Y}_{16}^{150}	4	1	$\text{Alt}(5) \times C_5$
168	$2^3 \cdot 3 \cdot 7$	\mathcal{Y}_{53}^{168}	8	1	$\text{PSL}(2, 7) \times C_2$
		$\mathcal{Y}_{64}^{168}, \mathcal{Y}_{65}^{168}, \mathcal{Y}_{81}^{168}, \mathcal{Y}_{82}^{168}$	4	1	$\text{PSL}(2, 7) \times C_2$
180	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$	\mathcal{Y}_{42}^{180}	4	1	$\text{Alt}(6)$
		\mathcal{Y}_{45}^{180}	4	1	$\text{Alt}(5) \times C_2 \times C_3$
		\mathcal{Y}_{57}^{180}	8	3	$\text{Alt}(6)$
		\mathcal{Y}_{58}^{180}	16	3	$\text{Alt}(6) \times C_2$
252	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$	\mathcal{Y}_{59}^{252}	8	1	$\text{PSL}(2, 7) \times C_2 \times C_3$
		$\mathcal{Y}_{69}^{252}, \mathcal{Y}_{70}^{252}$	4	1	$\text{PSL}(2, 7) \times C_3$
294	$2 \cdot 3 \cdot 7^2$	\mathcal{Y}_{19}^{294}	8	1	$\text{PSL}(2, 7) \times C_7$
300	$2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$	\mathcal{Y}_{66}^{300}	4	1	$\text{Alt}(5) \times C_2 \times C_5$
306	$2 \cdot 3^2 \cdot 17$	\mathcal{Y}_{11}^{306}	8	1	$\text{PSL}(2, 17)$
360	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$	\mathcal{Y}_{146}^{360}	4	1	$\text{Alt}(6) \times C_2$
		$\mathcal{Y}_{148}^{360}, \mathcal{Y}_{154}^{360}$	4	1	$\text{Alt}(6)$
		$\mathcal{Y}_{150}^{360}, \mathcal{Y}_{153}^{360}$	8	3	$\text{Alt}(6) \times C_2$
		\mathcal{Y}_{158}^{360}	4	1	$\text{Alt}(5) \times C_2^2$
		$\mathcal{Y}_{163}^{360}, \mathcal{Y}_{172}^{360}, \mathcal{Y}_{174}^{360}$	4	1	$\text{Alt}(5) \times C_2 \times C_3$
		\mathcal{Y}_{201}^{360}	8	3	$\text{Alt}(6) \times C_2$
		\mathcal{Y}_{202}^{360}	16	3	$\text{Alt}(6) \times C_2$
504	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$	\mathcal{Y}_{162}^{504}	8	1	$\text{PSL}(2, 7) \times C_2 \times C_3$
		$\mathcal{Y}_{180}^{504}, \mathcal{Y}_{182}^{504}, \mathcal{Y}_{232}^{504}, \mathcal{Y}_{233}^{504}$	4	1	$\text{PSL}(2, 7) \times C_2 \times C_3$

Izredni digrafi iz izreka 7.1 (nadaljevanje)

Red	Razcep	Oznaka	$ \text{Aut}_v $	$ S $	$\text{soc}(\text{Aut})$
588	$2^2 \cdot 3 \cdot 7^2$	\mathcal{Y}_{87}^{588}	8	1	$\text{PSL}(2, 7) \times C_2 \times C_7$
		$\mathcal{Y}_{90}^{588}, \mathcal{Y}_{91}^{588}$	4	1	$\text{PSL}(2, 7) \times C_7$
600	$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$	$\mathcal{Y}_{199}^{600}, \mathcal{Y}_{201}^{600}, \mathcal{Y}_{204}^{600}$	4	1	$\text{Alt}(5) \times C_2 \times C_5$
612	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 17$	\mathcal{Y}_{48}^{612}	4	1	$\text{PSL}(2, 17)$
		\mathcal{Y}_{49}^{612}	8	1	$\text{PSL}(2, 17)$
1176	$2^3 \cdot 3 \cdot 7^2$	X_1, X_2, X_3, X_4	4	1	$\text{PSL}(2, 7) \times C_2 \times C_7$
		X_5	8	1	$\text{PSL}(2, 7) \times C_2 \times C_7$
1224	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 17$	X_6, X_8, X_9	4	1	$\text{PSL}(2, 17) \times C_2$
		X_7	8	1	$\text{PSL}(2, 17) \times C_2$
		$X_i, 10 \leq i \leq 15$	4	1	$\text{PSL}(2, 17)$

Izrek 7.2. Naj bo Γ povezan, 2-ločno G -tranzitiven 2-valenten graf in naj bo G rešljiva. Naj bo n red Γ in naj velja še ena od naslednjih trditev:

- (i) n je lih in ni deljiv s tretjo potenco kakega praštevila,
- (ii) $n = 2^a m$, kjer je $a \in \{1, 2, 3\}$ in m liho število, ki ni deljivo s kvadratom kakega praštevila,
- (iii) $n = 2^a q^b p^2$, kjer je $a \in \{1, 2, 3\}$, $b \in \{0, 1\}$ in sta q in p različni lihi praštevili.

Potem velja ena od naslednjih trditev:

- (a) $\Gamma \cong \overrightarrow{\text{PX}}(t, s)$ za nek $t \geq 1$ in $s \geq 0$,
- (b) velja pogoj (iii), G ima podgrupo Sylowa P , ki je edinka, elementarno abelska reda p^2 in $\Gamma/P \cong \overrightarrow{\text{PX}}(t, s)$ za nek $t \geq 1$ in $s \geq 0$.

Opomba. Posvetimo nekaj besed na videz nedokončanemu primeru (b) izreka 7.2. Digrafi, ki se pojavijo v tem primeru, so regularne krovne projekcije na digrafe $\overrightarrow{\text{PX}}(t, s)$ reda $2^a q^b$, za katere je grupa krovnih transformacij elementarno abelska reda p^2 , vzdolž katere se dvigne 2-ločno tranzitivna grupa avtomorfizmov $\overrightarrow{\text{PX}}(t, s)$. Teorija dvigovanja grup vzdolž elementarno abelskih krovnih projekcij je bila razvita v [63] in ilustrirana v mnogih člankih (na primer [64, 101]). Če bi želeli, bi lahko uporabili to teorijo za določitev vseh krovnih digrafov za izbrane (a, b, c) . Še več, brez večjih težav bi lahko dobili popolno klasifikacijo za primere z redi kp in kp^2 za vse $k \leq 14$ in praštevila p .

V zadnjem času so bili napisani številni članki, v katerih so avtorji klasificirali ločno tranzitivne grafe in digrafe določene stopnje in redov z enostavnimi razcepi (največkrat kp ali kp^2

za izbrane majhne k in poljubna praštevila p). Za razliko od večine teh smo se trudili dokazati naše rezultate v najsplošnejši obliki, ki jo je še dopuščal pristop. Čeprav so mogoče manjše izboljšave (na primer z uporabo klasifikacije končnih enostavnih grup, katerih red je deljiv le s štirimi različnimi praštevili [49], bi bilo mogoče razširiti izrek 7.1 na rede, deljive tudi s četrtem lihim praštevilom), se zdi, da bi za večje izboljšave potrebovali nove ideje.

Opazimo, da je vsak ločno tranzitiven digraf brez vozlišč zunanje stopnje 0 (natančneje vsak povezan ločno tranzitiven digraf) je vozliščno tranzitiven.

7.1 Dokaza glavnih rezultatov

7.1.1 Pomožni rezultati

Ta razdelek pričnemo s splošno znanim dejstvom o stabilizatorjih vozlišč v ločno tranzitivnih digrafi stopnje 2 (glej npr. [74, Theorem 1.1] ali [99, Theorem 1.2]).

Lema 7.3. *Če je Γ povezan, s -ločno G -tranzitiven, ne pa tudi $(s+1)$ -ločno G -tranzitiven digraf stopnje 2 in $v \in V(\Gamma)$, je G_v grupa reda 2^s , ki je generirana s s -timi involucijami, in ki deluje regularno na množici vseh s -lokov, ki se začenjajo v v .*

Sledi dobro znan rezultat o splošnih linearnih grupah $GL(2, q)$.

Lema 7.4. *Če je q neka potenca lihega praštevila in H elementarno abelska 2-podgrupa v $GL(2, q)$, potem velja $|H| \leq 4$. Če je $|H| = 4$, potem H vsebuje centralno involucijo $GL(2, q)$ (in sicer negativno identiteto).*

Dokaz. Spomnimo se, da $SL(2, q)$ vsebuje enolično involucijo, negativno identiteto. Odtod sledi, da je presek $H \cap SL(2, q)$ reda največ 2. Po drugi strani je kvocient $GL(2, q)/SL(2, q)$ ciklični reda $q - 1$, zaradi česar je $H/SL(2, q)$ ciklični; ta grupa pa je izomorfna $H/SL(2, q) \cap H$ in zato reda največ 2. Zato je red H največ 4, presek $SL(2, q) \cap H$ ni trivialen in torej vsebuje negativno identiteto. \square

Naslednja situacija se bo ponovila v dokazih na več mestih v preostanku poglavja, zato jo zapišemo kot lemo.

Lema 7.5. *Naj bo Z grupa, ki vsebuje edinki X in Y , tako da je X komutativna in vsebovana v Y . Naj bo C centralizator X v Y . Če je red X tuj svojemu indeksu v C , velja $C = X \times T$ za neko edinko T v Z . Še več, T je izomorfna edinki v Y/X .*

Dokaz. Ker sta X in Y edinki v Z , je edinka tudi C . Ker je X komutativna, je vsebovana v C . Po predpostavki, da je red X tuj $|C : X|$, sledi po Schur-Zassenhausovem izreku, da ima X

komplement, ki mu recimo T . Ker C centralizira X , sledi $C = X \times T$. Zdaj opazimo, da je T sestavljen iz vseh elementov C , ki imajo red tuj redu X , odkoder sledi, da je T karakteristična v C . Ker je C edinka v Z , je edinka tudi T . Nadalje, ker je $X \leq C \trianglelefteq Y$, kvocient Y/X vsebuje edinko, izomorfno C/X , ki je izomorfna T . \square

Lema 7.6. *Naj bo m liho pozitivno število in naj bo G ločno tranzitivna grupa avtomorfizmov digrafa $\overrightarrow{PX}(m, s)$. Tedaj G vsebuje ciklično edinko, katere red deli m in je vsaj $m/(2^s |G_v| - 1)$.*

Dokaz. Naj bo $\Lambda = \overrightarrow{PX}(m, s)$. Po lemi 7.3 je stabilizator G_v reda 2^r za neko pozitivno število r . Naj bo $K = \langle G_v : v \in V(\Lambda) \rangle$. Spomnimo se, da je K elementarno abelska edinka v G reda 2^{s+r} (lema 5.10), G/K pa je ciklična grupa reda m . Natančneje, K je 2-podgrupa Sylowa v G , ki je edinka.

Naj bo C centralizator K v G . Po lemi 7.5 za $Z = Y = G$ in $X = K$ lahko zaključimo, da je $C = K \times T$ za neko edinko T v G , izomorfno podgrupi kvocienta G/K . Ker je G/K ciklična reda m , je T ciklična reda, ki deli m .

Kvocient G/C je izomorfen kvocientu G/K po C/K in, ker je $C/K \cong T$ in G/K ciklična reda m , je kvocient G/C ciklična reda $m/|T|$. Vendar pa se G/C vloži v $\text{Aut}(K)$, ki je izomorfna $\text{GL}(r+s, 2)$, za katero je dobro znano, da je vsaka njena ciklična podgrupa reda kvečjemu $2^{r+s} - 1$ (glej [44, Corollary 2.7]), od koder sledi, da je $m/(2^{r+s} - 1) \leq |T|$. \square

7.1.2 Dokaz izreka 7.1

Kot v izreku 7.1, naj bo Γ povezan, 2-ločno G -tranzitiven digraf stopnje 2 in reda $2^a q^b p^c$, kjer sta p in q različni lihi praštevili,

$$a \in \{0, 1, 2, 3\}, b, c \in \{0, 1, 2\}, (b, c) \neq (2, 2),$$

grupa G pa ni rešljiva. Dokazati moramo, da je Γ izomorfen enemu od digrafov v tabeli 7.1.

Vse take digrafe z največ 1000 vozlišči lahko najdemo v katalogu [96] ločno tranzitivnih digrafov stopnje 2. Izkaže se, da jih je natanko dvainpetdeset; vsi so naštet v tabeli z oznakami ATD — zato bomo do konca dokaza privzeli, da velja $|V(\Gamma)| > 1000$.

Predpostavimo, da G deluje tranzitivno na s lokih, ne pa tudi na $(s+1)$ -lokih Γ . Potem je $|G_v| = 2^s$ (glej lemo 7.3) in torej velja $|G| = 2^{a+s} q^b p^c$. Opazujmo dekompozicijsko vrsto

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_k = G$$

v G in pripadajočo množico kvocientov $F_i = G_i/G_{i-1}$ za $i \in \{1, \dots, k\}$. Spomnimo se, da so F_i enostavne grupe. Ker G ni rešljiva, obstaja $j \in \{1, \dots, k\}$, tako da F_j ni komutativna. Naj bo $T = F_j$; opazimo, da $|T|$ deli $|G| = 2^{a+s} q^b p^c$.

Znano je, da je natanko osem nekomutativnih enostavnih grup, katerih redi so deljivi z največ tremi različnimi praštevilami (glej npr. [46]). Te grupe so $\text{Alt}(5)$, $\text{PSL}(2, 7)$, $\text{Alt}(6)$, $\text{PSL}(2, 8)$, $\text{PSL}(2, 17)$, $\text{PSL}(3, 3)$, $\text{PSU}(3, 3)$ in $\text{PSU}(4, 2)$. Od teh je le prvih pet takih, da se liha praštevila pojavijo s kratnostjo največ 2. Te so skupaj z redi in redi grup avtomorfizmov našteje v tabeli 3.1.

Opazimo, da je red vsake od teh grup deljiv s 3 in da je drugo liho praštevilo lahko le 5, 7, ali 17. Brez škode za splošnost torej lahko privzamemo $q = 3$ in $p \in \{5, 7, 17\}$.

- Če je $p = 5$, je $|V(\Gamma)| \leq 8 \cdot 3 \cdot 5^2 = 600$, kar je v nasprotju z začetno predpostavko. To izključi grupi $\text{Alt}(5)$ in $\text{Alt}(6)$ kot možnosti za T .
- Če je $p = 7$, je red $2^a 3^b 7^c$ digrafa Γ večji od 1000 le za $a = 3$, $b = 1$ in $c = 2$. Ker 9 deli red $\text{PSL}(2, 8)$, sledi, da $T \not\cong \text{PSL}(2, 8)$, ter zato $T \cong \text{PSL}(2, 7)$ in $|V(\Gamma)| = 8 \cdot 3 \cdot 7^2 = 1176$.
- Končno, če je $p = 17$, je $T \cong \text{PSL}(2, 17)$, in ker 3^2 deli red $\text{PSL}(2, 17)$, sledi, da je red Γ enak $8 \cdot 3^2 \cdot 17 = 1224$.

Zdaj ločimo dva primera glede na to, ali G vsebuje netrivialno komutativno edinko ali ne.

Primer I. Predpostavimo, da ima G netrivialno komutativno edinko, zaradi česar vsebuje tudi neko minimalno komutativno edinko. Ker G ni rešljiva, Γ ni izomorfen $\overrightarrow{\text{PX}}$ digrafu. Po lemi 4.3 je N tedaj semiregularna, s tem pa je $\varphi: \Gamma \rightarrow \Gamma/N$ krovna projekcija.

Če je N 2-grupa, velja, da je $|N| \in \{2, 4, 8\}$, saj je sodi del $|V(\Gamma)|$ enak 8. Možni redi Γ/N so torej 147 in 153 (ko je $|N| = 8$, $T \cong \text{PSL}(2, 7)$ oziroma $\text{PSL}(2, 17)$), 294 in 306 (za $|N| = 4$), ter 588 in 612 (za $|N| = 2$).

Predpostavimo zdaj, da je N lihega reda. Ker je rešljiva, je T eden od kvocientov v dekompoziciji G/N in torej $|T|$ deli

$$\frac{|G|}{|N|} = \frac{2^{a+s} q^b p^c}{|N|}.$$

Ker je $|N|$ lih in $b + c \leq 3$, sledi, da je lihi del $|T|$ oblike $q^{b'} p^{c'}$ za $b' + c' \leq 2$; natančneje, T ni izomorfna $\text{PSL}(2, 17)$, zaradi česar je $T \cong \text{PSL}(2, 7)$, tako da velja še $|N| = 3$ ali $|N| = 7$ in $|V(\Gamma/N)| = 2^a \cdot 3 \cdot 7 \leq 168$. Ker smo že ugotovili, da je $|V(\Gamma)| = 8 \cdot 3 \cdot 7^2$, ko je $T \cong \text{PSL}(2, 7)$, sledi, da je $|N| = 7$ in $|V(\Gamma/N)| = 168$.

Tako smo pokazali, da v primeru I velja

$$|V(\Gamma/N)| \in \{147, 153, 168, 294, 306, 588, 612\}$$

in da se kvocientni digraf Γ/N pojavi v katalogu [96]. Če iz kataloga preberemo vse 2-ločno tranzitivne grafe teh redov z nerešljivo grupo avtomorfizmov, dobimo trojice $(T, |N|, \Gamma/N)$, kot so zapisane v tabeli 7.2 (podatki v zadnjem stolpcu ustrezajo imenom digrafov iz [96]).

Tabela 7.2: Možni kvocienti po minimalni abelovi edinki

T	$ N $	red n digrafa Γ/N	i za grafe iz kataloga \mathcal{Y}_i^n
PSL(2, 7)	2	588	87, 90, 91
	4	294	19
	8	147	—
	7	168	53, 64, 65, 81, 82
PSL(2, 17)	2	612	48, 49
	4	306	11
	8	153	—

Z metodami, opisanimi naprimer v [63, 102], smo za vsakega od digrafov Γ/N iz tabele 7.2 izračunali vse pripadajoče N -regularne krove, za katere se dvigne 2-ločno tranzitivna podgrupa $\text{Aut}(\Gamma/N)$; dobljenih devet krovnih digrafov pa je vključenih v tabelo 7.1 z oznakami X_1, X_2, \dots, X_9 .

Primer II. Predpostavimo zdaj, da G ne vsebuje netrivialne komutativne edinke. Opazujmo grupo, generirano z vsemi minimalnimi edinkami G , ki ji rečemo tudi *podstavka* G , in označimo s $\text{soc}(G)$. Ker G ne vsebuje netrivialne komutativne edinke, sledi, da je $\text{soc}(G)$ direktni produkt nekomutativnih enostavnih grup (glej npr. [18, Theorem 4.3A]). Ker je red vsake nekomutativne enostavne grupe deljiv z vsaj tremi različnimi praštevili in ker ne moreta biti b in c hkrati 2, je $\text{soc}(G)$ enostavna podgrupa G in torej izomorfná nekomutativnemu kompozicijskemu faktorju T grupe G .

Nadalje vemo, da G deluje zvesto s konjugiranjem na $\text{soc}(G)$, in se torej vloží v grupo avtomorfizmov podstavka. Ker je $\text{soc}(G)$ izomorfen bodisi PSL(2, 7) bodisi PSL(2, 17), je jasno, da je G izomorfná PSL(2, 7), PGL(2, 7), PSL(2, 17) ali PGL(2, 17). Po drugi strani se spomnimo, da je $|G| = 2^{a+s} q^b p^a$, da $a = 3$ in $s \geq 2$, od koder sledi, da je $|G|$ deljiv z 2^5 . To izključi vse možnosti razen zadnje, da je $G \cong \text{PGL}(2, 17)$. Ker je v tem primeru $|V(\Gamma)| = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 17$ in $|G| = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 17$, sledi, da je $|G_v| = 4$. Po lemi 7.3 je G_v elementarno abelski. Natančneje je Γ odsekovni digraf G glede na elementarno abelsko podgrupo reda 4 in podorbíto dolžine dva, ki ni sebi parna. Če opazujemo ustrezne podgrupe PGL(2, 17) in njihove odsekovne digrafe neposredno, dobimo šest paroma neizomorfnih digrafov, ki so naštetí v tabeli 7.1 pod oznakami $X_{10}, X_{11}, \dots, X_{15}$. S tem je zaključen dokaz izreka 7.1.

7.1.3 Dokaz izreka 7.2

Rekli bomo, da pozitivno število n zadošča pogoju (i), (ii) ali (iii), če velja ustrezna od spodnjih trditev.

- (i) n je lih in ni deljiv s kubom kakega praštevila.
- (ii) $n = 2^a m$, kjer je $a \in \{1, 2, 3\}$ in m liho število brez kvadratov.
- (iii) $n = 2^a q^b p^2$, kjer je $a \in \{1, 2, 3\}$, $b \in \{0, 1\}$ in sta p in q različni lihi praštevili.

Kot v izreku 7.2 predpostavimo, da je Γ povezan, 2-ločno G -tranzitiven digraf stopnje 2, kjer je G rešljiva in za $n = |V(\Gamma)|$ velja eden od pogojev (i), (ii) ali (iii). Pokazati moramo, da velja ena od naslednjih trditev:

- (a) Γ je \overrightarrow{PX} digraf; ali
- (b) n zadošča pogoju (iii) in G vsebuje p -podgrupo Sylowa P , ki je edinka in elementarno abelska reda p^2 , tako da je Γ/N \overrightarrow{PX} digraf.

Predpostavimo zdaj, da izrek ne velja in da je Γ najmanjši protiprimer glede na n . Velja torej, da Γ ni \overrightarrow{PX} digraf, odkoder po lemi 4.1 sledi, da je enostaven. Ker G deluje tranzitivno na množici vozlišč Γ in ker je stabilizator vozlišč G_v reda 2^s za nek $s \geq 2$ (glej lemo 7.3), sledi, da je $|G| = |G_v|n = 2^s n$

Dokazali bomo nekaj dejstev o Γ in G , s katerimi bomo na koncu prišli do protislovja.

Ugotovitev 0: Če je N semiregularna edinka v G , je Γ/N \overrightarrow{PX} digraf, ali pa $\frac{n}{|N|}$ (in zato n) zadošča pogoju (iii) in je p -podgrupa Sylowa v G/N elementarno abelska reda p^2 in edinka v G/N .

Dokaz: Ker je N semiregularna, po lemi 5.2 sledi, da je $\Gamma \rightarrow \Gamma/N$ krovna projekcija, po lemi 5.1 pa je Γ/N povezan, 2-ločno G/N -tranzitiven digraf stopnje 2. Še več, ker vsak delitelj števila, ki zadošča pogoju (i), (ii) ali (iii), spet zadošča enemu od teh pogojev, iz minimalnosti protiprimera Γ sledi, da bodisi $\frac{n}{|N|}$ zadošča pogoju (iii) in je p -podgrupa Sylowa G/N bodisi je Γ/N \overrightarrow{PX} digraf, kot smo trdili.

Ugotovitev 1: n ne zadošča pogoju (i) oziroma n je sod.

Dokaz: Predpostavimo nasprotno, da je n lih in ni deljiv s kubom kakega praštevila. Ker je lih, je stabilizator vozlišča v 2-podgrupa Sylowa v G in vsaka 2-grupa v G je vsebovana v stabilizatorju nekega vozlišča v G .

Naj bo N minimalna edinka v G . Ker je G rešljiva, je N elementarno abelska. Če je N 2-grupa, je $N \leq G_v$ za neko vozlišče v , zaradi česar delovanje G na vozliščih Γ ni zvesto, odkoder sledi, da Γ ni enostaven, kar pa je protislovje.

Sledi torej, da je N elementarno abelska grupa lihega reda, ki zato deluje semiregularno na vozliščih Γ . Po prejšnji ugotovitvi je Γ/N \overrightarrow{PX} digraf in ker je lihega reda, mora biti izomorfen $\overrightarrow{PX}(n', 0)$ za $n' = \frac{n}{|N|}$.

Naprej po lemi 5.7 vidimo, da je N praštevilskega reda, saj je $\text{rad}(\Gamma/N) = 1 \neq \text{rad}(\Gamma)$. Ker red Γ ni deljiv s kubom kakega praštevila, sledi, da je N elementarno abelska reda p^2 za neko liho praštevilo p .

Opazujemo delovanje grupe G/N na Γ/N . Ker velja $\Gamma/N \cong \overrightarrow{\text{PX}}(n', 0)$, sledi iz leme 4.2, da je stabilizator $(G/N)_{v^N}$ vozlišča v^N v Γ/N elementarno abelski in edinka v G/N . Poleg tega lahko opazimo, da je $(G/N)_{v^N} = G_v N/N$, odkoder sledi, da je $G_v N$ edinka v G .

Naj bo C centralizator N v $G_v N$. Če uporabimo lemo 7.5 za $X = N$, $Y = G_v N$ in $Z = G$, vidimo, da je $C = N \times T$ za neko edinko T v G , ki je izomorfna podgrupi v $Y/N \cong G_v$; natančneje, T je 2-grupa. Ker je red Γ lih in je T 2-grupa, T pribije vsaj eno vozlišče Γ in ker je edinka, deluje trivialno na množici vozlišč Γ . Ker je Γ enostaven digraf, sledi, da je $T = 1$ in zato $C = N$.

Ker je $G_v N$ edinka v G in vsebuje G_v , vsebuje G_u za vsako vozlišče $u \in V(\Gamma)$. Natančneje, $G_v N$ vsebuje vse involucije v G . Skupaj z dejstvom, da N centralizira samo sebe v $G_v N$, zato lahko zaključimo, da nobena involucija v G ne centralizira N .

Oglejmo si zdaj centralizator D edinke N v G . Ravno smo pokazali, da je D lihega reda, odkoder sledi, da je D semiregularen, zaradi česar je $\Gamma/D \cong \overrightarrow{\text{PX}}(n'', 0)$ za neko liho število n'' . Še več, ker G/D deluje 2-ločno tranzitivno na Γ/D , je 2-podgrupa Sylowa S v G/D stabilizator vsakega vozlišča v Γ/D in je zato edinka v G/D , elementarno abelska in reda vsaj 4. Po drugi strani se G/D vloži v $\text{Aut}(N) \cong \text{GL}(2, p)$. Po lemi 7.4 sledi, da je S reda 4 in vsebuje involucijo, ki je centralna v G/D . Vendar pa po lemi 4.2 to pomeni, da je n'' sod; s tem protislovjem zaključimo dokaz te ugotovitve.

Ugotovitev 2: *Gruppa G ne vsebuje elementarno abelske edinke reda p^2 za neko praštevilo p .*

Dokaz: Predpostavimo, da velja nasprotno. V luči ugotovitve 1 n zadostuje pogoju (iii); t.j., $n = 2^a q^b p^2$ za nek $a \leq 3$ in $b \leq 1$. Več, G vsebuje elementarno abelsko edinko P reda p^2 . Ker je p lih, je P semiregularna in po ugotovitvi 0 je bodisi $\Gamma/N \overrightarrow{\text{PX}}$ digraf bodisi $\frac{n}{|P|} = 2^a q^b$ zadostuje pogoju (iii). Slednje očitno ne velja, iz prvega pa sledi sklep (ii) izreka (7.2) za Γ , kar pa je protislovje.

Ugotovitev 3: $\text{rad}(\Gamma) \geq 3$; t.j., izmenični cikli v Γ so dolžine vsaj 6.

Dokaz: Predpostavimo obratno, da velja $\text{rad}(\Gamma) < 3$. Ker je Γ enostaven, velja $\text{rad}(\Gamma) \neq 1$, odkoder sledi $\text{rad}(\Gamma) = 2$, naprej pa po lemi 5.8 sledi, da je $\Gamma \cong \text{Pl}(\Lambda)$ za nek povezan 3-ločno G -tranzitiven graf Λ reda $\frac{1}{2}n$ in stopnje 2. Če je $\Lambda \overrightarrow{\text{PX}}$ digraf, je po lemi 4.2 tak tudi Γ , kar je protislovje. Po minimalnosti protiprimera Γ torej sledi, da sklep (ii) velja za Λ in G namesto Γ in G in, natančneje, da G vsebuje elementarno abelsko edinko reda p^2 za neko praštevilo p , kar pa je v nasprotju z ugotovitvijo 2.

Ugotovitev 4: *Gruppa G ne vsebuje edinke praštevilskega reda.*

Dokaz: Predpostavimo nasprotno: naj bo N edinka lihega reda q v G . Ker je G_v 2-grupa, je N semiregularna. Po ugotovitvi 3 in lemi 5.7 Γ/N ni \overrightarrow{PX} digraf. Vendar pa tedaj iz ugotovitve 0 sledi, da je $n = 2^a qp^2$, p -podgrupa Sylowa \tilde{P} v G/N pa je edinka v G/N in izomorfna \mathbf{Z}_p^2 .

Naj bo Q praslika \tilde{P} vzdolž kvocientne projekcije $G \rightarrow G/N$. Potem je Q edinka reda qp^2 v G , ki vsebuje edinko N reda q . Naj bo C centralizator N v Q . Ker je N komutativna in reda tujega svojemu indeksu v Q , lahko uporabimo lemo 7.5 za $Z = G$, $Y = Q$ in $Z = N$ in zaključimo, da je $C = N \times P$ za neko edinko P v G , ki je izomorfna edinki v Q/N . Ker je slednja grupa izomorfna \tilde{P} , sledi, da je P bodisi trivialna, ciklična reda p bodisi izomorfna \mathbf{Z}_p^2 .

Če je P trivialna, velja $C = N$, Q/N pa se vloži v $\text{Aut}(N)$, odkoder sledi, da je Q/N ciklična. Vendar pa je Q/N izomorfna \tilde{P} , ki je izomorfna \mathbf{Z}_p^2 , kar je protislovje. Naprej po ugotovitvi 2 sledi, da red P ni p^2 , kar nam pusti edino možnost $|P| = p$.

Opazujmo kvocient Γ/N . Ker je red Γ/N enak $2^a qp$, iz ugotovitve 0 sledi, da je Γ/N \overrightarrow{PX} digraf. Zdaj po lemi 5.7 sledi $\text{rad}(\Gamma) = \text{rad}(\Gamma/N)$. Ker je Γ/N \overrightarrow{PX} digraf, je $\text{rad}(\Gamma)$ največ 2, kar je v nasprotju z ugotovitvijo 3.

Ugotovitev 5: Če je N minimalna edinka v G , je N semiregularna reda 2 ali 4. Če je $|N| = 2$, potem $\Gamma/N \cong \overrightarrow{PX}(m, 2)$, in če $|N| = 4$, potem $\Gamma/N \cong \overrightarrow{PX}(m, 1)$ za neko liho število m . Poleg tega velja $\exp(\Gamma) = 2$.

Dokaz: Naj bo m lihi del n . Po ugotovitvi 1 je $n = 2^a m$, kjer je $a \geq 1$, m pa ni deljiv s kubom kakega praštevila. Naj bo N minimalna edinka v G . Ker je G rešljiva, je N elementarno abelska in ker je $|G| = 2^{a+s} m$, sledi po ugotovitvah 2 in 4, da je N 2-grupa. Če N ni semiregularna, velja po lemi 4.3, da je Γ \overrightarrow{PX} digraf, kar je v nasprotju s predpostavkami. Zato je N semiregularna, red N deli n in $|N| = 2^t$ za neko število t , ki zadošča $1 \leq t \leq a$.

Po ugotovitvi 0 je bodisi $\frac{n}{|N|}$ zadošča pogoju (iii) in grupa G/N vsebuje elementarno abelsko edinko \tilde{P} reda p^2 bodisi je Γ/N \overrightarrow{PX} digraf.

Predpostavimo najprej, da velja slednje. Potem velja

$$\frac{n}{|N|} = 2^{a-t} q^b p^2, \quad a - t \geq 1.$$

Ker je $a \leq 3$, odtod sledi $t \in \{1, 2\}$. Kot v dokazu ugotovitve 4 naj bo Q praslika \tilde{P} vzdolž kvocientne projekcije $G \rightarrow G/N$. Potem je Q edinka v G reda $2^t p^2$, ki vsebuje edinko N reda 2^t . Opazujmo zdaj centralizator C edinke N v Q in uporabimo lemo 7.5 za $Z = G$, $Y = Q$ in $X = N$, odkoder lahko zaključimo, da velja $C = N \times P$ za neko morda trivialno p -grupo P , ki je edinka v G . Če je P trivialna, se $Q/N \cong \tilde{P} \cong \mathbf{Z}_p^2$ vloži v $\text{Aut}(N) \cong \text{GL}(t, 2)$. Ker je $t \leq 2$, temu jasno ne more biti tako in P ni trivialna, kar pa je v nasprotju bodisi z ugotovitvijo 2 bodisi z ugotovitvijo 4.

To protislovje pokaže, da velja prva možnost, t.j. da je $\Gamma/N \cong \overrightarrow{PX}(2^{a-t-r}m, r)$ za neko število r , tako da velja $0 \leq r \leq a-t$. Naj bo $\Lambda = \Gamma/N$ in naj bo $\wp: \Gamma \rightarrow \Lambda$ pripadajoča krovna projekcija. Ker je $a \leq 3$ in $t \geq 1$, vidimo, da je $r \leq 2$.

Če je $r = 0$, po lemi 4.4 sledi, da je $\Gamma \overrightarrow{PX}$ digraf, kar je protislovje.

Če je $r = 1$, velja bodisi $a = 2$ in $t = 1$ bodisi $a = 3$ in $t \in \{1, 2\}$. Naj bo $v \in V(\Gamma)$ in naj bo $v' = \wp(v)$. Opazimo, da je $\exp(\Lambda) = 1$ (glej lemo 5.10) in da je $|A_i^\Lambda(v')| = 2$ za vsak $i \geq 1$. Po lemi 5.6 sledi, da moč množice $A_i^\Gamma(v)$ deli

$$2^t |A_i^\Lambda(v')| = 2^{t+1},$$

pri čemer je $2^{t+1} \leq 8$ za vsak $i \geq 1$. Ker je $|A_1^\Gamma(v)| = \text{rad}(\Gamma)$ in $\text{rad}(\Gamma) \geq 3$, sledi, da je $|A_1^\Gamma(v)| \in \{4, 8\}$. Če je $|A_1^\Gamma(v)| = |A_2^\Gamma(v)|$, je $\exp(\Gamma) = 1$, in po lemi 5.4 je $\Gamma \overrightarrow{PX}$ digraf, kar je protislovje. Zato je $|A_1^\Gamma(v)| < |A_2^\Gamma(v)|$, odkoder sledi, da je $|A_1^\Gamma(v)| = 4$ in $|A_i^\Gamma(v)| = 8$ za vsako število $i \geq 2$ in zato $\exp(\Gamma) = 2$. Še več, ker $8 = |A_2^\Gamma(v)|$ deli 2^{t+1} , vidimo, da mora biti $t = 2$ in $a = 3$, odkoder še naprej sledi, da je $\Lambda = \overrightarrow{PX}(m, 1)$, kot smo želeli dokazati.

Podobno, če je $r = 2$, velja $a = 3$, $t = 1$ in $\Lambda = \overrightarrow{PX}(m, 2)$. Zato je $\exp(\Lambda) = 2$, $|A_1^\Lambda(v')| = 2$ in $|A_i^\Lambda(v')| = 4$ za vsak $i \geq 2$. Še več, kot zgoraj je $|A_1^\Gamma(v)| \geq 3$ in $|A_1^\Gamma(v)| < |A_2^\Gamma(v)|$. Po lemi 5.6 torej sledi tudi

$$|A_1^\Gamma(v)| = 2|A_1^\Lambda(v')| = 4 \quad \text{in} \quad |A_2^\Gamma(v)| = |A_\infty^\Gamma(v)| = 8.$$

S tem velja tudi $\exp(\Gamma) = 2$, kot smo želeli; s tem tudi zaključimo dokaz ugotovitve 5.

Ugotovitev 6: Red n digrafa Γ je kvečjemu 744.

Dokaz: Naj bo N minimalna edinka v Γ . Spomnimo se prejšnje ugotovitve: ker je $\exp(\Gamma) = 2$, po [99, Theorem 7.1] sledi, da je $|G_v| \leq 2^4$. Po lemi 5.1 velja tudi, da je stabilizator $(G/N)_{v,N}$ reda kvečjemu 2^4 , po lemi 7.6 pa velja, da G/N vsebuje ciklično edinko \tilde{Y} , katere red ℓ je lih za neko število ℓ , ki zadošča neenakosti

$$\ell \geq \frac{m}{2^{\alpha+4} - 1} \tag{7.1}$$

kjer je α bodisi 1 bodisi 2, glede na to, ali je $|N| = 4$ ali $|N| = 2$. Naj bo $Y \leq G$ praslika \tilde{Y} vzdolž kvocientne projekcije $G \rightarrow G/N$ in naj bo C centralizator N v Y . Uporabimo lemo 7.5, da zaključimo $C = N \times T$ za neko ciklično grupo $T \triangleleft G$, katere red deli ℓ . Ker je T ciklična, je vsaka njena podgrupa karakteristična v T in torej edinka v G . Če T ni trivialna, sledi, da G vsebuje edinko praštevilskega reda, kar je v protislovju z ugotovitvijo 4. Zato je $T = 1$ in $C = N$.

Če je $|N| = 2$, potem $\alpha = 2$, N je centralna v Y in velja $Y = C = N$. Vendar pa je $\ell = |Y|/|N|$ in zato $\ell = 1$. Glede na (7.1) lahko vidimo, da je $m \leq 2^{2+4} - 1 \leq 63$ in zato

$$n = |N||V(\Gamma/N)| = 2|V(\overrightarrow{PX}(m, 2))| = 8m.$$

Pri tem je $8m \leq 504$ in zato $n \leq 504$. Če je $|N| = 4$, velja $\alpha = 1$ in po neenakosti (7.1) sledi $m \leq 31 \cdot \ell$ in s tem

$$n = 4|V(\overrightarrow{PX}(m, 1))| = 8m,$$

tako da je $8m$ in zato n kvečjemu $248 \cdot \ell$. Po drugi strani, ker je $C = N$, se ciklična grupa Y/N reda ℓ vloži v $\text{Aut}(N) \cong \text{GL}(2, 2) \cong \text{Sym}(3)$ in zato velja $\ell \leq 3$. Vendar pa je $n \leq 3 \cdot 248 = 744$, s čimer zaključimo dokaz ugotovitve 6.

S pomočjo kataloga enostavnih ločno tranzitivnih digrafov valence 2, na voljo v [96], lahko enostavno preverimo, da ne obstaja protiprimer izreka z manj kot 1000 vozlišči, kar pa je v nasprotju z ugotovitvijo 6 in dokaže izrek.

8. poglavje

$(2, *)$ -grupe, LR digrafi in PR grafi

V tem poglavju bomo govorili o $(2, *)$ -generiranih grupah — to so grupe, ki jih lahko generiramo z involucijo in še enim elementom poljubnega reda. Katalog vseh takih grup do reda kvečjemu 6000 je na voljo na spletu [93] in je del večjega projekta, na katerem sodelujejo Potočnik, Spiga in Verret, katerega namen je sestaviti popolne sezname $1/2$ -ločno tranzitivnih grafov stopnje 4 in vozliščno tranzitivnih grafov stopnje 3.

Omenjeni katalog $(2, *)$ -grup bomo uporabili za konstrukcijo kataloga [43] povezanih digrafov stopnje 2, katerih grupa avtomorfizmov vsebuje ločno regularno podgrupo; takšnim digrafom bomo rekli *LR digrafi*. Ločno regularna podgrupa LR digrafa deluje regularno na povezavah temeljnega grafa, tranzitivno na njegovih vozliščih, ne pa tudi tranzitivno na lokih. Neusmerjenim grafom, katerih grupa avtomorfizmov premore kakšno tako grupo, rečemo *PR grafi*. Če polna grupa avtomorfizmov PR grafa deluje netranzitivno na lokih, je graf $1/2$ -ločno tranzitiven, sicer pa ločno tranzitiven.

Opisali bomo, kako smo s pomočjo programskih paketov Magma [9] in Sage [115] iz kataloga $(2, *)$ -grup izračunali katalog digrafov stopnje 2 do reda 3000, na katerih te grupe delujejo ločno regularno, ter kataloga temeljnih grafov teh digrafov.

Vsi ločno tranzitivni digrafi stopnje 2 do reda 1000 so že bili izračunani in so na voljo v katalogu "ATD" [96], del katerega so tudi temeljni grafi vključenih digrafov. Vse dobljene LR digrafe in PR grafe smo poiskali tudi v katalogu ATD; datoteke v formatu csv z indeksi digrafov in grafov v obeh katalogih so del končnega rezultata; opisane so v razdelku 8.2.2 in so kot ostale datoteke kataloga na voljo na spletu [93]. Izkazalo se bo, da se skoraj vsi digrafi iz kataloga ATD (v katerem jih je 26 457, od tega 961 digrafov \overline{PX}) pojavijo tudi v našem katalogu, natančneje, pojavijo se vsi, razen 492. V katalogu ATD avtorji uporabijo okrajšavi "HAT" za $1/2$ -

ločno in "GHAT" za ločno tranzitivne temeljne grafe digrafov iz ATD. Isti oznaki bomo tudi mi uporabljali za kataloga $1/2$ -ločno in ločno tranzitivnih grafov stopnje 4 do reda vključno 1000.

Rezultat opisan v tem poglavju, izračunani katalog, lahko najkrajše povzamemo v naslednjem izreku.

Izrek 8.1. *Do reda kvečjemu 3000 je natančno*

1. 165 950 LR digrafov in
2. 76 200 PR grafov, od teh jih je 28 234 $1/2$ -ločno tranzitivnih, ostali pa so ločno tranzitivni.

Naraščanje števila LR digrafov in PR grafov z redom je predstavljeno v diagramu 8.1.

Opomba. Na absciso diagrama 8.1 smo postavili interval celih števil od 0 do 3000. Za število n s tega intervala so vrednosti prvih treh izrisanih funkcij kar števila digrafov oziroma grafov do tega reda, pri čemer so ločno tranzitivni PR grafi podmnožica PR grafov. Posebej so označena števila n , pri katerih se zgodijo veliki skoki v številu digrafov in grafov do reda n . Najmanjši od označenih skokov se zgodi pri $n = 1024$, največji pa pri $n = 2048$.

8.1 Ločno tranzitivni digrafi (2, *)-grup

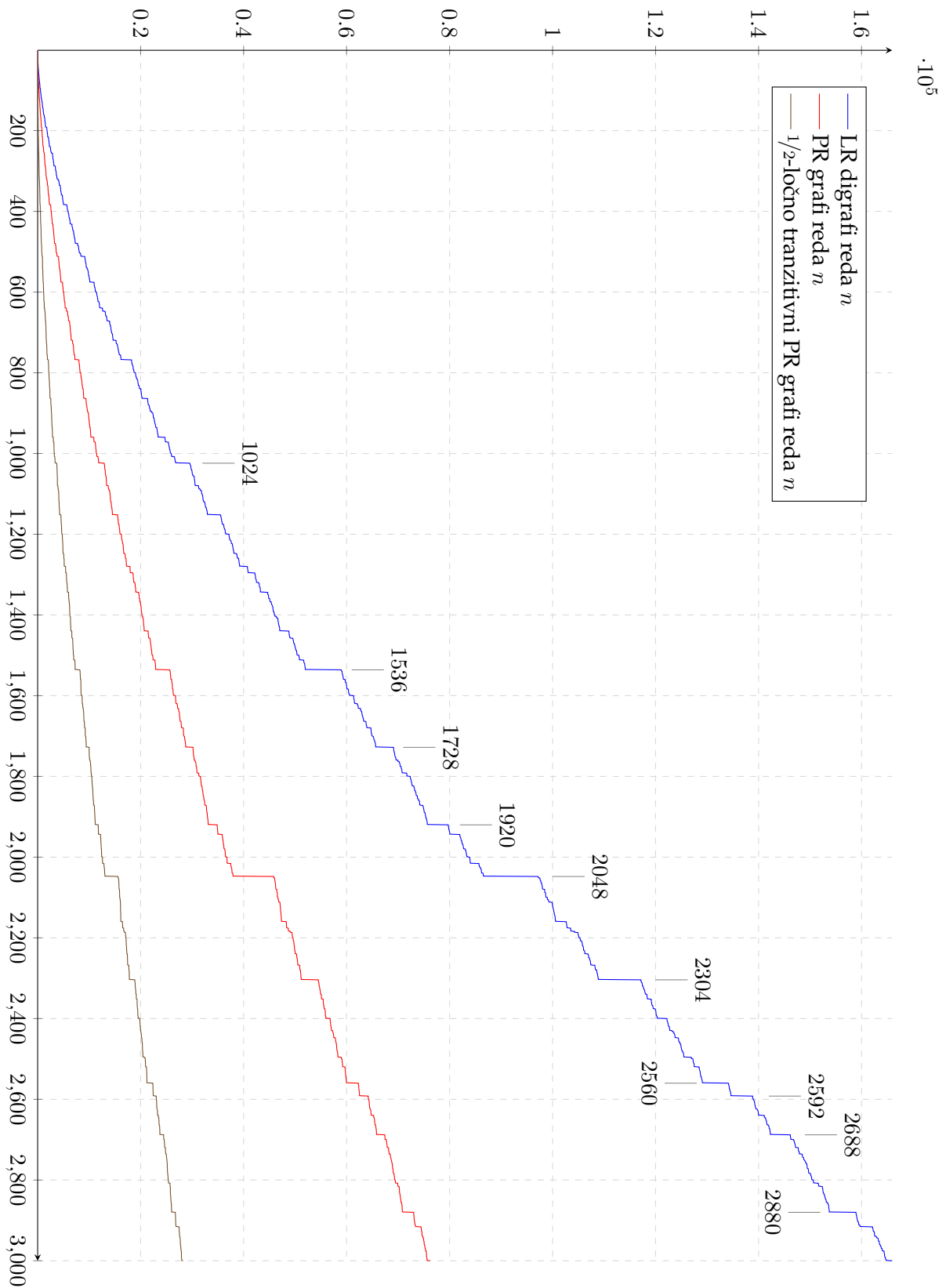
Naj bo G končna grupa in (G, x, g) taka trojica, da involucija x ni v centru G in da velja $G = \langle x, g \rangle$. Taki trojici rečemo (2, *)-grupa; neki drugi (2, *)-grupi (H, y, h) je izomorfna natanko tedaj, ko med njima obstaja izomorfizem grup $f : G \rightarrow H$, tako da je $f(x) = y$ in $f(g) = h$. Končno rečemo za neko grupo G' da je (2, *)-generirana, če obstaja (2, *)-grupa (G, x, g) , tako da je G izomorfna G' . Kot kaže katalog (2, *)-grup [93], obstaja natanko 129 340 (2, *)-generiranih grup reda kvečjemu 6000 in 345 070 (2, *)-grup.

Naj bo G (2, *)-grupa. Definirajmo LR digraf z množico vozlišč $V = G/\langle x \rangle$ in množico lokov

$$A = \{(\langle x \rangle a, \langle x \rangle ga) : a \in G\}.$$

Vsak tak digraf je stopnje 2, G pa na njem deluje z desnim množenjem ločno regularno. Na ta način je mogoče za vsako (2, *)-grupo izračunati digraf; nalogo računanja digrafov za vseh 345 070 (2, *)-grup smo prepustili Magmi.

Lahko zgodi, da je dobljeni digraf dvojni cikel $\overleftrightarrow{C}_n^{(2)}$ (recimo, kadar je $g^2 = 1$) — te med procesiranjem izločimo, saj nas zanimajo le enostavni digrafi. Digrafi, ki smo jih z Magmo izračunali iz kataloga (2, *)-grup, niso vsi paroma neizomorfni, zato moramo iz dobljenega seznama izločiti dvojnike. Preverjanje izomorfnosti vseh parov digrafov, kot so na razpolago na tem koraku, bi bilo potratno. Možna rešitev zagate je v programskem paketu Sage, s pomočjo

Slika 8.1: Naraščanje števila LR digrafov, PR grafov in $1/2$ -ločno tranzitivnih PR grafov z redom.

katerega lahko za vse grafe izračunamo njihove "kanonične zapise", nakar moramo poskrbeti le še, da primerjamo te.

Kanonični zapis grafa (digraf) Γ v jeziku Sage dobimo s funkcijo `canonical_label()`, ki vrne enoličen graf (digraf) $C(\Gamma)$, tako da velja

- $C(\Gamma)$ je izomorfen Γ ,
- digrafa ali grafa Γ_1 in Γ_2 sta izomorfna če in samo če je $C(\Gamma_1) = C(\Gamma_2)$.

Ker se povezave v datoteko zapišejo v leksikografskem vrstem redu, z lahkoto sklepamo, da sta digrafa ali grafa izomorfna natanko tedaj, ko sta enaka njuna zapisa s seznamom povezav.

S tem smo dobili seznam paroma neizomorfnih digrafov. Ker si v resnici želimo vedeti več o grafih stopnje 4, za dobljene digrafe izračunamo temeljne grafe in na dobljenem seznamu ponovimo trik z izločanjem dvojnikov.

8.2 O katalogu

V tem razdelku opišemo katalog s pripadajočimi datotekami, ki je na voljo na spletni strani [43]. Poleg seznamov digrafov in grafov so v katalog vključene tudi datoteke z nekaterimi podatki o digrafi in grafih. Te imajo končnico `.csv` in jih je mogoče odpreti z vsakim uporabnejšim programom za delo s tabelami, kot je na primer Excel. V ločeni datoteki je definiranih nekaj priročnih Magma funkcij za delo s katalogom. Priporočeno je, da se vse datoteke hranijo v istem direktoriju, saj se podatkovne datoteke uporabljajo za Magma funkcije za delo s katalogom.

- `ARD3k.mgm`. To datoteko naj uporabnik naloži v Magma z ukazom `load` pred uporabo kataloga. V njej so definirane funkcije, ki sprejmejo za parameter število n :
 - `numberOfARD(n)`, ki vrne število LR digrafov reda n ,
 - `numberOfERG(n)`, ki vrne število PR grafov reda n ,
 - `numberOfHAT(n)`, ki vrne število PR grafov reda n , ki so $1/2$ -ločno tranzitivni,
 - `numberOfGHAT(n)`, ki vrne število PR grafov reda n , ki so ločno tranzitivni.

Poleg teh so definirane še funkcije, ki vračajo digrafe ali grafe. Te sprejmejo parametra n in i ;

- `ARDigraph(n, i)`, ki vrne LR digraf reda n , ki v katalogu nastopa z zaporednim številom i ,
- `ERgraph(n, i)`, ki vrne povezavno regularen graf reda n , ki v katalogu nastopa z zaporednim številom i ,

- `HATgraph(n, i)`, ki vrne $1/2$ -ločno tranzitiven PR graf reda n , ki v katalogu nastopa z zaporednim številom i ,
 - `GHATgraph(n, i)`, ki vrne ločno tranzitiven PR graf reda n , ki v katalogu nastopa z zaporednim številom i .
- `ARD3k.csv`. Ta datoteka vsebuje tabelo z nekaterimi podatki o LR digrafih, tako da so vrstice v tabeli predstavljene z vrstico, v kateri so vrednosti celic ločene z vejicami. Stolpci so opisani v razdelku 8.2.1.
 - `ERG3k.csv`. Ta datoteka vsebuje tabelo z nekaterimi podatki o PR grafih, tako da so vrstice v tabeli predstavljene z vrstico, v kateri so vrednosti celic ločene z vejicami. Stolpci so opisani v razdelku 8.2.1.
 - V naslednjih datotekah so vsebovane tabele, v katerih povežemo katalog LR digrafov s katalogom ločno tranzitivnih digrafov do reda 1000 ter kataloga ločno in $1/2$ -ločno tranzitivnih PR grafov s katalogoma HAT in GHAT grafov. Stolpci teh tabel so opisani v razdelku 8.2.2.
 - `ARDigraphsATD.csv`,
 - `ERgraphsATD.csv`,
 - `HATgraphsATD.csv` in
 - `GHATgraphsATD.csv`.
 - Zaradi hitrosti obdelave in tehničnih omejitev Magma so sezname digrafov in grafov razdeljeni v več datotek. Naslednje tekstovne datoteke vsebujejo seznam LR digrafov:
 - `ARD1400.txt`,
 - `ARD1800.txt`,
 - `ARD2040.txt`,
 - `ARD2200.txt`,
 - `ARD2400.txt`,
 - `ARD2590.txt`,
 - `ARD2780.txt`,
 - `ARD2960.txt` in
 - `ARD3000.txt`.

V teh datotekah je vsak od digrafov predstavljen z dvema vrsticama.

```
n|i
{[v,w], [x,y], ...}
```

V prvi vrstici predstavlja n red digrafa, i pa njegovo zaporedno število med vsemi digrafi tega reda. V drugi vrstici je podan seznam povezav, kjer so $[v, w]$, $[x, y]$, itd. usmerjene povezave. Množica vozlišč grafa je množica števil od 0 do $n - 1$. Sezname povezav digrafov so bili dobljeni s funkcijo `canonical_label` iz programskega paketa Sage, zaradi česar je za izomorfizem dovolj primerjati seznama povezav.

- Seznam PR grafov je zapisan v datotekah.
 - ERG1940.txt, – ERG2690.txt in
 - ERG2300.txt, – ERG3000.txt.

Vsak graf je predstavljen z dvema vrsticama, v prvi je kot zgoraj zapisan red grafa in njegovo zaporedno število, v drugi pa seznam povezav v sledeči obliki.

$$\{\{v, w\}, \{x, y\}, \dots\}.$$

Množica vozlišč grafa je množica števil od 0 do $n-1$. Seznami povezav pa so bili dobljeni s funkcijo `canonical_label` iz programskega paketa Sage.

8.2.1 Podatki o digrafi, grafi in opis tabele s podatki

V tabeli `ARD3k.csv` so za vse LR digrafe poleg nekaterih uporabnih (a manj zanimih) lastnosti digrafov zapisani tudi nekateri podatki o delovanjih njihovih grup avtomorfizmov, ki smo jih izračunali med sestavljanjem kataloga. V sledečem seznamu so naštetni in opisani stolpci tabele.

- `Name`: ime grafa v katalogu, $ARD[n, i]$.
- `|V|`: število vozlišč digrafa.
- `Groups`: seznam trojic m, i, k , ki predstavljajo $(2, *)$ -grupe $P[m, i, k]$ iz kataloga $(2, *)$ -grup [93], iz katerih lahko dobimo ta graf.
- `IsGWD`: "yes", če je digraf \overrightarrow{PX} in "no" sicer.
- `UndGrph`: ime temeljnega grafa $ERG[n, i]$. Če je temeljni graf PX , zapišemo namesto imena $GWD(m, k)$, kjer sta m in n parametra, graf PX .
- `SelfOpp`: "yes", če digraf izomorfen svojemu nasprotnemu digrafu in "no" sicer.
- `Opp`: ime nasprotnega digrafa (kar "Name", če je digraf nasproten samemu sebi).
- `IsUndAT`: "yes" če je temeljni graf ločno tranzitiven in "no" sicer.
- `s`: največje število s , tako da je digraf s -ločno tranzitiven.
- `GvAb`: "Ab", če je stabilizator vozlišča G_v v polni grupi avtomorfizmov digrafa komutativen, sicer "n-Ab".
- `|Av:Gv|`: indeks grupe G v grupi avtomorfizmov temeljnega grafa.
- `Solv`: "solv", če je G rešljiva in "n-solv" sicer.

V tabeli `ERG3k.csv` povzamemo predvsem pregledne informacije o PR grafih.

- `Name`: ime grafa v katalogu, $ERG[n, i]$.
- `|V|`: število vozlišč digrafa.
- `Digraphs`: seznam digrafov, katerih temeljni graf je dani graf, pri čemer je vsak digraf zapisan v obliki $n|i$, kjer je n njegov red, i pa njegovo zaporedno število.
- `AT`: $G_{HAT}[n, j]$, če je graf ločno tranzitiven in $HAT[n, j]$, če je $1/2$ -ločno tranzitiven. Pri tem je j zaporedno število grafa med ločno tranzitivnimi oziroma $1/2$ -ločno tranzitivnimi PR grafi reda n .
- `IsGWD`: "yes", če je graf PX in "no" sicer.

8.2.2 Tabele povezav na katalog [96].

V naslednjih dveh tabelah za vsak dobljeni LR digraf in vsak PR graf reda kvečjemu 1000 zapišemo, pod katerimi imeni nastopa v katalogu ATD [96].

Stolpci tabele povezav za LR digrafe.

- `Name`: ime digrafa v katalogu, $ARD[n, i]$.
- `ATD`: ime digrafa v katalogu ločno tranzitivnih grafov, $ATD[n, i]$.
- `Und`: ime temeljnega grafa v katalogu ATD, bodisi $HAT[n, j]$ bodisi $G_{HAT}[n, k]$.

Stolpci tabele povezav za PR grafe.

- `Name`: ime grafa v katalogu, $ERG[n, i]$.
- `ATD`: ime grafa v katalogu ATD, bodisi $HAT[n, j]$ bodisi $G_{HAT}[n, k]$.

Dodatek A

Preglednica manjših grafov

V dodatku povzamemo vse v disertaciji omenjene majhne grafe stopnje 4. Ti namreč nastopajo pod mnogimi imeni v literaturi in se pojavijo treh zanimivih katalogih grafov. V preglednici zato navedemo vse oznake, pod katerimi se pojavi posamezen graf v citiranih delih, in indekse, pod katerimi se pojavi v katalogih [97, 92, 127].

Legenda. V tabeli so grafi urejeni najprej po redu, ki je zapisan v prvem stolpcu, v drugem stolpcu pa zaradi priročnosti podamo še praštevilski razcep reda. V sledečih stolpcih povzamemo oznake, pod katerimi grafi nastopajo v treh katalogih.

[97] Katalog ločno tranzitivnih grafov do reda 640 z oznakami $AT4val[n, i]$.

[92] Seznam 2-ločno tranzitivnih grafov pod oznakami $Tetra2AT[n, i]$ na kvečjemu 2000 vozliščih; popoln je za grafe do reda 727.

[127] Katalog povezavno tranzitivnih grafov pod oznakami $C4[n, i]$ do reda 150.

V zgornjih katalogih je indeks vsakega grafa sestavljen iz dveh delov: reda n in zaporednega števila i med grafi reda n — v ustreznih treh stolpcih podamo le i . V predzadnjem stolpcu zapišemo še podatek o tem, ali je graf ločno regularen, v zadnjem stolpcu pa oznako, pod katero se graf pojavlja v obstoječih klasifikacijah. Če graf ni ločno regularen, nam podatek iz stolpca [92] pove še, če je vsaj 2-ločno tranzitiven (kadar ima indeks v tem katalogu) ali je le ločno tranzitiven (če se ne pojavi v tem katalogu).

Tabela A.1: Manjši grafi z oznakami v različnih katalogih.

Red	Razcep	[97]	[92]	[127]	LR?	Literatura
9	3^2	1	–	1	ne	$F'(0)$ [124, Lemma 4.6 (1)]
12	$2^2 \cdot 3$	1	–	2	da	\mathcal{C}_{12} [132]
14	$2 \cdot 7$	2	1	2	ne	neincidenčni graf $\text{PG}(2, 2)$
15	$3 \cdot 5$	1	–	1	ne	$\text{PSL}(2, 5)$, $F(1)$ [124, Lemma 4.6 (1)]
16	2^4	1	1	2	ne	
		2	–	1	ne	
21	$3 \cdot 7$	1	–	2	ne	$\text{PGL}(2, 7)$, $L_3(2)_{21}^4$ [124, Example 2.3]
26	$2 \cdot 13$	3	1	3	ne	incidenčni (Levijev) graf $\text{PG}(2, 3)$
27	3^3	2	–	1	da	
28	$2^2 \cdot 7$	3	1	3	ne	\mathcal{G}_{28} [131, Example 3.7]
30	$2 \cdot 3 \cdot 5$	2	–	7	ne	$D(F_{10})$
		3	–	1	ne	$L(\text{cdc}(F_{10}))$
		4	1	4	ne	$\text{cdc}(L(F_{10}))$
		5	–	8	da	\mathcal{NC}_{30}^2 [132]
		7, 8	–	5, 6	da	\mathcal{NC}_{30}^0 , \mathcal{NC}_{30}^1 [132]
35	$5 \cdot 7$	2	1	1	ne	A_7 [109, Lemma 3.2]
36	$2^2 \cdot 3^2$	1	–	3	ne	
		2	–	1	ne	
		3	–	4	ne	
		4	–	6	da	$\mathcal{GPS}2[4, 3, (01) : (12)]$
		5	–	2	da	$\mathcal{BW}_{12}[5, 1, 5]$
		6	–	5	da	
42	$2 \cdot 3 \cdot 7$	3	–	4	ne	$L(F_{28})$
		5	–	5	ne	
55	$5 \cdot 11$	2	1	4	ne	$\text{soc} = \text{PGL}(2, 11)$, [109, Example 4.3]
70	$2 \cdot 5 \cdot 7$	4	1	4	ne	$\text{cdc}(O(4))$
75	$3 \cdot 5^2$	1	–	3	da	
		2	–	2	da	
		3	–	1	da	

Manjši grafi z oznakami v različnih katalogih. (nadaljevanje)

Red	Razcep	[97]	[92]	[127]	LR?	Literatura
91	7 · 13	2	1	2	ne	
		3	2	3	ne	
100	2 ² · 5 ²	1	–	2	ne	
		2	–	1	ne	
		3	–	4	ne	
		4	–	6	da	
		5	–	3	da	
		6	–	5	da	
		7	–	10	ne	
110	2 · 5 · 11	4	1	6	ne	$\mathcal{Y}(5, 22; 5, 11)$
147	3 · 7 ²	1	–	6	da	
		2	–	1	da	
		3	–	2	da	
182	2 · 7 · 13	5	2	–	ne	
253	11 · 23	2	1	–	ne	soc = PSL(2, 23) [109, Example 4.3]
363	3 · 11 ²	1	–	–	da	
		2	–	–	da	
		3	–	–	da	
506	2 · 11 · 23	3	1	–	ne	
		4	2	–	ne	
		5	3	–	ne	
		6	4	–	ne	
507	3 · 13 ²	1	–	–	da	
		2	–	–	da	
		3	–	–	da	

Opombe.

- Graf \mathcal{C}_{12} [132] je Cayleyev graf $\text{Cay}(A_4, \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\})$, kjer je $A_4 = \langle a, b \mid a^3 = b^3 = (ab)^2 = 1 \rangle$ in je izomorfen \mathcal{X}_1^{12} .
- V katalogu [97] sta dva grafa s 14 vozlišči, eden od katerih je neincidenčni graf $\text{PG}(2, 2)$, drugi pa ima pare vozlišč z enakimi okolicami.

- Grafa $F'(0)$ in $F(1)$ sta opisana v [124, Lemma 4.6], kjer so grafi $F(s)$ definirani kot orbitalni grafi grup $\text{PSL}(2, 2^{2^s})$. Prvi je kar edini ločno tranzitiven graf stopnje 4 in reda 9, drugi pa edini ločno tranzitiven graf stopnje 4 reda 15, katerega grupa avtomorfizmov je enaka S_5 .
- Grupa avtomorfizmov grafa $L_3(2)_{21}^4$ je podgrupa $\text{PGL}(2, 7)$ po [124, Example 2.3]; v katalogu [97] je samo en graf reda 21 s tako grupo avtomorfizmov.
- Grafa na 30 vozliščih iz [132] z oznakama \mathcal{NC}_{30}^0 in \mathcal{NC}_{30}^1 sta kosetna grafa $A_5 \times \mathbf{Z}_2$, \mathcal{NC}_{30}^2 pa je kosetni graf S_5 .
- Graf \mathcal{X}_4^{153} je v [90] je graf na 153 vozliščih opisan kot $\text{Cos}(\text{PSL}(2, 17), H, HgH)$, ločno tranzitiven graf stopnje 4 in reda 153, kjer je $H \cong D_{16}$ maksimalna podgrupa v $\text{PSL}(2, 17)$ in g taka involucija, da je $\langle H, g \rangle = \text{PSL}(2, 17)$.

Literatura

- [1] B. Alspach, D. Marušič, L. Nowitz, Constructing graphs which are $1/2$ -transitive, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **56** (1994), 391–402.
- [2] B. Alspach, T. D. Parsons, A construction for vertex-transitive graphs, *Canad. J. Math.* **34** (1982), 307–318.
- [3] B. Alspach, R. J. Sutcliffe, Vertex-transitive graphs of order $2p$, *Second International Conference on Combinatorial Mathematics (New York, 1978)*, Ann. New York Acad. Sci. **319** (1979), 18–27.
- [4] B. Alspach, M. Y. Xu, $1/2$ -transitive graphs of order $3p$, *J. Algebraic Combin.* **3** (1994), 347–355.
- [5] K. Berčič, M. Ghasemi, Tetravalent arc-transitive graphs of order twice a product of two primes, *Discrete Math.* **312** (2012), 3643–3648.
- [6] K. Berčič, P. Potočnik, Two-arc-transitive two-valent digraphs of certain orders, sprejeto v objavo v *Ars Math. Contemp.*
- [7] K. Berčič, P. Potočnik, *The Magma code for the twenty exceptional digraphs*, <http://www.fmf.uni-lj.si/~potocnik/Katja/ATD.htm>, na spletu na voljo od 10. oktobra 2014
- [8] J. L. Berggren, An algebraic characterization of symmetric graphs with a prime number of vertices, *Bull. Austral. Math. Soc.* **7** (1972), 131–134.
- [9] W. Bosma, J. Cannon, C. Playoust, The Magma algebra system. I: The user language, *J. Symbolic Comput.* **24** (1997), 235–265.
- [10] I. Z. Bouwer, Vertex and edge transitive, but not 1-transitive, graphs, *Canad. Math. Bull.* **13** (1970), 231–237.

- [11] C. Y. Chao, On the classification of symmetric graphs with a prime number of vertices, *Trans. Amer. Math. Soc.* **158** (1971), 247–256.
- [12] Y. Cheng, J. Oxley, On weakly symmetric graphs of order twice a prime, *J. Combin. Theory Ser. B* **42** (1987), 196–211.
- [13] M. Conder, An infinite family of 5-arc transitive cubic graphs, *Ars Combin.* **25** (1988), 95–108.
- [14] M. Conder, C. H. Li, P. Potočnik, On the orders of arc-transitive graphs, *J. Algebra* **421** (2015), 167–186.
- [15] M. Conder, D. Marušič, A tetravalent half-arc-transitive graph with nonabelian vertex stabilizer, *J. Combin. Theory Ser. B* **88** (2003), 67–76.
- [16] M. Conder, P. Potočnik, P. Šparl, Some recent discoveries about half-arc-transitive graphs, sprejeto v objavo v *Ars Math. Contemp.* **8** (2015).
- [17] M. Conder, C. Walker, The infinitude of 7-arc transitive graphs, *J. Algebra* **208** (1998), 619–629.
- [18] J. D. Dixon, B. Mortimer, *Permutation Groups*, *Graduate Texts in Mathematics* **163**, Springer-Verlag, New York (1996).
- [19] D. Djoković, G. Miller, Regular groups of automorphisms of cubic graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **29** (1980), 195–230.
- [20] P. G. Doyle, On transitive graphs, *Senior thesis*, Harvard College (1976)
- [21] S. F. Du, M. Y. Xu, Vertex-primitive $1/2$ -arc-transitive graphs of smallest order, *Comm. Algebra* **27** (1999), 163–171.
- [22] X. G. Fang, C. H. Li, M. Y. Xu, On edge-transitive Cayley graphs of valency 4, *European J. Combin.* **25** (2004), 1107–1116.
- [23] Y. Q. Feng, K. Kutnar, D. Marušič, C. Zhang, Tetravalent one-regular graphs of order $4p^2$, *Filomat* **28** (2014), 285–303.
- [24] Y. Q. Feng, J. H. Kwak, One-regular cubic graphs of order a small number times a prime or a prime square, *J. Aust. Math. Soc.* **76** (2004), 345–356.
- [25] Y. Q. Feng, J. H. Kwak, Classifying cubic symmetric graphs of order $10p$ or $10p^2$, *Sci. China Ser. A* **49** (2006), 300–319.
- [26] Y. Q. Feng, J. H. Kwak, Cubic symmetric graphs of order twice an odd prime power, *J. Aust. Math. Soc.* **81** (2006), 153–164.

- [27] Y. Q. Feng, J. H. Kwak, Classifying cubic symmetric graphs of order $10p$ or $10p^2$, *Sci. China Ser. A* **49** (2006), 300–319.
- [28] Y. Q. Feng, J. H. Kwak, Cubic symmetric graphs of order a small number times a prime or a prime square, *J. Combin. Theory Ser. B* **97** (2007), 627–646.
- [29] Y. Q. Feng, J. H. Kwak, K. Wang, Classifying cubic symmetric graphs of order $8p$ or $8p^2$, *European J. Combin.* **26** (2005), 1033–1052.
- [30] Y. Q. Feng, J. H. Kwak, X. Wang, J. X. Zhou, Tetravalent half-arc-transitive graphs of order $2pq$, *J. Algebraic Combin.* **33** (2011), 543–553.
- [31] Y. Q. Feng, J. H. Kwak, M. Y. Xu, Tetravalent half-arc-transitive graphs of order p^4 , *European J. Combin.* **29** (2008), 555–567.
- [32] Y. Q. Feng, K. S. Wang, C. X. Zhou, Tetravalent half-transitive graphs of order $4p$, *European J. Combin.* **28** (2007), 726–733.
- [33] R. Foster, The Foster census, Charles Babbage Research Centre, Winnipeg, MB, (1988).
- [34] R. Frucht, A one-regular graph of degree three, *Canadian J. Math.* **4** (1952), 240–247.
- [35] A. Gardiner, C. E. Praeger, A Characterization of Certain Families of 4-Valent Symmetric Graphs, *European J. Combin.* **15** (1994), 383–397.
- [36] A. Gardiner, C. Praeger, On 4-valent symmetric graphs, *European J. Combin.* **15** (1994), 375–381.
- [37] D. Gorenstein, Finite simple groups, University Series in Mathematics, Plenum Publishing Corp., New York (1982).
- [38] M. Ghasemi, Classification of tetravalent one-regular graphs of order $3p^2$, *Colloq. Math.* **128** (2012), 15–24.
- [39] M. Ghasemi, Tetravalent arc-transitive graphs of order $3p^2$, *Discuss. Math. Graph Theory* **34** (2014), 567–575.
- [40] M. Ghasemi, P. Spiga, 4-Valent one-regular graphs of order $6p^2$, sprejeto v objavo v *Ars Math. Contemp.* **9** (2015).
- [41] M. Ghasemi, J. X. Zhou Tetravalent s -transitive graphs of order $4p^2$, *Graphs Combin.* **29** (2013), 87–97.
- [42] G. Glauberman, Isomorphic subgroups of finite p -subgroups, *Can. J. Math.* **23** (1971), 983–1022.

- [43] sodelavci GraphSym projekta, Spletna stran GraphSym, <http://www.graphsym.net>, na spletu na voljo od maja 2015.
- [44] S. Guest, C. E. Praeger, J. Morris, P. Spiga, On the maximum orders of elements of finite almost simple groups and primitive permutation groups, sprejeto v objavo v *Trans. Amer. Math. Soc.*; preprint: arXiv:1301.5166.
- [45] A. Hassani, L. Nochefranca, C. E. Praeger, Two-arc transitive graphs admitting a two-dimensional projective linear group, *J. Group Theory* **2** (1999) 335–353.
- [46] M. Herzog, On finite simple groups of order divisible by three primes only, *J. Algebra* **10** (1968), 383–388.
- [47] D. F. Holt, A graph which is edge transitive but not arc transitive, *J. Graph Theory* **5** (1981), 201–204.
- [48] D. Holton, Research problem 9, *Discrete Math.* **38** (1982), 125.
- [49] B. Huppert, W. Lempken, Simple groups of order divisible by at most four primes, *Proc. of the F. Scorina Gomel State Univ.* **16** (2000), 64–75.
- [50] A. A. Ivanov, C. E. Praeger, On finite affine 2-arc transitive graphs, *European J. Combin.* **14** (1993), 421–444.
- [51] K. Kutnar, D. Marušič, P. Šparl, R. J. Wang, M. Y. Xu, Classification of half-arc-transitive graphs of order $4p$, *European J. Combin.* **34** (2013), 1158–1176.
- [52] B. Kuzman, Arc-transitive elementary abelian covers of the complete graph K_5 , *Linear Algebra Appl.* **433** (2010) 1909–1921.
- [53] J. H. Kwak, J. M. Oh, One-regular normal Cayley graphs on dihedral groups of valency 4 or 6 with cyclic vertex stabilizer, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)* **22** (2006), 1305–1320.
- [54] C. H. Li, The finite vertex-primitive and vertex-biprimitive s -transitive graphs for $s \geq 4$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **353** (2001), 3511–3529 (elektronska izdaja).
- [55] C. H. Li, Finite s -arc-transitive graphs of prime-power order, *Bull. London Math. Soc.* **33** (2001), 129–137.
- [56] C. H. Li, Z. Liu, Z. P. Lu, The edge-transitive tetravalent Cayley graphs of square-free order, *Discrete Math.* **312** (2012), 1952–1967.
- [57] C. H. Li, Z. P. Lu, D. Marušič, On primitive permutation groups with small suborbits and their orbital graphs, *J. Algebra* **279** (2004), 749–770.
- [58] C. H. Li, Z. P. Lu, H. Zhang, Tetravalent edge-transitive Cayley graphs with an odd number of vertices, *J. Combin. Theory Ser. B* **96** (2006), 164–181.

- [59] C. H. Li, H. S. Sim, On half-transitive metacirculant graphs of prime-power order, *J. Combin. Theory Ser. B* **81** (2001), 45–57.
- [60] M. W. Liebeck, J. Saxl, Primitive permutation groups containing an element of large prime order, *J. London Math. Soc. (2)* **31** (1985), 237–249.
- [61] A. Malnič, D. Marušič, Constructing 4-valent $1/2$ -transitive graphs with a nonsolvable group, *J. Combin. Theory Ser. B* **75** (1999), 46–55.
- [62] A. Malnič, D. Marušič, Constructing $1/2$ -transitive graphs of valency 4 and vertex stabilizer $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$, *Discrete Math.* **245** (2002), 203–216.
- [63] A. Malnič, D. Marušič, P. Potočnik, Elementary abelian covers of graphs, *J. Algebraic Combin.* **20** (2004) 71–97.
- [64] A. Malnič, Š. Miklavič, D. Marušič, P. Potočnik, Semisymmetric elementary abelian covers of the Möbius-Kantor graph, *Discrete Math.* **307** (2007), 2156–2175.
- [65] A. Malnič, D. Marušič, P. Potočnik, Elementary abelian covers of graphs, *J. Algebraic Comb.* **20** (2004), 71–97.
- [66] A. Malnič, P. Potočnik, Invariant subspaces, duality, and covers of the Petersen graph, *European J. Combin.* **27** (2006) 971–989.
- [67] A. Malnič, P. Potočnik, N. Seifert, P. Šparl, Reachability relations, transitive digraphs and groups, sprejeto v objavo v *Ars Math. Contemp.* **8** (2015).
- [68] A. Malnič, T. Pisanski, A. Žitnik, The clone cover, sprejeto v objavo v *Ars Math. Contemp.* **8** (2015).
- [69] D. Marušič, On vertex-symmetric digraphs, *Discrete Math.* **36** (1981), 69–81.
- [70] D. Marušič, Vertex-transitive graphs and digraphs of order p^k *Cycles in graphs (Burnaby, B.C., 1982)*, North-Holland Math. Stud. **115** (1985), 115–128.
- [71] D. Marušič, Half-transitive group actions on finite graphs of valency 4, *J. Combin. Theory Ser. B* **73** (1998), 41–76.
- [72] D. Marušič, Recent developments in half-transitive graphs, *Discrete Math.* **182** (1998), 219–231.
- [73] D. Marušič, R. Nedela, Maps and half-transitive graphs of valency 4, *European J. Combin.* **19** (1998), 345–354.
- [74] D. Marušič, R. Nedela, On the point stabilizers of transitive groups with non-self-paired suborbits of length 2, *J. Group Theory* **4** (2001), 19–43.

- [75] D. Marušič, R. Nedela, Partial line graph operator and half-arc-transitive group actions, *Math. Slovaca* **51** (2001), 241–257.
- [76] D. Marušič, R. Nedela, Finite graphs of valency 4 and girth 4 admitting half-transitive group actions *J. Aust. Math. Soc.* **73** (2002), 155–170.
- [77] D. Marušič, R. Scapellato, Characterizing vertex-transitive pq -graphs with an imprimitive automorphism subgroup. *J. Graph Theory* **16** (1992), 375–387.
- [78] D. Marušič, R. Scapellato, Imprimitive representations of $SL(2, 2^k)$ *J. Combin. Theory Ser. B* **58** (1993), 46–57.
- [79] D. Marušič, R. Scapellato, Classifying vertex-transitive graphs whose order is a product of two primes, *Combinatorica* **14** (1994) 187–201.
- [80] D. Marušič, P. Šparl, On quartic half-arc-transitive metacirculants, *J. Algebraic Combin.* **28** (2008) 365–395.
- [81] D. Marušič, P. Potočnik, Bridging semisymmetric and half-arc-transitive actions on graphs, *European J. Combin.* **23** (2002), 719–732.
- [82] D. Marušič, P. Potočnik, Classifying 2-arc-transitive graphs of order a product of two primes, *Discrete Math.* **244** (2002), 331–338.
- [83] D. Marušič, C. E. Praeger, Tetravalent graphs admitting half-transitive group actions: alternating cycles, *J. Combin. Theory Ser. B* **75** (1999), 188–205.
- [84] D. Marušič, M. Y. Xu, A $1/2$ -transitive graph of valency 4 with a nonsolvable group of automorphisms, *J. Graph Theory* **25** (1997), 133–138.
- [85] Š. Miklavič, P. Potočnik, S. Wilson, Arc-transitive cycle decompositions of tetravalent graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **98** (2008), 1181–1192.
- [86] R. Miller, The trivalent symmetric graphs of girth at most six, *J. Combin. Theory Ser. B* **10** (1971), 163–182.
- [87] B. D. McKay, Transitive graphs with fewer than 20 vertices, *Math. Comp.* **33** (1979), 1101–1121.
- [88] B. D. McKay, G. F. Royle, The transitive graphs with at most 26 vertices *Ars Combin.* **30** (1990), 161–176.
- [89] P. M. Neumann, Finite Permutation Groups, edge-coloured graphs and matrices, in *Topics in groups theory and computations* (ed. M. P. J. Curran), Academic Press, London (1977).
- [90] J. M. Pan, Tetravalent edge-transitive graphs of order p^2q , *Sci. China Math.* **57** (2014), 293–302.

- [91] P. Potočnik, Delovanja grup in simetrije grafov: disertacija (2000)
- [92] P. Potočnik, A list of 4-valent 2-arc-transitive graphs and finite faithful amalgams of index $(4, 2)$, *European J. Combin.* **30** (2009), 1323–1336.
- [93] P. Potočnik, Spletna stran,
<http://www.fmf.uni-lj.si/~potocnik/work.htm>, 2015.
- [94] P. Potočnik, P. Spiga, G. Verret, Tetravalent arc-transitive graphs with unbounded vertex-stabilizers, *Bull. Aust. Math. Soc.* **84** (2011), 79–89.
- [95] P. Potočnik, P. Spiga, G. Verret, Cubic vertex-transitive graphs on up to 1280 vertices, *J. Symbolic Comput.* **50** (2013), 465–477.
- [96] P. Potočnik, P. Spiga, G. Verret, A census of 4-valent half-arc-transitive graphs and arc-transitive digraphs of valence two, sprejeto v objavo v *Ars Math. Contemp.* **8** (2015).
- [97] P. Potočnik, P. Spiga, G. Verret, Bounding the order of the vertex-stabiliser in 3-valent vertex-transitive and 4-valent arc-transitive graphs, *arXiv:1010.2546v1 [math.CO]*.
- [98] P. Potočnik, P. Spiga, G. Verret, *A census of 2-valent arc-transitive digraphs*,
<http://www.fmf.uni-lj.si/~potocnik/work.htm>
- [99] P. Potočnik, G. Verret, On the vertex-stabiliser in arc-transitive digraphs, *J. Combin. Theory Ser. B.* **100** (2010), 497–509.
- [100] P. Potočnik, S. Wilson, Tetravalent edge-transitive graphs of girth at most 4, *J. Combin. Theory Ser. B* **97** (2007) 217–236.
- [101] R. Požar, Sectional split extensions arising from lifts of groups, *Ars. Math. Contemp.* **6** (2013), 393–408.
- [102] R. Požar, Some computational aspects of solvable regular covers of graphs, *J. Symbolic Comp.*, sprejeto v objavo, na spletu na voljo od 19. septembra 2014.
- [103] C. E. Praeger, Imprimitive symmetric graphs, *Ars Combin.* **19** (1985), 149–163.
- [104] C. E. Praeger, Highly arc transitive digraphs, *European J. Combin.* **10** (1989), 281–292.
- [105] C. E. Praeger, An O’Nan-Scott Theorem for finite quasiprimitive permutation groups, and an application to 2-arc transitive graphs, *J. London Math. Soc.(2)* **47** (1993), 227–239.
- [106] C. E. Praeger, G. F. Royle, Constructing the vertex transitive graphs of order 24, *J. Symbolic Comput.* **8** (1989), 309–326.
- [107] C. E. Praeger, R. J. Wang, M. Y. Xu, Symmetric graphs of order a product of two distinct primes *J. Combin. Theory Ser B* **58** (1993), 299–318.

- [108] C. E. Praeger, M. Y. Xu, A characterization of a class of symmetric graphs of twice prime valency, *European J. Combin.* **10** (1989), 91–102.
- [109] C. E. Praeger, M. Y. Xu, Vertex-primitive graphs of order a product of two distinct primes, *J. Combin. Theory Ser. B* **59** (1993), 245–266.
- [110] D. Robinson, A course in the theory of groups, Springer-Verlag, New York, second edition, (1996).
- [111] Á. Seress, On vertex-transitive, non-Cayley graphs of order pqr , *Discrete Math.* **182** (1998), 279–292.
- [112] P. Šparl, Tranzitivna delovanja grup na grafih : doktorska disertacija (2007)
- [113] P. Šparl, A classification of tightly attached half-arc-transitive graphs of valency 4, *J. Combin. Theory Ser. B* **98** (2008), 1076–1108.
- [114] P. Šparl, On the classification of quartic half-arc-transitive metacirculants, *Discrete Math.* **309** (2009), 2271–2283.
- [115] W. A. Stein et al., Sage Mathematics Software (Version 6.4.1), The Sage Development Team, 2015, <http://www.sagemath.org>.
- [116] D. E. Taylor, M. Y. Xu, Vertex-primitive half-transitive graphs, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **57** (1994), 113–124.
- [117] J. Turner, Point-symmetric graphs with a prime number of points, *J. Combinatorial Theory*, **3** (1967), 136–145.
- [118] W. Tutte, A family of cubical graphs, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **43** (1947), 459–474.
- [119] W. T. Tutte, Connectivity in graphs, *Mathematical Expositions*, No. 15 (1966), ix+145.
- [120] R. J. Wang, Half-transitive graphs of order a product of two distinct primes, *Comm. Algebra* **22** (1994), 915–927.
- [121] X. Y. Wang, Y. Q. Feng, Hexavalent half-arc-transitive graphs of order $4p$, *European J. Combin.* **30** (2009), 1263–1270.
- [122] X. Y. Wang, Y. Q. Feng, Half-arc-transitive graphs of order $4p$ of valency twice a prime, *Ars Math. Contemp.* **3** (2010), 151–163.
- [123] C. Q. Wang, M. Y. Xu, Non-normal one-regular and 4-valent Cayley graphs of dihedral groups D_{2n} , *European J. Combin.* **27** (2006), 750–766.
- [124] R. J. Wang, M. Y. Xu, A classification of symmetric graphs of order $3p$, *J. Combin. Theory Ser. B* **58** (1993), 197–216.

-
- [125] R. Weiss, The nonexistence of 8-transitive graphs, *Combinatorica* **1** (1981), 309–311.
- [126] R. Weiss, Presentations for (g, s) -transitive graphs of small valency, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **101** (1987), 7–20.
- [127] S. Wilson, A census of edge-transitive tetravalent graphs,
<http://jan.ucc.nau.edu/~swilson/C4Site/index.html>, (2011).
- [128] M. Y. Xu, Half-transitive graphs of prime-cube order, *J. Algebraic Combin.* **1** (1992), 275–282.
- [129] M. Y. Xu, Some new results on $1/2$ -transitive graphs, *Adv. in Math. (China)* **23** (1994), 505–516.
- [130] J. Xu, M. Y. Xu, Arc-transitive Cayley graphs of valency at most four on abelian groups, *Southeast Asian Bull. Math.* **25** (2001), 355–363.
- [131] J.X. Zhou, Tetravalent s -transitive graphs of order $4p$, *Discrete Math.* **309** (2009) 6081–6086.
- [132] J.X. Zhou, Y. Q. Feng, Tetravalent one-regular graphs of order $2pq$, *J. Algebraic Combin.* **29** (2009) 457–471.
- [133] J.X. Zhou, Y. Q. Feng, Tetravalent s -transitive graphs of order twice a prime power, *J. Aust. Math. Soc.* **88** (2010) 277–288.