

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA MATEMATIKO
Modul matematika – 3. stopnja

Tina Rudolf

**REFLEKSIVNOST IN REFLEKSIVNOSTNI DEFEKT
PROSTOROV OPERATORJEV**

Doktorska disertacija

Mentor: izred. prof. dr. Janko Bračič

Ljubljana, 2014

Podpisana Tina Rudolf izjavljam:

- da sem doktorsko disertacijo z naslovom *Refleksivnost in refleksivnostni defekt prostorov operatorjev* izdelala samostojno pod mentorstvom izred. prof. dr. Janka Bračiča in
- da Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani dovoljujem objavo elektronske oblike svojega dela na spletnih straneh.

Ljubljana, 5. 2. 2014

Podpis:

Zahvala

Zahvaljujem se svojemu mentorju, prof. dr. Janku Bračiču, ki mi je predstavil in me vpeljal v področje refleksivnosti in hiperrefleksivnosti prostorov operatorjev ter me usmerjal in mi nudil dragocene nasvete pri raziskovanju. Zahvaljujem se tudi prof. dr. Petru Šemrlu ter Inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko za možnost opravljanja raziskovalnega dela ter za omogočeno doktorsko izobraževanje.

Na koncu pa naj se zahvalim še svojim najbližjim. Mojim staršem, ki so me vztrajno bodrili, sinu Otonu, ki mi vsak dan prinaša neizmerno veselje in mojemu soprogu Matevžu, ki me je vseskozi podpiral in mi stal ob strani.

Povzetek

Naj bo $\mathcal{H}$ kompleksen separabilen Hilbertov prostor, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ algebra omejenih linearnih operatorjev na $\mathcal{H}$ in k naravno število. Za dano zaporedje nenegativnih celih števil $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq 0$ dokažemo, da obstaja takšen podprostor $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$, da je njegov k -refleksivnostni defekt enak r_k za vse $k \geq 1$. V primeru, ko je dani Hilbertov prostor končno razsežen, podamo eksplicitno formulo za refleksivnostni defekt jedra poljubnega elementarnega operatorja dolžine 2, t.j., operatorja na algebri $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ oblike $\Delta(T) = A_1TB_1 - A_2TB_2$, kjer sta A_1, A_2 ter B_1, B_2 para linearne neodvisnih operatorjev. Natančno karakteriziramo k -refleksivnostni defekt slike posplošenega odvajanja ter slike elementarnega operatorja oblike $\Delta(T) = ATB - T$, kjer sta $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ dana operatorja. Obravnavamo tudi k -refleksivnost in k -hiperrefleksivnost nekaterih prostorov operatorjev nad končno ortogonalno direktno vsoto kompleksnih separabilnih Hilbertovih prostorov. Poiščemo zgornjo in spodnjo mejo za k -hiperrefleksivnostno konstanto takšnega prostora in pri tem dokažemo, da je dobljena spodnja meja optimalna. Podobne ocene izpeljemo tudi v primeru, ko direktna vsota Hilbertovih prostorov ni nujno ortogonalna. Izkaže se, da so dobljene meje za k -hiperrefleksivnostno konstanto prostora tedaj odvisne tudi od kotov med danimi Hilbertovimi prostori. Obravnavamo še hiperrefleksivnostne konstante nizko razsežnih algeber matrik, ki imajo nekomutativno mrežo invariantnih podprostorov.

Math. Subj. Class. (2010): 47L05, 47L45, 47B47, 15A21, 15A22

Ključne besede: k -refleksivnost, k -refleksivno pokritje, k -refleksivnostni defekt, k -hiperrefleksivnost, k -hiperrefleksivnostna konstanta, elementarni operatorji, posplošeno odvajanje, matrični šopi, Kroneckerjeva kanonična forma.

Abstract

Let $\mathcal{H}$ be a complex separable Hilbert space, let $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ denote the algebra of all bounded linear operators on $\mathcal{H}$ and let k be a positive integer. Given a sequence of nonnegative integers $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq 0$ we show that there exists a subspace $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$, such that its k -reflexivity defect is equal to r_k for all $k \geq 1$. For a finite dimensional complex Hilbert space we give an explicit formula for the reflexivity defect of the kernel of an arbitrary elementary operator of length 2, i.e., an operator, acting on the algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, of the form $\Delta(T) = A_1TB_1 - A_2TB_2$ where A_1, A_2 and B_1, B_2 are given pairs of linearly independent operators. We characterize the k -reflexivity defect of the image of a generalized derivation. Using the latter we also give an explicit formula for the k -reflexivity defect of the image of an elementary operator on $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ of the form $\Delta(T) = ATB - T$ where $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ are given operators. We also consider the k -reflexivity and the k -hyperreflexivity of some subspaces of operators over the orthogonal direct sum of complex separable Hilbert spaces. We give a lower and upper bound for the k -hyperreflexivity constant of such a space and we prove that the lower bound is optimal. Furthermore, we give similar estimates when the direct sum of Hilbert spaces is not necessary orthogonal. In this case the bounds for the k -hyperreflexivity constant depend also on the angles between the given Hilbert spaces. We also consider the hyperreflexivity constant of the low dimensional algebras of matrices that have a noncommutative lattice of invariant subspaces.

Math. Subj. Class. (2010): 47L05, 47L45, 47B47, 15A21, 15A22

Keywords: k -reflexivity, k -reflexive cover, k -reflexivity defect, k -hyperreflexivity, k -hyperreflexivity constant, elementary operators, generalized derivation, matrix pencils, Kronecker canonical form.

Kazalo

Izjava	iii
Zahvala	v
Povzetek	vii
Abstract	ix
Kazalo	xi
Uvod	13
Pregled dela in rezultatov	14
1 Pregled osnovnih pojmov in znanih rezultatov	17
1.1 Osnovne definicije in oznake	17
1.2 Refleksivnost in k -refleksivnost	18
1.3 Dualnost in k -refleksivnost	20
1.4 Zgledi in znani rezultati	22
1.5 Arvesonova razdalja	26
1.6 Hiperrefleksivnost in k -hiperrefleksivnost	27
1.7 Zgledi k -hiperrefleksivnih prostorov	30
2 Zaporedja k-refleksivnostnih defektov	33
2.1 Definicija in lastnosti k -refleksivnostnega defekta	33
2.2 Zaporedja k -refleksivnostnih defektov	35
2.3 Zaporedja s končno mnogo neničelnimi členi	36
2.4 Splošni primer zaporedja	38
3 Refleksivnostni defekt jedra in slike elementarnega operatorja	43
3.1 Elementarni operatorji	43
3.2 Elementarni operatorji dolžine 2	44
3.3 Linearni matrični šopi in Kroneckerjeva forma	49
3.4 Primer uporabe in posplošena Schurova forma matričnega šopa	55
3.5 Slike elementarnih operatorjev dolžine 2	56
	xi

4	Ocene k-hiperrefleksivnostnih konstant prostorov operatorjev	59
4.1	Nekatere ocene k -hiperrefleksivnostnih konstant	59
4.2	Odvisnost od kotov med Hilbertovimi prostori	61
4.3	Nizko razsežne algebre matrik	66
	Zaključek	69
	Literatura	71

Uvod

V pričujočem delu se primarno ukvarjamo z refleksivnostjo in k -refleksivnostjo prostorov omejenih linearnih operatorjev na kompleksnem separabilnem Hilbertovem prostoru. Izvor termina *refleksivnost* sega v 60. leta 20. stoletja. Poimenovanje je predlagal že Halmos, pojem refleksivnosti pa se je prvič pojavil v članku Radjavija in Rosenthala [41]. Omeniti je potrebno, da je že pred tem začetne rezultate na področju refleksivnosti algeber operatorjev objavil Sarason [47], vendar v svojih rezultatih ni uporabljal izraza refleksivnost.

Pojem refleksivnosti je bil prvotno formuliran za algebre omejenih linearnih operatorjev na Hilbertovem prostoru. Takšna algebra je refleksivna, če mrežo njenih invariantnih podprostorov ohranjajo natanko tisti operatorji, ki so elementi dane algebre. Refleksivne algebre so vedno unitalne in zaprte v šibki operatorski topologiji. Seveda lahko definiramo refleksivnost tudi za posamezne operatorje. Omejen linearen operator je refleksiven, če je refleksivna šibko zaprta algebra, ki je generirana z danim operatorjem in identiteto. Znano je, da nekatere operacije na algebrah ohranjajo refleksivnost, tako je na primer direktna vsota refleksivnih algeber prav tako refleksivna. Za osnovni model refleksivne algebre lahko smatramo von Neumannove algebre. Refleksivna sebiadjungirana unitalna šibko zaprta algebra je namreč natanko von Neumannova algebra in prvi rezultati izven okvira sebiadjungiranih algeber so bili že omenjeni Sarasonovi rezultati za algebro normalnih operatorjev.

Loginov in Šulman [34, 48] sta pojem refleksivnosti razširila v kontekst prostorov omejenih linearnih operatorjev z vpeljavo t.i. *refleksivnega pokritja* prostora. Za dani prostor $\mathcal{S}$ je njegovo refleksivno pokritje $\text{Ref } \mathcal{S}$ najmanjši refleksiven prostor, ki vsebuje $\mathcal{S}$ kot podmnožico. Kraus in Larson [28, 29] sta pokazala, da obstaja povezava med refleksivnimi algebrami in refleksivnimi prostori. Če je $\mathcal{S}$ zaprt linearen podprostor $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, algebre omejenih linearnih operatorjev na Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$, tedaj je prostor $\mathcal{S}$ refleksiven natanko tedaj, ko je refleksivna algebra

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & S \\ 0 & \beta \end{pmatrix} : S \in \mathcal{S} \text{ in } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}. \quad (1)$$

Vprašanje, kdaj je za dano naravno število k in linearen podprostor $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ prostor $\mathcal{S}^{(k)} = \{S^{(k)} : S \in \mathcal{S}\}$ refleksiven, vodi do še ene posplošitve pojma refleksivnosti, t.i. k -*refleksivnosti* prostora $\mathcal{S}$, pri čemer definicija 1-refleksivnosti sovpada s pojmom refleksivnosti. Za $k \geq 2$ je k -refleksivnost v splošnem šibkejša zahteva od refleksivnosti; obstajajo namreč k -refleksivni prostori, ki niso refleksivni. Po drugi strani je vsak refleksiven prostor tudi k -refleksiven za vsa naravna števila k . Pomembno vlogo tako v teoriji refleksivnosti kot k -refleksivnosti igra dualnost, natančneje, predanihikator danega prostora. Slednji sestoji iz vseh operatorjev s sledjo, ki v nekem smislu uničijo dani prostor. Tako sta Kraus in Larson [29] dokazala, da je prostor k -refleksiven natanko tedaj, ko je njegov predanihikator zaprta linearna ogrinjača operatorjev ranga največ k .

Koliko dani prostor $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ odstopa od svojega k -refleksivnega pokritja $\text{Ref}_k \mathcal{S}$, meri t.i. k -*refleksivnostni defekt* $\text{rd}_k \mathcal{S}$. Slednjega definiramo kot razsežnost kvocientnega prostora $\text{Ref}_k \mathcal{S} / \mathcal{S}$. Kot bomo videli v nadaljevanju, igra k -refleksivnostni defekt v pričujočem delu eno od osrednjih vlog.

V disertaciji se srečamo tudi s pojmom hiperrefleksivnosti algeber in prostorov omejenih linearnih operatorjev. Kot pove že samo poimenovanje, je omenjena lastnost v tesni povezavi z refleksivnostjo. Vsak hiperrefleksiven prostor je namreč tudi refleksiven, obratna implikacija pa v splošnem ne velja. Če je refleksivnost v veliki meri algebraična lastnost, pa je hiperrefleksivnost bistveno bolj povezana s samo geometrijo prostora operatorjev. Prostor $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je namreč hiperrefleksiven, če lahko za poljuben operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ običajno razdaljo operatorja do danega prostora navzgor ocenimo s t.i. *Arvesonovo razdaljo* $\alpha(T, \mathcal{S})$, pomnoženo z neko konstanto večjo od 1. Najmanjša takšna konstanta se imenuje *hiperrefleksivnostna konstanta* prostora in je v splošnem težko izračunljiva; natančna vrednost je znana le za maloštevilne primere algeber oziroma prostorov operatorjev in določanje natančne vrednosti ni enostavna naloga niti v primeru podalgeber kompleksnih kvadratnih matrik. Kliš in Ptak sta vpeljala pojem k -hiperrefleksivnosti prostora operatorjev, in sicer tako, da sta definirala posplošitev Arvesonove razdalje. Izkaže se, da je ta definicija dobra v smislu, da gre res za razširitev pojma hiperrefleksivnosti, ki za $k = 1$ sovпада z običajno definicijo hiperrefleksivnosti. Poleg tega za tako definirano k -hiperrefleksivnost velja večina znanih rezultatov, ki so bili prvotno dokazani v kontekstu hiperrefleksivnosti. Kot je pričakovati, je vsak k -hiperrefleksiven prostor tudi k -refleksiven. Obrat velja v primeru, ko je dani prostor operatorjev končno razsežen, kar je netrivialen rezultat Müllerja in Ptaka [38]. Vsak hiperrefleksiven prostor je tudi k -hiperrefleksiven in čeprav je torej k -hiperrefleksivnost za $k \geq 2$ šibkejši pogoj od hiperrefleksivnosti, je znano relativno malo k -hiperrefleksivnih prostorov. Deloma je razlog, da je definicija k -hiperrefleksivnosti razmeroma mlada, saj sta jo Kliš in Ptak predstavila leta 2006, deloma pa je vzrok v zahtevnosti problemov, povezanih s k -hiperrefleksivnostjo oziroma na splošno s hiperrefleksivnostjo.

Pregled dela in rezultatov

Prvo poglavje disertacije je namenjeno predstavitvi osnovnih definicij ter vpeljavi oznak. V tem poglavju predstavimo tudi najbolj temeljne in znane rezultate s področja k -refleksivnosti in k -hiperrefleksivnosti. Natančneje si ogledamo povezavo k -refleksivnosti z dualnostjo, prav tako pa predstavimo nekaj zgledov k -refleksivnih prostorov ter prostorov, ki te lastnosti nimajo. Natančno definiramo Arvesonovo razdaljo ter si ogledamo njene ekvivalentne formulacije. V nadaljevanju poglavja definiramo pojem k -hiperrefleksivnosti ter predstavimo nekaj primerov k -hiperrefleksivnih prostorov operatorjev.

Drugo in tretje poglavje sta posvečena k -refleksivnostnemu defektu prostorov operatorjev. V drugem poglavju navedemo nekaj že znanih lastnosti k -refleksivnostnega defekta ter si ogledamo, katere transformacije danega prostora operatorjev ohranjajo njegov k -refleksivnostni defekt. Nadalje obravnavamo k -refleksivnostni defekt prostorov operatorjev, ki delujejo na končni ortogonalni direktni vsoti Hilbertovih prostorov. Osrednji del drugega poglavja obravnava zaporedja k -refleksivnostnih defektov. Natančneje, dokažemo, da lahko poljubnemu zaporedju nenegativnih celih števil priredimo takšen Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ in prostor operatorjev $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$, da bo k -ti člen zaporedja natanko k -refleksivnostni defekt prostora $\mathcal{S}$. Pri tem ločimo dva primera; najprej obravnavamo situacijo, ko ima dano zaporedje le končno mnogo neničelnih elementov in dokažemo, da obstaja podprostor kvadratnih kompleksnih matrik, ki zadošča danim pogojem. Nato s pomočjo te konstrukcije poiščemo ustrezen prostor tudi v splošnem primeru.

V tretjem poglavju se ukvarjamo z elementarnimi operatorji dolžine 2, ki delujejo na algebri kvadratnih kompleksnih matrik. Pri tem nas zanima refleksivnostni defekt jedra takšnega operatorja. Slednjega najprej karakteriziramo za posplošena odvajanja, pri čemer se v veliki meri naslonimo na rezultate Bračiča in Kuzme [9]. Določimo tudi refleksivnostni defekt jedra

elementarnega operatorja na $\mathbb{M}_n$, algebri kompleksnih $n \times n$ matrik, podanega s predpisom $\Delta(T) = ATB - T$, kjer sta $A, B \in \mathbb{M}_n$ dani matriki. V nadaljevanju poglavja z uporabo teorije linearnih matričnih šopov popolnoma karakteriziramo refleksivnostni defekt jedra poljubnega elementarnega operatorja dolžine 2 na algebri $\mathbb{M}_n$. Pri tem igra pomembno vlogo t.i. *Kroneckerjeva kanonična forma* matričnega šopa. Predstavimo tudi zgled uporabe dobljenega izreka. Ker je izračun Kroneckerjeve kanonične forme matričnega šopa v splošnem numerično zahteven postopek, v zgledu izkoristimo dejstvo, da lahko informacijo o Kroneckerjevi strukturi dobimo na bistveno lažji način z uporabo *posplošene Schurove forme* matričnega šopa. Na koncu drugega poglavja obravnavamo še k -refleksivnostni defekt slike elementarnega operatorja dolžine 2. Slednjega obravnavamo le za dva posebna primera operatorjev na algebri $\mathbb{M}_n$, in sicer natančno določimo k -refleksivnostni defekt slike posplošenega odvajanja ter slike operatorja $\Delta(T) = ATB - T$. Izračuni v tem poglavju so bili opravljeni s pomočjo programske opreme WOLFRAM MATHEMATICA in SCILAB.

V četrtem poglavju se posvetimo k -hiperrefleksivnosti. Natančneje, zanimajo nas prostori operatorjev nad končno ortogonalno direktno vsoto kompleksnih separabilnih Hilbertovih prostorov, ki so posplošitve algebre (1). V tem kontekstu poiščemo smiselno zgornjo in spodnjo mejo za k -hiperrefleksivnostno konstanto takšnega prostora. Pri tem dokažemo, da je dobljena spodnja meja optimalna. V nadaljevanju poglavja nas zanima, v kolikšni meri se k -hiperrefleksivnostna konstanta prostora spremeni, če direktna vsota Hilbertovih prostorov ni ortogonalna. V tem primeru se izkaže, da so dobljene meje za k -hiperrefleksivnostno konstanto prostora odvisne tudi od kotov med danimi Hilbertovimi prostori. Da dobimo omenjene meje za vrednost konstante, najprej dokažemo posplošitev rezultata Ionaşcujeve [25], ki za dani prostor $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ter obrnljiva operatorja $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ poda spodnjo in zgornjo mejo za k -hiperrefleksivnostno konstanto prostora $T_1 \mathcal{S} T_2$. V zadnjem razdelku četrtega poglavja obravnavamo še problematiko določanja natančne vrednosti hiperrefleksivnostne konstante nekaterih posplošitev nizko razsežnih algeber diagonalnih kompleksnih matrik. Slednje algebre so končno razsežni primeri komutativnih von Neumannovih algeber, za katere vemo, da so hiperrefleksivne s konstanto največ 2. Kljub temu pa ni znana natančna vrednost algebre diagonalnih kompleksnih $n \times n$ matrik za $n \geq 4$. Zanimajo nas algebre, ki jih dobimo z bijektivnimi transformacijami algeber diagonalnih matrik in nimajo komutativne mreže invariantnih prostorov. Motivacija je delo Tosake [49], ki je določil natančno vrednost hiperrefleksivnostne konstante dvorazsežne algebre matrik, ki ima natanko dva netrivialna invariantna podprostora, ki nista ortogonalna. Izkaže se, da je že v primeru algebre s tremi netrivialnimi invariantnimi podprostori situacija težje obvladljiva.

Vsebina drugega poglavja je opisana v [46], vsebina tretjega poglavja pa v objavljenem članku [44] ter v [45]. Četrto poglavje je vsebina članka [10] v soavtorstvu z mentorjem prof. dr. Jankom Bračičem.

Poglavje 1

Pregled osnovnih pojmov in znanih rezultatov

V tem poglavju vpeljemo osnovne oznake in definiramo najpomembnejše pojme, ki jih bomo uporabljali v pričujočem delu. Poglavje nadaljujemo s predstavitvijo temeljnih rezultatov s področja k -refleksivnosti in k -hiperrefleksivnosti. Dokaze nekaterih izrekov zaradi njihove obsežnosti oziroma potrebe po vpeljevanju novih terminov, ki pa niso bistvenega pomena za pričujoče delo, izpustimo. Radovednemu bralcu so v pomoč podane reference za vse navedene rezultate.

1.1 Osnovne definicije in oznake

Naj bo $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ kompleksen separabilen Hilbertov prostor in naj bo k naravno število. Naj $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ označuje algebro omejenih linearnih operatorjev, $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ ideal operatorjev s sledjo, $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ linearno mnogoterost operatorjev končnega ranga, $\mathcal{F}_k(\mathcal{H})$ podmnožico operatorjev ranga največ k ter $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ množico vseh ortogonalnih projektorjev na $\mathcal{H}$. Očitno velja

$$\mathcal{F}_1(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{F}_2(\mathcal{H}) \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{C}_1(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}). \quad (1.1.1)$$

Algebra operatorjev $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je *šibko zaprta*, če je zaprta v šibki operatorski topologiji. Naj bo $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operator in $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ množica. Z $W(T)$ označimo šibko zaprto algebro, generirano s T in identičnim operatorjem. Definirajmo še k -to *inflacijo operatorja* T s predpisom $T^{(k)} = T \oplus \dots \oplus T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^{(k)})$ ter k -to *inflacijo množice* $\mathcal{S}$ s predpisom $\mathcal{S}^{(k)} = \{S^{(k)} : S \in \mathcal{S}\}$.

Definicija 1.1.1. Naj bo $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operator in $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ neprazna množica operatorjev. Zaprt linearen podprostor $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ je *invarianten za operator* T , če je $Tx \in \mathcal{M}$ za vsak $x \in \mathcal{M}$. Podprostor $\mathcal{M}$ je *invarianten za množico* $\mathcal{S}$, če je invarianten za vsak operator $S \in \mathcal{S}$.

Za vsak zaprt linearen podprostor $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ obstaja enolično določen ortogonalni projektor P na $\mathcal{M}$. Izkazuje se, da je podprostor $\mathcal{M}$ invarianten za operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ natanko tedaj, ko velja $PTP = TP$. Bralec si lahko dokaz slednjega dejstva ogleda v [11, Chapter II, Proposition 3.7].

Definicija 1.1.2. Naj bo $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ neprazna množica operatorjev. Mrežo zaprtih invariantnih podprostorov za $\mathcal{S}$ podamo kot

$$\text{Lat } \mathcal{S} = \{\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H} : \mathcal{M} \text{ je invarianten podprostor za vse } S \in \mathcal{S}\}.$$

Naj bo $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ neprazna množica operatorjev. Če množica $\mathcal{S}$ vsebuje le en operator S , po dogovoru pišemo $\text{Lat } S$ namesto $\text{Lat } \{S\}$. Naj bo $\mathcal{M} \in \text{Lat } \mathcal{S}$ in naj bo $P \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ ortogonalni projektor na $\mathcal{M}$. Ker velja $\mathcal{M} = \text{im } P$, lahko podprostor $\mathcal{M}$ identificiramo s

pripadajočim projektorjem P . To pa pomeni, da lahko $\text{Lat } \mathcal{S}$ na ekvivalenten način zapišemo kot

$$\text{Lat } \mathcal{S} = \{P \in \mathcal{P}(\mathcal{H}) : (I - P)SP = 0 \text{ za vse } S \in \mathcal{S}\}.$$

Definicija 1.1.3. Naj bo $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{H})$ neprazna družina zaprtih linearnih podprostorov v $\mathcal{H}$. Tedaj z $\text{Alg } \mathcal{L}$ označimo množico operatorjev $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, za katere velja $\mathcal{L} \subseteq \text{Lat } T$.

Naj bo $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{H})$ neprazna družina zaprtih linearnih podprostorov v $\mathcal{H}$. Če podobno kot zgoraj vsak $\mathcal{M} \in \mathcal{L}$ identificiramo s pripadajočim ortogonalnim projektorjem na $\mathcal{M}$, lahko $\mathcal{L}$ predstavimo kot množico ustreznih ortogonalnih projektorjev. V tem primeru dobimo ekvivalenten zapis $\text{Alg } \mathcal{L}$, natančneje,

$$\text{Alg } \mathcal{L} = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : (I - P)TP = 0 \text{ za vse } P \in \mathcal{L}\}.$$

Dokaz naslednje trditve je precej rutinski, zato ga na tem mestu opustimo. Bralec si lahko podrobnosti ogleda v [12].

Trditev 1.1.4. Naj bo $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ neprazna množica operatorjev ter $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{H})$ neprazna družina zaprtih linearnih podprostorov v $\mathcal{H}$.

- (i) $\text{Lat } \mathcal{S}$ je polna mreža podprostorov.
- (ii) $\text{Alg } \mathcal{L}$ je šibko zaprta unitalna podalgebra v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.
- (iii) Velja $\mathcal{S} \subseteq \text{Alg Lat } \mathcal{S}$ in $\mathcal{L} \subseteq \text{Lat Alg } \mathcal{L}$.
- (iv) Velja $\text{Lat Alg Lat } \mathcal{S} = \text{Lat } \mathcal{S}$ in $\text{Alg Lat Alg } \mathcal{L} = \mathcal{L}$.

1.2 Refleksivnost in k -refleksivnost

Definicija refleksivnosti je bila prvotno formulirana za algebre omejenih linearnih operatorjev na Hilbertovem prostoru, zato jo tudi v disertaciji za začetek navedimo v omenjenem kontekstu.

Definicija 1.2.1. Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je *refleksivna*, če velja $\text{Alg Lat } \mathcal{A} = \mathcal{A}$. Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je *refleksiven*, če je $W(T)$ refleksivna algebra.

Študij refleksivnosti algeber operatorjev se je začel v 60. letih 20. stoletja, začetne rezultate na tem področju je objavil Sarason [47]. Nekaj let kasneje sta Loginov in Šulman [34, 48] pojem refleksivnosti razširila v kontekst prostorov omejenih linearnih operatorjev z vpeljavo t.i. refleksivnega pokritja prostora.

Definicija 1.2.2. Refleksivno pokritje neprazne podmnožice $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je podano s predpisom

$$\text{Ref } \mathcal{S} = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : Tx \in [\mathcal{S}x] \text{ za vse } x \in \mathcal{H}\}, \quad (1.2.1)$$

kjer $[\cdot]$ označuje zaprto linearno ogrinjačo. Zaprt linearen podprostor $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je *refleksiven*, če velja $\text{Ref } \mathcal{S} = \mathcal{S}$. Če za $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ velja $\text{Ref } \mathcal{S} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, je prostor $\mathcal{S}$ *tranzitiven*.

Smiselno se je vprašati, ali je definicija refleksivnosti prostorov operatorjev skladna z refleksivnostjo algeber operatorjev. Odgovor je seveda pritrdilen; da je Definicija 1.2.2 razširitev pojma refleksivnosti, nam potrди naslednja trditev, katere dokaz je povzet po [12, Proposition 22.3].

Trditev 1.2.3. Naj bo $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ unitalna algebra. Tedaj velja $\text{Ref } \mathcal{A} = \text{Alg Lat } \mathcal{A}$.

Dokaz. Naj bo $T \in \text{Ref } \mathcal{A}$ in izberimo poljuben $\mathcal{M} \in \text{Lat } \mathcal{A}$. Za vsak $x \in \mathcal{M}$ po predpostavki velja $Tx \in [\mathcal{A}x] \subseteq \mathcal{M}$. Torej je $T \in \text{Alg Lat } \mathcal{M}$ in posledično $\text{Ref } \mathcal{A} \subseteq \text{Alg Lat } \mathcal{A}$. Preverimo, da velja tudi obratna vsebovanost. V ta namen izberimo $T \in \text{Alg Lat } \mathcal{A}$ in poljuben $x \in \mathcal{H}$. Algebra $\mathcal{A}$ vsebuje identični operator, zato je $x \in [\mathcal{A}x]$. Ker je $[\mathcal{A}x] \in \text{Lat } \mathcal{A}$, po predpostavki sledi $Tx \in [\mathcal{A}x]$. Torej je $T \in \text{Ref } \mathcal{A}$. $\square$

V nadaljevanju si oglejmo preprosta zgleda refleksivnega prostora in nerefleksivne algebre. Dokaz naslednje trditve je povzet po [12, Proposition 56.5].

Trditev 1.2.4. *Vsak enorazsežen podprostor algebre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ je refleksiven.*

Dokaz. Naj bo $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ poljuben operator in definirajmo $\mathcal{S} = \mathbb{C}S$. Očitno je $\mathcal{S} \subseteq \text{Ref } \mathcal{S}$, zato zadošča preveriti, da velja obratna inkluzija. Naj bo $T \in \text{Ref } \mathcal{S}$. Po definiciji refleksivnega pokritja za vsak vektor $x \in \mathcal{H}$ velja $Tx \in [\mathcal{S}x] = \mathbb{C}Sx$. Torej obstaja $\alpha_x \in \mathbb{C}$, da velja $Tx = \alpha_x Sx$. Dokazali bomo, da je α_x enolično določen in neodvisen od izbire vektorja x . V ta namen izberimo različna neničelna vektorja $x, y \in \mathcal{H}$. Po predhodnem razmisleku obstajata $\alpha_x, \alpha_y \in \mathbb{C}$, da velja $Tx = \alpha_x Sx$ in $Ty = \alpha_y Sy$. Prav tako obstaja $\alpha_{x+y} \in \mathbb{C}$, za katerega velja $T(x+y) = \alpha_{x+y}(Sx+Sy)$. Po drugi strani pa je $T(x+y) = \alpha_x Tx + \alpha_y Ty$. Torej za poljubna vektorja $x, y \in \mathcal{H}$ velja $(\alpha_{x+y} - \alpha_x)Sx = (\alpha_y - \alpha_{x+y})Sy$, od koder sledi $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_{x+y}$. To pa pomeni, da obstaja enolično določen $\alpha \in \mathbb{C}$, da je $T = \alpha S$. $\square$

Zgled 1.2.5. Naj bo $\mathcal{T}_U(2)$ algebra zgornje trikotnih 2×2 Toeplitzovih matrik, torej

$$\mathcal{T}_U(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Bralec lahko hitro preveri, da je $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Ref } \mathcal{T}_U(2)$, očitno pa ta matrika ni element algebre $\mathcal{T}_U(2)$.

Naravna posplošitev refleksivnega pokritja je t.i. k -refleksivno pokritje, s katerim so se med drugimi ukvarjali Azoff [4, 5] ter Kraus in Larson [29, 31].

Definicija 1.2.6. Za dano neprazno podmnožico $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definiramo k -refleksivno pokritje množice $\mathcal{S}$ s predpisom

$$\text{Ref}_k \mathcal{S} = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \text{za vsak } \varepsilon > 0 \text{ in za vsako } k\text{-terico vektorjev } x_1, \dots, x_k \in \mathcal{H} \text{ obstaja } S \in \mathcal{S} : \|Tx_i - Sx_i\| < \varepsilon \text{ za } 1 \leq i \leq k\}.$$

Zaprta linearen podprostor $\mathcal{S}$ je k -refleksiven, če velja $\text{Ref}_k \mathcal{S} = \mathcal{S}$. Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je k -refleksiven, kadar je $W(T)$ k -refleksivna algebra.

Opazimo, da za $k = 1$ definicija refleksivnega pokritja v Definiciji 1.2.2 sovpada z definicijo 1-refleksivnega pokritja, zato v tem primeru indeks izpustimo. Naslednja trditev je posplošitev [12, Proposition 8.5], ki bralcu oriše nekaj lastnosti k -refleksivnega pokritja.

Trditev 1.2.7. *Naj bo $\mathcal{S}$ neprazna podmnožica v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

- (i) *Prostor $\text{Ref}_k \mathcal{S}$ je šibko zaprt linearen podprostor v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.*
- (ii) *Velja $\text{Ref}_k(\text{Ref}_k \mathcal{S}) = \text{Ref}_k \mathcal{S}$. Torej je $\text{Ref}_k \mathcal{S}$ najmanjši k -refleksiven prostor, ki vsebuje množico $\mathcal{S}$.*
- (iii) *Naj bosta $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ neprazni podmnožici, za kateri velja $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_2$. Tedaj je $\text{Ref}_k \mathcal{S}_1 \subseteq \text{Ref}_k \mathcal{S}_2$.*

Dokaz. Dokaz točke (i) je precej rutinski, zato ga na tem mestu opustimo. Preverimo, da velja (ii). Hitro lahko premislamo, da vedno velja $\mathcal{S} \subseteq \text{Ref}_k \mathcal{S}$, torej je tudi $\text{Ref}_k \mathcal{S} \subseteq \text{Ref}_k(\text{Ref}_k \mathcal{S})$. Naj bo torej $A \in \text{Ref}_k(\text{Ref}_k \mathcal{S})$ in izberimo $\varepsilon > 0$ ter poljubne vektorje $x_1, \dots, x_k \in \mathcal{H}$. Po predpostavki obstaja takšen $B \in \text{Ref}_k \mathcal{S}$, da za $1 \leq j \leq k$ velja $\|(A - B)x_j\| < \varepsilon/2$. Hkrati lahko najdemo takšen $S \in \mathcal{S}$, da za $1 \leq j \leq k$ velja $\|(B - S)x_j\| < \varepsilon/2$. Tedaj za $1 \leq j \leq k$ dobimo $\|(A - S)x_j\| = \|(A - B)x_j + (B - S)x_j\| < \varepsilon$, torej je $A \in \text{Ref}_k \mathcal{S}$. Oglejmo si še (iii). Naj bo $T \in \text{Ref}_k \mathcal{S}_1$, $\varepsilon > 0$ ter $x_1, \dots, x_k \in \mathcal{H}$ poljubni vektorji. Po predpostavki obstaja takšen $S \in \mathcal{S}_1$, da za $1 \leq j \leq k$ velja $\|(T - S)x_j\| < \varepsilon$. Ker je S tudi element množice $\mathcal{S}_2$, sledi $T \in \text{Ref}_k \mathcal{S}_2$. $\square$

Kraus in Larson [29] sta opazila, da med definicijama 1.2.2 in 1.2.6 obstaja neposredna povezava, ki izhaja iz naravnega vprašanja, kdaj je za dani $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operator $T^{(k)}$ refleksiven.

Trditev 1.2.8. *Naj bo $\mathcal{S}$ podprostor v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Tedaj velja*

$$(\text{Ref}_k \mathcal{S})^{(k)} = \text{Ref } \mathcal{S}^{(k)}.$$

Podprostor $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je k -refleksiven natanko tedaj, ko je $\mathcal{S}^{(k)}$ refleksiven podprostor v $\mathcal{B}(\mathcal{H}^{(k)})$.

Dokaz. Naj bo $T \in \text{Ref}_k \mathcal{S}$. Preverimo, da je tedaj $T^{(k)} \in \text{Ref } \mathcal{S}^{(k)}$. Naj bosta $\varepsilon > 0$ in $x_1 \oplus \dots \oplus x_k \in \mathcal{H}^{(k)}$ poljubna. Po predpostavki za $1 \leq i \leq k$ obstaja takšen $S \in \mathcal{S}$, da velja $\|(T - S)x_i\| < \varepsilon/k$. Od tod dobimo $\|(T^{(k)} - S^{(k)})x\| < \varepsilon$, torej velja $(\text{Ref}_k \mathcal{S})^{(k)} \subseteq \text{Ref } \mathcal{S}^{(k)}$. Preverimo, da velja tudi obratna vsebovanost. Naj bo $\tilde{T} \in \text{Ref } \mathcal{S}^{(k)}$. Ker je $(\mathcal{B}(\mathcal{H}))^{(k)}$ reflektivna algebra, ki vsebuje $\mathcal{S}^{(k)}$, lahko sklepamo, da obstaja takšen $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, da velja $\tilde{T} = \bigoplus_{i=1}^k T \in (\mathcal{B}(\mathcal{H}))^{(k)}$. Zadošča torej preveriti, da je $T \in \text{Ref}_k \mathcal{S}$. Naj bodo $x_1, \dots, x_k \in \mathcal{H}$ ter $\varepsilon > 0$ poljubni. Po predpostavki obstaja $S \in \mathcal{S}$, da velja $\|(T^{(k)} - S^{(k)})(x_1 \oplus \dots \oplus x_k)\| = \sum_{i=1}^k \|(T - S)x_i\| < \varepsilon$. V posebnem, za tako izbrani $S \in \mathcal{S}$ za vse $1 \leq i \leq k$ velja $\|(T - S)x_i\| < \varepsilon$, torej je $T \in \text{Ref}_k \mathcal{S}$. $\square$

S tranzitivnostjo in reflektivnostjo je povezan tudi problem invariantnih podprostorov. Ta povezava izhaja iz Kadisonovega vprašanja, ali je vsaka unitalna šibko zaprta tranzitivna algebra tudi reflektivna. Če bi namreč slednje veljalo, bi imel vsak omejen linearen operator vsaj en netrivialen zaprt invarianten podprostor. Če je dani Hilbertov prostor končno razsežen, je odgovor na Kadisonovo vprašanje pritrdilen. Burnside je namreč dokazal, da je edina tranzitivna podalgebra v $\mathbb{M}_k$ kar cela algebra $\mathbb{M}_k$. Dokaz omenjenega izreka lahko bralec najde v [5, Proposition 2.12].

1.3 Dualnost in k -reflektivnost

Naj za poljuben normiran prostor $\mathcal{X}$ označimo $\mathcal{X}^*$ predstavlja prostor vseh omejenih linearnih funkcionalov na $\mathcal{X}$. Naj bo $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Naj bo preslikava $f_T : \mathcal{C}_1(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$ definirana s predpisom $f_T(X) = \text{tr}(TX) = \text{tr}(XT)$. Tedaj je f_T linearen funkcional na $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$, preslikava $T \mapsto f_T$ pa izometrični izomorfizem prostora $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ na $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})^*$. Podrobnosti dokaza so lepo opisane v [12, Theorem 19.2]. Torej lahko algebro $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ identificiramo z dualom prostora $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$; pravimo tudi, da je prostor $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ *predual* prostora $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, kar označimo kot $\mathcal{B}(\mathcal{H})_* = \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$. Torej lahko prostor $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ opremimo tudi z lokalno konveksno topologijo, ki jo ima kot dual prostora operatorjev s sledjo. Če za $X \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ definiramo polnormo $p_X(T) = |\text{tr}(XT)|$ na $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, potem družina polnorm $\{p_X : X \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})\}$ določa t.i. *šibko* topologijo* na $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (ponekod v literaturi poimenovana tudi *ultrašibka* oziroma

σ -šibka topologija). Šibka* topologija na $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ je najšibkejša topologija, v kateri so zvezni vsi elementi preduala in je močnejša od šibke operatorske topologije na $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Bralec lahko več o tej temi prebere v [12].

Kraus in Larson [28, 29] sta pokazala, da je k -refleksivno pokritje dane neprazne množice $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mogoče definirati tudi s pomočjo dualnosti. V ta namen najprej vpeljimo pojem anihilatorja in predanihilatorja dane množice operatorjev.

Definicija 1.3.1. *Predanihilator* podmnožice $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je definiran kot $\mathcal{S}_\perp = \{T \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H}) : \text{tr}(TA) = 0 \text{ za vse } A \in \mathcal{S}\}$. Podobno je *anihilator* podmnožice $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ definiran s predpisom $\mathcal{S}^\perp = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \text{tr}(TA) = 0 \text{ za vse } T \in \mathcal{S}\}$.

Tako predanihilator kot anihilator sta zaprti množici. S pomočjo predanihilatorja lahko povemo, kdaj ima unitalna algebra netrivialen invarianten podprostor. Dokaz naslednje trditve je povzet po [31].

Trditev 1.3.2. *Unitalna algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ima netrivialen invarianten podprostor natanko tedaj, ko $\mathcal{A}_\perp$ vsebuje operator ranga 1.*

Dokaz. Za dana vektorja $x, y \in \mathcal{H}$ z $x \otimes y$ označimo omejen linearen operator ranga največ 1 na prostoru $\mathcal{H}$, ki je podan s predpisom $z \mapsto \langle z, y \rangle x$. Naj bo $P \in \text{Lat } \mathcal{A}$ ter $P \notin \{0, I\}$. Izberimo neničelna vektorja $x \in P\mathcal{H}$ ter $y \in (I - P)\mathcal{H}$. Tedaj za vsak $A \in \mathcal{A}$ velja $\text{tr}(A(x \otimes y)) = \langle Ax, y \rangle = 0$, torej je $x \otimes y \in \mathcal{A}_\perp$. Obratno, naj bo $x \otimes y \in \mathcal{A}_\perp$ operator ranga 1. Ker tedaj za vsak $A \in \mathcal{A}$ velja $\langle Ax, y \rangle = 0$, je $[\mathcal{A}x]$ netrivialen invarianten podprostor algebre $\mathcal{A}$. $\square$

Naslednji izrek je rezultat Krausa in Larsona [29] in predstavlja eno izmed pomembnih orodij na področju k -refleksivnosti. Dokaz izreka je povzet po [29, Theorem 2.1].

Izrek 1.3.3 (Kraus in Larson). *Naj bo $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ šibko* zaprt podprostor. Tedaj velja*

$$\text{Ref}_k \mathcal{S} = (\mathcal{S}_\perp \cap \mathcal{F}_k(\mathcal{H}))^\perp. \quad (1.3.1)$$

Podprostor $\mathcal{S}$ je k -refleksiven natanko tedaj, ko je njegov predanihilator zaprta linearna ogrinjača operatorjev ranga največ k , ki jih vsebuje.

Dokaz. Naj bo $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ poljuben operator ranga največ k . Bralec lahko hitro premisli, da za C obstajajo takšni vektorji $x_i, y_i \in \mathcal{H}$, kjer je $1 \leq i \leq k$, da velja $C = \sum_{i=1}^k x_i \otimes y_i$. Označimo $x = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_k$ ter $y = y_1 \oplus y_2 \oplus \dots \oplus y_k$, torej sta x in y vektorja v prostoru $\mathcal{H}^{(k)}$. Naj bo $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ poljuben operator. Tedaj je

$$\text{tr}(TC) = \sum_{j=1}^k \langle Tx_j, y_j \rangle = \langle T^{(k)}x, y \rangle = \text{tr}(T^{(k)}(x \otimes y)).$$

Torej je $C \in \mathcal{S}_\perp$ natanko tedaj, ko za vsak $S \in \mathcal{S}$ velja $\langle S^{(k)}x, y \rangle = 0$. Z drugimi besedami, $C \in \mathcal{S}_\perp$ natanko tedaj, ko je $y \in [\mathcal{S}^{(k)}x]^\perp$. Posledično za operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ velja $T \in (\mathcal{S}_\perp \cap \mathcal{F}_k(\mathcal{H}))^\perp$ natanko tedaj, ko je $T^{(k)}x \in [\mathcal{S}^{(k)}x]$ za vse $x \in \mathcal{H}^{(k)}$, torej ko je $T^{(k)} \in \text{Ref } \mathcal{S}^{(k)}$. Iz Trditve 1.2.8 tedaj sledi, da je $(\mathcal{S}_\perp \cap \mathcal{F}_k(\mathcal{H}))^\perp = \text{Ref}_k \mathcal{S}$. $\square$

Posledica 1.3.4. *Vsak k -refleksiven prostor je tudi n -refleksiven za $n \geq k$.*

Izrek 1.3.3 sta za primer šibko* zaprtih algeber, ki vsebujejo identični operator, neodvisno dokazala že Arveson [3] in Larson [31]. Trditev 1.3.2 skupaj z Izrekom 1.3.3 pove, da refleksivna algebra vedno premore netrivialen invarianten podprostor. Po drugi strani k -refleksivnost za $k \geq 2$ ne implicira obstoja netrivialnih invariantnih podprostorov, a jo kljub temu lahko naravno karakteriziramo s pomočjo elementov predanihilatorja.

1.4 Zgledi in znani rezultati

Ta razdelek začnemo s preprostimi zgledi, v nadaljevanju pa predstavimo nekatere pomembnejše rezultate na področju k -refleksivnosti algebr in prostorov operatorjev. Nabor zanimivih in poglobljenih rezultatov je seveda precej velik, zato smo se v disertaciji osredotočili predvsem na posamezne temeljne izreke ter na rezultate, na katere se bomo sklicevali v drugih poglavjih disertacije.

Zgled 1.4.1. Vsak linearen podprostor algebre $\mathbb{M}_k$ je k -refleksiven. To je preprosta posledica Izreka 1.3.3 in dejstva, da so vsi elementi algebre $\mathbb{M}_k$ ranga največ k .

Zgled 1.4.2. Definirajmo prostor

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a_3 & a_4 & a_5 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} : a_1, \dots, a_5 \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathbb{M}_3.$$

Ker je $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{M}_3$, je po predhodnem zgledu prostor $\mathcal{S}$ seveda 3-refleksiven. Hitro lahko preverimo, da velja

$$\mathcal{S}_\perp = \left\{ \begin{pmatrix} b_2 & b_4 & 0 \\ b_1 & b_3 & -b_4 \\ 0 & -b_1 & -(b_2 + b_3) \end{pmatrix} : b_1, \dots, b_4 \in \mathbb{C} \right\},$$

Ker so vsi elementi $\mathcal{S}_\perp$ ranga 2, je $\text{Ref } \mathcal{S} = \mathbb{M}_3$, torej je $\mathcal{S}$ tranzitiven podprostor algebre $\mathbb{M}_3$, ki pa je 2-refleksiven.

Naslednja dva zgleda sta navedena v [27, Example 6.1 in Example 6.2].

Zgled 1.4.3. Naj bo $\mathcal{S} = \{S \in \mathbb{M}_k : \text{tr}(S) = 0\}$. Prostor $\mathcal{S}$ je k -refleksiven, saj je linearen podprostor algebre $\mathbb{M}_k$. Hitro lahko preverimo, da je $\mathcal{S}_\perp = \mathbb{C}I_k$, kjer $I_k \in \mathbb{M}_k$ označuje identično matriko. Torej $\mathcal{S}$ ni l -refleksiven za noben $l \in \{1, \dots, k-1\}$, saj njegov predanihnilator ne premore elementov ranga manj od k .

Zgled 1.4.4. Naj bo $C \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ operator ranga k in definirajmo prostor

$$\mathcal{S}_C = \{S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \text{tr}(SC) = 0\}.$$

Tedaj je $\mathcal{S}_\perp = \{\lambda C : \lambda \in \mathbb{C}\}$, torej je $\mathcal{S}_\perp \cap \mathcal{F}_k(\mathcal{H}) = \mathcal{S}_\perp$, kar pomeni, da je prostor $\mathcal{S}$ k -refleksiven. Podobno kot v prejšnjem zgledu, $\mathcal{S}$ ni l -refleksiven za $1 \leq l \leq k-1$.

Definicija 1.4.5. Naj bo $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ množica operatorjev. Komutant množice $\mathcal{S}$ je podan kot

$$\mathcal{S}' = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : ST = TS \text{ za vse } S \in \mathcal{S}\}.$$

Bikomutant množice $\mathcal{S}$ je komutant algebre $\mathcal{S}'$, označimo ga $\mathcal{S}''$.

Komutant dane množice operatorjev je šibko zaprta podalgebra v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, ki vsebuje identični operator. Larson [31] je opazil, da so komutanti primer 2-refleksivnih algebr. Dokaz naslednje trditve je povzet po [31, Lemma 10 in Corollary 11].

Trditev 1.4.6. Komutant neprazne množice operatorjev je 2-refleksivna algebra.

Dokaz. Naj bo $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ neprazna množica. Najprej dokažimo, da je $(\mathcal{S}')_{\perp}$ v normi prostora $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ zaprta linearna ogrinjača množice $\{SC - CS : S \in \mathcal{S}, C \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})\}$. V ta namen si izberimo poljubna $S \in \mathcal{S}$ ter $C \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$. Tedaj za poljuben $A \in \mathcal{S}'$ velja $\text{tr}(A(SC - CS)) = \text{tr}((AS - SA)C) = 0$, torej je $SC - CS \in (\mathcal{S}')_{\perp}$. Obratno, naj bo $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operator, za katerega je $\text{tr}(A(SC - CS)) = 0$ za vse $S \in \mathcal{S}_{\perp}$ ter $C \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$. Torej je $\text{tr}((AS - SA)C) = 0$ za vse $C \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$, kar pomeni, da je $AS - SA = 0$ oziroma $A \in \mathcal{S}'$. Ker je algebra $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ generirana z operatorji ranga 1, po pravkar dokazanem sledi, da je $(\mathcal{S}')_{\perp}$ zaprta linearna ogrinjača operatorjev ranga največ 2. Sklep trditve tedaj sledi iz Izreka 1.3.3. $\square$

Komutanti torej predstavljajo dokaj bogat razred 2-refleksivnih algeber, vendar v splošnem niso refleksivni. Naslednji primer nerefleksivnega komutanta je podan v [31].

Zgled 1.4.7. Naj bo V Volterrov operator na prostoru $L^2[0, 1]$. Po [21, Theorem 1] velja $W(V) = \{V\}' = \{V\}''$, torej iz Trditve 1.4.6 sledi, da je Volterrov operator 2-refleksiven. Ker lahko mrežo invariantnih podprostorov Volterrovega operatorja linearno uredimo z relacijo vsebovanosti, po [42, Corollary 9.25 in Example 9.26] sledi, da V ni refleksiven operator.

V nadaljevanju predstavimo nekatere temeljne rezultate s področja refleksivnosti. Začnimo z refleksivnostjo sebiadjungiranih algeber operatorjev, nato pa si bomo ogledali še začetne rezultate na področju nesebiadjungiranih algeber.

Definicija 1.4.8. *Von Neumannova algebra* je šibko zaprta sebiadjungirana algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$, ki vsebuje identični operator.

Zgled 1.4.9. Naj bo $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ortonormirana baza v $\mathcal{H}$. Potem je množica omejenih linearnih operatorjev na $\mathcal{H}$, ki so diagonalni glede na to bazo, von Neumannova algebra.

Vsaka von Neumannova algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je generirana z množico ortogonalnih projektorjev, ki jih vsebuje. Torej je vsaka von Neumannova algebra šibko zaprta linearna ogrinjača množice $\mathcal{A} \cap \mathcal{P}(\mathcal{H})$. Dokaz naslednjega izreka na tem mestu opustimo; radoveden bralec si lahko osnovna dejstva o von Neumannovih algebrah, vključno s podrobnostmi omenjenega dokaza ter dokaza Izreka 1.4.11, ogleda v [12, 42].

Izrek 1.4.10 (von Neumannov izrek o bikomutantu). *Če je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ von Neumannova algebra, potem je $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$.*

Izrek 1.4.11. *Vsaka von Neumannova algebra je refleksivna.*

Dokaz. Dokaz je povzet po [12, Proposition 56.6]. Naj bo $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ von Neumannova algebra. Naj bo $P \in \text{Lat } \mathcal{A}$. Ker je $\mathcal{A}$ sebiadjungirana algebra, za vsak operator $A \in \mathcal{A}$ velja $PAP = AP$ in $PA^*P = A^*P$. Zadnjo enakost še enkrat adjungirajmo in dobimo $PA = AP$, torej je $P \in \mathcal{A}' \cap \mathcal{P}(\mathcal{H})$. Po drugi strani, če je $P \in \mathcal{A}' \cap \mathcal{P}(\mathcal{H})$, potem za vsak $A \in \mathcal{A}$ velja $PAP = AP$. Torej smo dokazali, da velja $\text{Lat } \mathcal{A} = \mathcal{A}' \cap \mathcal{P}(\mathcal{H})$. Naj bo sedaj $B \in \text{Alg Lat } \mathcal{A}$, torej za vsak $P \in \text{Lat } \mathcal{A} = \mathcal{A}' \cap \mathcal{P}(\mathcal{H})$ velja enakost $PBP = BP$. Ker je tudi $I - P \in \text{Lat } \mathcal{A}$, velja še $(I - P)B(I - P) = B(I - P)$. Sledi, da za vsak $P \in \mathcal{A}' \cap \mathcal{P}(\mathcal{H})$ velja $PB = BP$. Ker je $\mathcal{A}$ sebiadjungirana algebra, je $\mathcal{A}'$ von Neumannova algebra in zato generirana z množico $\mathcal{A}' \cap \mathcal{P}(\mathcal{H})$. Torej za poljuben $T \in \mathcal{A}'$ velja $TB = BT$ in po von Neumannovem izreku o bikomutantu sledi $B \in \mathcal{A}$. $\square$

Eden prvih rezultatov na področju refleksivnosti nesebiadjungiranih algeber operatorjev je bil Sarasonov izrek o normalnih operatorjih [47]. Dokaz Sarasonovega izreka lahko bralec najde v [47, Theorem 2] oziroma v nekoliko splošnejši obliki v [12, Corollary 60.4].

Izrek 1.4.12 (Sarason). *Vsak šibko* zaprt linearen podprostor normalnih operatorjev je refleksiven.*

Sarason je v omenjenem članku obravnaval še en razred operatorjev, in sicer Toeplitzove operatorje. Naj bosta B enotski disk ter ∂B enotska krožnica v kompleksni ravnini in naj bo m normalizirana Lebesgueova mera na ∂B . Za $1 \leq p \leq \infty$ naj $L^p = L^p(\partial B, m)$ označuje pripadajoči Lebesgueov prostor. *Fourierova transformacija* funkcije $f \in L^1$ je funkcija $\hat{f} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, podana s predpisom $\hat{f}(n) = \int f \bar{z}^n dm$. *Hardyjev prostor* H^p , ki ustreza L^p , je definiran kot $H^p = \{f \in L^p : \hat{f}(n) = 0 \text{ za } n < 0\}$. Naj bo P_{H^2} projekcija iz prostora L^2 na prostor H^2 . Za vsak $\phi \in L^\infty$ definirajmo preslikavo $T_\phi : H^2 \rightarrow H^2$ s predpisom $T_\phi f = P_{H^2}(\phi f)$ za $f \in H^2$. Preslikavo T_ϕ imenujemo *Toeplitzov operator*. Če je $\phi \in H^\infty$, je T_ϕ *analitični Toeplitzov operator*. Naj bo $\mathcal{T}$ prostor vseh Toeplitzovih operatorjev in $\mathcal{T}(H^\infty)$ algebra vseh analitičnih Toeplitzovih operatorjev.

Algebra analitičnih Toeplitzovih operatorjev $\mathcal{T}(H^\infty)$ je primer algebre, ki ni niti sebiadjungirana niti normalna, a je refleksivna, kar je dokazal Sarason [47]. Izrek je mogoče zapisati v še nekoliko splošnejši obliki, dokaz pa lahko bralec najde v [12, Corollary 60.6].

Izrek 1.4.13 (Sarason). *Vsak šibko* zaprt linearen podprostor analitičnih Toeplitzovih operatorjev je refleksiven.*

V resnici lahko povemo še več. Algebra $\mathcal{T}(H^\infty)$ je namreč celo *dedno refleksivna*, t.j., refleksiven je tudi vsak njen šibko* zaprt podprostor. Več o tem je mogoče prebrati v [12], omenjeno dejstvo pa sledi iz [12, Theorem 59.3 in Proposition 60.5]. Po drugi strani je prostor $\mathcal{T}$ vseh Toeplitzovih operatorjev 2-refleksiven prostor, ki ni refleksiven [6, Theorem 3.1].

V nadaljevanju predstavimo izrek Deddensa in Fillmore, ki karakterizira refleksivne operatorje na končno razsežnem prostoru. Omenjena avtorja sta v [17] ta problem obravnavala v kontekstu končno razsežnih (ne nujno kompleksnih) vektorskih prostorov. V disertaciji si ogledamo pomen njunega rezultata v primeru, ko je dani vektorski prostor $\mathcal{V}$ enak $\mathbb{C}^n$ za neko naravno število n ; predstavljeno je povzeto po [12]. Za tako izbran $\mathcal{V}$ lahko prostor linearnih transformacij na $\mathcal{V}$ identificiramo kar z algebro $\mathbb{M}_n$. Za naravno število d in skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ naj $J_d(\lambda)$ označuje Jordanovo kletko velikosti d , ki pripada λ , to je,

$$J_d(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_d.$$

Po [12, 57.1] sledi, da je Jordanova kletka $J_d(\lambda)$ refleksivna natanko tedaj, ko je $d = 1$. Naj bo $T \in \mathbb{M}_n$ poljubna matrika in naj bodo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ njene paroma različne lastne vrednosti. Naj bodo $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_m$ pripadajoči lastni podprostor, pri čemer je $\dim \mathcal{V}_i = n_i$ ter $n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$. Za $1 \leq i \leq m$ označimo še $T_i = T|_{\mathcal{V}_i}$, torej je $T = T_1 \oplus \dots \oplus T_m$. Tedaj za vsak $i \in \{1, \dots, m\}$ obstajajo naravna števila $p_1^i \geq \dots \geq p_{r_i}^i$, da je matrika T_i podobna bločno diagonalni matriki $J_{p_1^i}(\lambda_i) \oplus \dots \oplus J_{p_{r_i}^i}(\lambda_i)$. Tako smo dobili Jordanovo kanonično formo matrike T . Naslednji izrek je posledica [17, Theorem 2], dokaz pa lahko bralec najde v [12].

Izrek 1.4.14 (Deddens in Fillmore). *Naj bo $T \in \mathbb{M}_n$ kot zgoraj. Tedaj je T refleksivna matrika natanko tedaj, ko velja: če je $\dim \mathcal{V}_i > 1$ za nek i , potem je $r_i \geq 2$ in bodisi $p_1^i = p_2^i$ bodisi $p_1^i = p_2^i + 1$. Z drugimi besedami, matrika $T \in \mathbb{M}_n$ je refleksivna natanko tedaj, ko je bodisi diagonalna matrika bodisi se pri posamezni lastni vrednosti dimenziji največjih dveh pripadajočih Jordanovih kletk razlikujeta za največ 1.*

Posledica 1.4.15. *Naj bo T linearna transformacija na končno razsežnem prostoru in $d \geq 2$. Potem je $T^{(d)}$ refleksivna transformacija.*

Smiselno se je vprašati, ali lahko kaj povemo tudi v bolj splošnem primeru, ko imamo podan končno razsežen prostor operatorjev na ne nujno končno razsežnem Hilbertovem prostoru. Za zaprt linearen podprostor $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definirajmo $\mathcal{S}_F = \mathcal{S} \cap \mathcal{F}(\mathcal{H})$. Larson je v [33, Theorem 2.6] dokazal, da lahko refleksivnost končno razsežnega prostora $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ karakteriziramo s pomočjo prostora $\mathcal{S}_F$.

Izrek 1.4.16 (Larson). *Naj bo $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ končno razsežen podprostor. Tedaj velja*

$$\text{Ref } \mathcal{S} = \mathcal{S} + \text{Ref } \mathcal{S}_F.$$

Po Trditvi 1.2.8 je prostor $\mathcal{S}$ k -refleksiven natanko tedaj, ko je refleksiven prostor $\mathcal{S}^{(k)}$, zato velja naslednja posledica, dokazana v [33, Corollary 2.8 in Corollary 2.9].

Posledica 1.4.17. *Končno razsežen podprostor $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je k -refleksiven natanko tedaj, ko je $\mathcal{S}_F$ k -refleksiven prostor. Prostor $\text{Ref}_k \mathcal{S}$ je končno razsežen natanko tedaj, ko je $\mathcal{S}$ končno razsežen prostor.*

Oglejmo si še, v kolikšni meri je k -refleksivnost direktne vsote prostorov operatorjev odvisna od posameznih sumandov. Naslednja trditev je v končno razsežnem primeru dokazana v [9, Proposition 2.2]. Drugi del trditve je v [12, Proposition 56.2] naveden v kontekstu refleksivnosti, vendar je dokaz mogoče enostavno posplošiti v smislu k -refleksivnosti.

Trditev 1.4.18. *Naj bodo $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{N}$, kompleksni separabilni Hilbertovi prostori in naj bo $\mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ zaprt linearen podprostor za vsak $n \in \mathbb{N}$.*

- (i) *Naj bo $N \in \mathbb{N}$. Prostor $\bigoplus_{n=1}^N \mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{B}(\bigoplus_{n=1}^N \mathcal{H}_n)$ je k -refleksiven natanko tedaj, ko je k -refleksiven prostor $\mathcal{S}_n$ za vsak $n \in \{1, \dots, N\}$.*
- (ii) *Če je $\{\mathcal{S}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ družina k -refleksivnih prostorov, potem je k -refleksiven tudi podprostor $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{B}(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n)$.*

Dokaz. Točka (ii) se dokaže podobno kot (i), zato preverimo le veljavnost slednje. Označimo $\mathcal{S} = \bigoplus_{n=1}^N \mathcal{S}_n$. Dokazali bomo, da velja $\text{Ref}_k \mathcal{S} = \bigoplus_{n=1}^N \text{Ref}_k \mathcal{S}_n$. Opazimo, da za $1 \leq i \leq N$ in za $x_i \in \mathcal{H}_i$ velja $[Sx_i] \subseteq \mathcal{H}_i$. Naj bo $T \in \text{Ref}_k \mathcal{S}$. Tedaj velja $T\mathcal{H}_i \subseteq \mathcal{H}_i$ in zato za vsak $i \in \{1, \dots, N\}$ obstaja $T_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_i)$, da je $T = \bigoplus_{i=1}^N T_i$. Izberimo poljuben $i \in \{1, \dots, N\}$ in naj bodo $x_{1i}, \dots, x_{ki} \in \mathcal{H}_i$ poljubni vektorji ter $\varepsilon > 0$. Za $1 \leq j \leq k$ označimo z $\tilde{x}_{ij}$ vektor, ki ima neničelno le i -to koordinato, ki naj bo enaka x_{ij} . Po predpostavki obstaja takšen operator $S = \bigoplus_{i=1}^N S_i \in \mathcal{S}$, da za vse $j \in \{1, \dots, k\}$ velja $\|(T - S)\tilde{x}_{ij}\| = \|(T_i - S_i)x_{ij}\| < \varepsilon$. Torej je $T_i \in \text{Ref}_k \mathcal{S}_i$. Preverimo, da velja tudi obratna vsebovanost. V ta namen si za vsak $i \in \{1, \dots, N\}$ izberimo $T_i \in \text{Ref}_k \mathcal{S}_i$ in preverimo, da je $T = \bigoplus_{i=1}^N T_i \in \text{Ref}_k \mathcal{S}$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Za $1 \leq j \leq k$ definirajmo vektorje $x_j = x_{1j} \oplus \dots \oplus x_{Nj} \in \bigoplus_{i=1}^N \mathcal{H}_i$, kjer je $x_{ij} \in \mathcal{H}_i$ za $1 \leq i \leq N$ poljuben vektor. Po predpostavki za vsak $i \in \{1, \dots, N\}$ obstaja $S_i \in \mathcal{S}_i$, da za $1 \leq j \leq k$ velja $\|(T_i - S_i)x_{ij}\| < \frac{\varepsilon}{N}$. Če postavimo $S = \bigoplus_{i=1}^N S_i$, potem po prejšnjem dobimo $\|(T - S)x_j\| \leq \sum_{i=1}^N \|(T_i - S_i)x_{ij}\| < \varepsilon$, kar zaključuje dokaz. $\square$

Po drugi strani direktna vsota refleksivnih operatorjev ni nujno refleksiven operator. Natančneje, če sta T_1 in T_2 refleksivna operatorja, potem šibko zaprta algebra $W(T_1 \oplus T_2)$ v splošnem ni refleksivna; protiprimer je leta 1987 skonstruiral Wogen [51, Example 7]. Dokazal je, da obstajata celo takšna refleksivna operatorja T_1 in T_2 , da $T_1 \oplus T_2$ ni k -refleksiven operator za nobeno končno naravno število k [51, Remark 8]. S to temo je povezano tudi vprašanje, ali

za vsak operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ velja $W(T) = \{T\}' \cap \text{Alg Lat } T$, ki sta ga postavila Radjavi in Rosenthal [42]. Omenjena enakost sicer velja v primeru, ko je dani Hilbertov prostor končno razsežen, kar sta leta 1967 dokazala Brickman in Fillmore; dokaz si lahko bralec ogleda na primer v [12, Corollary 57.6]. Iz enakosti $W(T) = \{T\}' \cap \text{Alg Lat } T$ sicer sledi, da je operator T k -refleksiven za vsak $k \geq 2$, kar je dokazano v [51, Lemma 1]. Wogen je pokazal, da omenjena enakost ni splošno veljavna [51, Example 1]. Še več, obstaja operator, ki ni k -refleksiven za nobeno naravno število k [51, Example 4]. V omenjenem članku lahko bralec najde tudi primer refleksivnega operatorja S , za katerega S^2 ni refleksiven [51, Example 6].

Razdelek zaključimo še z dvema znanima rezultatoma. Deddens je leta 1971 dokazal, da je refleksivna vsaka izometrija [16]. Olin in Thomson pa sta leta 1980 posplošila Sarasonov rezultat, pokazala sta, da je refleksiven celo vsak subnormalen operator [39]. Zgolj v razlago, operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je *subnormalen*, če obstaja Hilbertov prostor $\mathcal{K}$, ki vsebuje $\mathcal{H}$ in normalen operator $N \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$, da velja $N|_{\mathcal{H}} = T$.

1.5 Arvesonova razdalja

V nadaljevanju poglavja se posvetimo t.i. *hiperrefleksivnosti* oziroma *k-hiperrefleksivnosti* algebr in prostorov operatorjev. Temeljno delo na tem področju je opravil Arveson, ki je raziskoval razdaljne formule za gnezdne algebre [2, 3]. Gnezdne algebre so refleksivne algebre, katerih mreža invariantnih podprostorov je linearno urejena. Tovrstne algebre so primer nesebiadjungiranih algebr s komutativno mrežo invariantnih podprostorov. Gnezdne algebre so v posebnem posplošitev algebr zgornje trikotnih matrik v kontekst operatorjev na neskončno razsežnem Hilbertovem prostoru. Arveson je dokazal, da lahko razdaljo poljubnega operatorja $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ do gnezdne algebre $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ izrazimo s formulo

$$\text{dist}(T, \mathcal{A}) = \sup\{\|(I - P)TP\| : P \in \text{Lat } \mathcal{A}\}. \quad (1.5.1)$$

Dokaz enakosti (1.5.1) lahko bralec najde v [2, Theorem 1.1]. Kasneje se je izkazalo, da je izraz na desni v (1.5.1) mogoče uporabiti za ocene razdalje tudi v primeru nekaterih drugih refleksivnih algebr operatorjev. Kot bomo videli v nadaljevanju, za nekatere algebre $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ namreč obstaja takšna konstanta $c \geq 1$, da za poljuben operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ velja $\text{dist}(T, \mathcal{A}) \leq c \sup\{\|(I - P)TP\| : P \in \text{Lat } \mathcal{A}\}$; tovrstne algebre imenujemo *hiperrefleksivne*. Kraus in Larson sta v [28, Theorem 6] pokazala, da omenjena neenakost sicer ni splošno veljavna ocena. Obstajajo namreč refleksivne algebre, za katere ta neenakost ne velja, torej je hiperrefleksivnost v splošnem strožja zahteva od refleksivnosti. Enakost (1.5.1) motivira naslednjo definicijo.

Definicija 1.5.1. Naj bo $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ neprazna podmnožica in $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. *Arvesonovo razdaljo* operatorja T do podmnožice $\mathcal{S}$ definiramo s predpisom

$$\alpha(T, \mathcal{S}) = \sup\{\|(I - Q)TP\| : P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{H}), (I - Q)SP = 0\}. \quad (1.5.2)$$

V nadaljevanju predstavimo nekatere lastnosti Arvesonove razdalje. Naslednja trditev je povzeta po [12, Proposition 58.1]. Dokaz je precej rutinski, zato ga na tem mestu ne navajamo.

Trditev 1.5.2. Naj bo $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ zaprt linearen podprostor.

- (i) Za poljuben operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je $\alpha(T, \mathcal{S}) \leq \text{dist}(T, \mathcal{S})$.
- (ii) Naj $\bar{\mathcal{S}}$ označuje zaprtje prostora $\mathcal{S}$ v normni topologiji. Tedaj za poljuben operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ velja $\alpha(T, \mathcal{S}) = \alpha(T, \bar{\mathcal{S}})$.

(iii) Preslikava $T \mapsto \alpha(T, \mathcal{S})$ definira polnormo na $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Izkaže se, da je mogoče Arvesonovo razdaljo formulirati na več ekvivalentnih načinov. Podrobnosti dokaza si lahko bralec ogleda v [32, Lemma 2] in [12, Proposition 58.1].

Trditve 1.5.3. Naj bo $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ zaprt linearen podprostor. Tedaj za poljuben operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ velja

$$\begin{aligned} \alpha(T, \mathcal{S}) &= \sup \{ \inf \{ \|(T - S)x\| : S \in \mathcal{S} \} : x \in \mathcal{H}, \|x\| \leq 1 \} \\ &= \sup \{ |\operatorname{tr}(TC)| : C \in \mathcal{S}_\perp \cap \mathcal{F}_1(\mathcal{H}), \|C\|_1 \leq 1 \}. \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

Pri tem smo z $\|\cdot\|_1$ označili normo prostora $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$.

Naslednjo posledico Trditve 1.5.3 bomo v splošnejši obliki dokazali v Trditvi 1.6.4, zato dokaza na tem mestu ne podamo. Radoveden bralec lahko podrobnosti sicer najde v [12, Proposition 58.1].

Posledica 1.5.4. Naj bo $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ zaprt linearen podprostor in $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ poljuben operator. Tedaj velja $\alpha(T, \mathcal{S}) = 0$ natanko tedaj, ko je $T \in \operatorname{Ref} \mathcal{S}$.

V primeru unitalnih šibko zaprtih algebr se formula (1.5.2) dodatno poenostavi. Arvesonova razdalja se namreč v tem kontekstu lahko izrazi zgolj s pomočjo mreže invariantnih podprostorov dane algebre. Dokaz naslednje trditve je povzet po [12, Proposition 58.1].

Trditve 1.5.5. Naj bo $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ unitalna šibko zaprta algebra. Tedaj za poljuben $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ velja

$$\alpha(T, \mathcal{A}) = \sup \{ \|(I - P)TP\| : P \in \operatorname{Lat} \mathcal{A} \}. \quad (1.5.4)$$

Dokaz. Označimo z $\beta(T, \mathcal{A})$ desno stran v enakosti (1.5.4). Očitno je $\beta(T, \mathcal{A}) \leq \alpha(T, \mathcal{A})$, saj za poljuben $P \in \operatorname{Lat} \mathcal{A}$ velja $(I - P)AP = 0$. Preverimo, da velja tudi obrat. V ta namen si izberimo projektorja $P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$, za katera velja $(I - Q)AP = 0$. Naj bo $\tilde{P}$ projektor na podprostor $[AP\mathcal{H}]$. Ker je $\mathcal{A}$ algebra, je $\tilde{P} \in \operatorname{Lat} \mathcal{A}$ in ker je $I \in \mathcal{A}$, velja $P \leq \tilde{P}$. Poleg tega je $(I - Q)\tilde{P} = 0$, torej je $\tilde{P} \leq Q$ oziroma $I - Q \leq I - \tilde{P}$. Iz omenjenih lastnosti projektorja $\tilde{P}$ sledi, da za poljuben vektor $x \in \mathcal{H}$ in $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ velja naslednja ocena

$$\begin{aligned} \|(I - Q)TPx\|^2 &= \langle (I - Q)TPx, TPx \rangle \leq \langle (I - \tilde{P})TPx, TPx \rangle \\ &= \langle (I - \tilde{P})T\tilde{P}Px, T\tilde{P}Px \rangle = \|(I - \tilde{P})T\tilde{P}Px\|^2 \\ &\leq \|(I - \tilde{P})T\tilde{P}\|^2 \|Px\|^2. \end{aligned}$$

Torej je $\|(I - Q)TP\| \leq \|(I - \tilde{P})T\tilde{P}\|$ oziroma $\alpha(T, \mathcal{A}) \leq \beta(T, \mathcal{A})$. $\square$

Če primerjamo enakosti (1.5.4) in (1.5.1), vidimo, da je Arveson dokazal, da za poljubno gnezdnno algebro $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ velja $\operatorname{dist}(T, \mathcal{A}) = \alpha(T, \mathcal{A})$ za vsak $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

1.6 Hiperrefleksivnost in k -hiperrefleksivnost

Spoznali smo že definicijo hiperrefleksivnosti za unitalne algebre operatorjev, v nadaljevanju pa si ogledamo definicijo hiperrefleksivnosti in k -hiperrefleksivnosti za prostore operatorjev.

Definicija 1.6.1. Pravimo, da je linearen podprostor $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *hiperrefleksiven*, če obstaja takšna konstanta $c \geq 1$, da velja $\operatorname{dist}(T, \mathcal{S}) \leq c\alpha(T, \mathcal{S})$ za poljuben operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je *hiperrefleksiven*, če je hiperrefleksivna šibko zaprta algebra, generirana s T in identičnim operatorjem. Če je prostor $\mathcal{S}$ hiperrefleksiven, definiramo njegovo *hiperrefleksivnostno konstanto* s predpisom

$$\kappa(\mathcal{S}) = \inf \{ c \geq 1 : \operatorname{dist}(T, \mathcal{S}) \leq c\alpha(T, \mathcal{S}) \text{ za vse } T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \},$$

sicer postavimo $\kappa(\mathcal{S}) = \infty$. Dogovorimo se, da je $\kappa(\mathcal{B}(\mathcal{H})) = 1$.

Trditev 1.6.2. *Vsak hiperrefleksiven prostor je refleksiven in zaprt v šibki operatorski topologiji.*

Dokaz. Dokaz je povzet po [12, Proposition 58.3]. Naj bo $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ hiperrefleksiven prostor. Po Trditvi 1.2.7 zadošča preveriti, da je $\mathcal{S}$ refleksiven prostor. Naj bo $T \in \text{Ref } \mathcal{S}$. Tedaj po točki (iii) Trditve 1.5.2 velja $\alpha(T, \mathcal{S}) = 0$. Ker je $\mathcal{S}$ hiperrefleksiven, velja tudi $\text{dist}(T, \mathcal{S}) = 0$. Torej je $T \in \mathcal{S}$, kar zaključuje dokaz. $\square$

Refleksivnost je torej potreben, ne pa tudi zadosten pogoj za hiperrefleksivnost prostora, kar sta dokazala Kraus in Larson. Kasneje so dodatne protiprimere konstruirali tudi Bessonov, Bračič in Zajac [7]. Bralec lahko dokaz naslednjega izreka in konstrukcijo ustreznega protiprimera najde v [28, Theorem 6].

Izrek 1.6.3 (Kraus in Larson). *Obstaja refleksivna unitalna algebra, ki deluje na neskončno razsežnem separabilnem Hilbertovem prostoru in ki ni hiperrefleksivna.*

Spomnimo se, v razdelku 1.2 tega poglavja se je z vpeljavo k -refleksivnosti prostorov operatorjev posplošil pojem refleksivnosti. Podobno lahko z uporabo dualnosti tudi hiperrefleksivnost vključimo v nekoliko širši kontekst. Za slednje sta zaslužna Kliš in Ptak [27], ki sta vpeljala pojem k -hiperrefleksivnosti prostorov operatorjev. V nadaljevanju predstavimo njuno konstrukcijo, bralec pa lahko več o tej temi prebere v [27].

Za začetek si oglejmo posplošitev Arvesonove razdalje, ki sta jo vpeljala Kliš in Ptak. Za zaprt linearen podprostor $\mathcal{S}$ in operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definiramo

$$\alpha_k(T, \mathcal{S}) = \sup \left\{ |\text{tr}(TC)| : C \in \mathcal{S}_\perp \cap \mathcal{F}_k(\mathcal{H}), \|C\|_1 \leq 1 \right\}. \quad (1.6.1)$$

Iz Trditve 1.5.3 sledi, da je $\alpha_1(T, \mathcal{S}) = \alpha(T, \mathcal{S})$, zato v tem primeru indeks običajno izpustimo. Izkaže se, da ima $\alpha_k(T, \mathcal{S})$ podobne lastnosti kot $\alpha(T, \mathcal{S})$. Naslednja trditev je navedena v [27, Proposition 2.1] in je posplošitev Trditve 1.5.2.

Trditev 1.6.4. *Naj bo $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ linearen podprostor.*

- (i) *Za poljuben operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ velja $\alpha_k(T, \mathcal{S}) \leq \text{dist}(T, \mathcal{S})$ za vse $k \in \mathbb{N}$.*
- (ii) *Preslikava $T \mapsto \alpha_k(T, \mathcal{S})$ definira polnormo na prostoru $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.*
- (iii) *Za poljuben $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je $\alpha_k(T, \mathcal{S}) = 0$ natanko tedaj, ko je $T^{(k)} \in \text{Ref}(\mathcal{S}^{(k)})$.*

Dokaz. Točka (i) je neposredna posledica dejstva, da za vsak operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ in za poljuben šibko* zaprt linearen podprostor $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ velja

$$\text{dist}(T, \mathcal{S}) = \sup \{ |\text{tr}(CT)| : C \in \mathcal{S}_\perp, \|C\|_1 \leq 1 \}. \quad (1.6.2)$$

Kot je navedeno v [2], lahko za dokaz enakosti (1.6.2) uporabimo naslednji izrek. Naj bo $\mathcal{X}$ Banachov prostor in $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}^*$ šibko* zaprt linearen podprostor. Tedaj za vsak $f \in \mathcal{X}^*$ velja $\inf \{ \|f - g\| : g \in \mathcal{M} \} = \sup \{ |f(x)| : x \in \mathcal{M}_\perp, \|x\| \leq 1 \}$. V našem primeru izberemo $\mathcal{X}^* = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mathcal{M} = \mathcal{S}$ ter identificiramo $\mathcal{X} \cong \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$. Enakost (1.6.2) sedaj sledi iz definicije $\text{dist}(T, \mathcal{S})$. Dokaz točke (ii) je precej rutinski, zato ga prepuščamo v razmislek bralcu. Točka (iii) je posledica Trditve 1.2.8 in Izreka 1.3.3. $\square$

Definicija 1.6.5. Linearen podprostor $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je k -hiperrefleksiven, če obstaja takšna konstanta $c \geq 1$, da za poljuben $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ velja $\text{dist}(T, \mathcal{S}) \leq c\alpha_k(T, \mathcal{S})$. Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

je k -hiperrefleksiven, če je k -hiperrefleksivna šibko zaprta algebra, generirana s T in identičnim operatorjem. Če je $\mathcal{S}$ k -hiperrefleksiven, definiramo pripadajočo k -hiperrefleksivnostno konstanto s predpisom

$$\kappa_k(\mathcal{S}) = \inf\{c \geq 1 : \text{dist}(T, \mathcal{S}) \leq c\alpha_k(T, \mathcal{S}) \text{ za vse } T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\},$$

sicer pa postavimo $\kappa_k(\mathcal{S}) = \infty$.

Definicija 1-hiperrefleksivnosti sovпада s pojmom hiperrefleksivnosti iz Definicije 1.6.1, zato za $k = 1$ indeks opustimo in uporabljamo običajno terminologijo. Naslednje dejstvo je posplošitev Trditve 1.6.2, dokaz je povzet po [27, Proposition 2.3].

Trditev 1.6.6. *Vsak k -hiperrefleksiven prostor je k -refleksiven in zaprt v šibki operatorski topologiji.*

Dokaz. Naj bo $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ k -hiperrefleksiven prostor. Po [27, Remark 2.2] za vsak $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ velja $\text{dist}(T^{(k)}, \mathcal{S}^{(k)}) = \text{dist}(T, \mathcal{S})$. Naj bo $\tilde{T} \in \text{Ref } \mathcal{S}^{(k)}$. Ker po Trditvi 1.2.8 velja $\text{Ref } \mathcal{S}^{(k)} = (\text{Ref}_k \mathcal{S})^{(k)}$, lahko najdemo takšen operator $T \in \text{Ref}_k \mathcal{S}$, da je $\tilde{T} = T^{(k)}$. Iz točke (iii) Trditve 1.6.4 tedaj sledi $\alpha_k(T, \mathcal{S}) = 0$. Prostor $\mathcal{S}$ je po predpostavki k -hiperrefleksiven, zato dobimo $\text{dist}(T^{(k)}, \mathcal{S}^{(k)}) = \text{dist}(T, \mathcal{S}) = 0$, torej je $\tilde{T} \in \mathcal{S}^{(k)}$. $\square$

V Trditvi 1.2.8 smo videli, da je prostor $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ k -refleksiven natanko tedaj, ko je $\mathcal{S}^{(k)}$ refleksiven podprostor v $\mathcal{B}(\mathcal{H}^{(k)})$. Vendar pa tovrstna ekvivalenca ne velja tudi za k -hiperrefleksivnost danega prostora. Natančneje, če je prostor $\mathcal{S}^{(k)} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}^{(k)})$ hiperrefleksiven s konstanto c , tedaj je $\mathcal{S}$ k -hiperrefleksiven s konstanto kvečjemu c , kot je dokazano v [27, Theorem 3.5]. Vendar pa obrat v splošnem ne velja, protiprimer sta podala Kliš in Ptak [27, Example 6.3].

S karakterizacijo hiperrefleksivnosti se je ukvarjalo več avtorjev, med drugimi Arveson [3] ter Kraus in Larson [28, 29, 31]. Njihovi rezultati so lepo povzeti v [12, Theorem 58.5], kjer so zapisani ekvivalentni pogoji za hiperrefleksivnost. Kliš in Ptak [27] sta poudarila, da je omenjeno karakterizacijo mogoče posplošiti tudi v kontekst k -hiperrefleksivnosti, zato jo v disertaciji navajamo v slednji obliki. Dokaz izreka na tem mestu zaradi obsežnosti in kompleksnosti izpustimo, bralec si lahko podrobnosti ogleda v [12, Theorem 58.5].

Izrek 1.6.7. *Naj bo $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ zaprt linearen podprostor. Naslednje trditve so ekvivalentne.*

- (i) *Prostor $\mathcal{S}$ je k -hiperrefleksiven s konstanto a .*
- (ii) *Obstaja takšna konstanta $b > 0$, da je množica $\{C \in \mathcal{S}_\perp : \|C\|_1 \leq b\}$ vsebovana v zaprti konveksni ogrinjači množice $\mathcal{D} = \{D : D \in \mathcal{S}_\perp \cap \mathcal{F}_k(\mathcal{H}), \|D\|_1 \leq 1\}$, t.j., konveksna ogrinjača množice $\mathcal{D}$ ima neprazno notranjost.*
- (iii) *Za vsak $C \in \mathcal{S}_\perp$ obstaja takšno zaporedje $\{C_n\} \subset \mathcal{S}_\perp \cap \mathcal{F}_k(\mathcal{H})$, da velja $C = \sum_{n=1}^\infty C_n$ in $\sum_{n=1}^\infty \|C_n\|_1 < \infty$.*
- (iv) *Obstaja takšna konstanta $r > 0$, da za vsak $C \in \mathcal{S}_\perp$ obstaja zaporedje $\{C_n\} \subset \mathcal{S}_\perp \cap \mathcal{F}_k(\mathcal{H})$, za katerega velja $C = \sum_{n=1}^\infty C_n$ in $\sum_{n=1}^\infty \|C_n\|_1 \leq r\|C\|_1$.*
- (v) *Kvocien $\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{S}$, opremljen z normo $\|T + \mathcal{S}\|_{\alpha_k} = \alpha_k(T, \mathcal{S})$, je poln prostor.*
- (vi) *Če za zaporedje $\{T_n\}$ v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ velja $\alpha_k(T_n, \mathcal{S}) \rightarrow 0$, potem v $\mathcal{S}$ obstaja takšno zaporedje $\{S_n\}$, da velja $\|T_n - S_n\| \rightarrow 0$.*

Če velja kateri od pogojev tega izreka, potem lahko konstante a , b in r izberemo tako, da zadoščajo $a = b^{-1} = r$. Dalje, če za $C \in \mathcal{S}_\perp$ definiramo

$$\kappa_k(C, \mathcal{S}_\perp) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \|C_n\|_1 : \{C_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}_\perp \cap \mathcal{F}_k(\mathcal{H}), C = \sum_{n \in \mathbb{N}} C_n \right\},$$

potem je k -hiperrefleksivnostna konstanta prostora $\mathcal{S}$ enaka

$$\kappa_k(\mathcal{S}) = \sup \{ \kappa_k(C, \mathcal{S}_\perp) : C \in \mathcal{S}_\perp, \|C\|_1 \leq 1 \}.$$

V nadaljevanju navedimo dve posledici zgornje karakterizacije, ki ju navajata avtorja v [27]. Prva posledica sledi neposredno iz točke (iii) Izreka 1.6.7.

Posledica 1.6.8. *Naj bo Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ končno razsežen. Tedaj je vsak k -refleksiven prostor tudi k -hiperrefleksiven.*

Bistveno težje je videti, da enako velja tudi v primeru, ko je končno razsežen prostor operatorjev in ne nujno tudi Hilbertov prostor, kar sta dokazala Müller in Ptak [38]. Spomnimo se še Posledice 1.3.4, ki pravi, da je vsak k -refleksiven prostor tudi n -refleksiven za $n \geq k$. V [27, Remark 2.5] je utemeljeno, da podobno velja tudi za k -hiperrefleksivnost prostora. To je neposredna posledica uporabe Izreka 1.6.7 in pa dejstva, da za $n \geq k$ velja $\mathcal{F}_k(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{F}_n(\mathcal{H})$. Ker smo se dogovorili, da je $\kappa(\mathcal{B}(\mathcal{H})) = 1$, lahko s pomočjo naslednjega dejstva hitro premislamo, da velja tudi $\kappa_k(\mathcal{B}(\mathcal{H})) = 1$ za poljubno naravno število k .

Posledica 1.6.9. *Vsak k -hiperrefleksiven podprostor v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ je tudi l -hiperrefleksiven za vse $l \geq k$. Pri tem velja $\kappa_l(\mathcal{S}) \leq \kappa_k(\mathcal{S})$.*

1.7 Zgledi k -hiperrefleksivnih prostorov

Vprašanje, ali je dani prostor operatorjev k -hiperrefleksiven, je v splošnem bistveno težje od problema, kdaj je taisti prostor k -refleksiven. Kljub temu pa so znani odgovori za posamezne družine operatorjev. V nadaljevanju predstavimo nekatere izmed njih.

Zgled 1.7.1. Naj bo $C \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ operator ranga k . V Zgledu 1.4.4 smo definirali prostor $\mathcal{S}_C = \{S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \text{tr}(SC) = 0\}$. Iz [27, Example 6.2] sledi, da je $\mathcal{S}$ k -hiperrefleksiven prostor s pripadajočo konstanto 1. Vendar pa za $1 \leq l \leq k - 1$ prostor $\mathcal{S}_C$ ni l -hiperrefleksiven.

Trditev 1.7.2. *Vsak enorazsežen podprostor $\mathcal{S}$ algebre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ je hiperrefleksiven. Pri tem velja še $\kappa(\mathcal{S}) = 1$.*

Trditev 1.7.2 sta dokazala Kraus in Larson [29, Proposition 3.10], vendar iz njunega dokaza sledi le, da je pripadajoča hiperrefleksivnostna konstanta največ 4. Magajna je z drugačnim pristopom kasneje dokazal, da je konstanta enaka 1. Dokaz si lahko bralec ogleda v [36, Proposition 1.2].

Omenili smo že, da so sebiadjungirane unitalne refleksivne algebre natanko von Neumannove algebre. Še vedno ni znano, ali je vsaka von Neumannova algebra tudi hiperrefleksivna, znani pa so rezultati za določene razrede von Neumannovih algeber.

Izrek 1.7.3 (Rosenoer). *Vsaka komutativna von Neumannova algebra ter vsaka von Neumannova algebra s komutativnim komutantom je hiperrefleksivna. Pri tem je pripadajoča hiperrefleksivnostna konstanta v obeh primerih največ 2.*

Bralec si lahko zgornji izrek in njegov dokaz ogleda v [43, Theorem 3.5] oziroma v [12]. V omenjenem članku je Rosenoer dokazal še, da je hiperrefleksivna tudi vsaka šibko zaprta unitalna algebra normalnih operatorjev, pri čemer je hiperrefleksivnostna konstanta največ 3. Posledično je hiperrefleksiven vsak normalen operator. Prav tako je hiperrefleksiven tudi vsak šibko* zaprt podprostor normalnih operatorjev v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, pri čemer je hiperrefleksivnostna konstanta omejena s 5, več o tem lahko bralec najde v [12, Theorem 60.14].

Pobljže si oglejmo še razred Toeplitzovih operatorjev, o katerih smo govorili v Razdelku 1.4. Spomnimo se; algebra $\mathcal{T}(H^\infty)$ analitičnih Toeplitzovih operatorjev je refleksivna [47], prostor $\mathcal{T}$ vseh Toeplitzovih operatorjev pa je 2-refleksiven prostor, ki ni refleksiven [6]. Davidson [13] je dokazal, da je algebra $\mathcal{T}(H^\infty)$ tudi hiperrefleksivna. Ker $\mathcal{T}$ ni refleksiven prostor, po Trditvi 1.6.2 ni niti hiperrefleksiven. Kliš in Ptak sta kasneje v [27, Theorem 4.1] dokazala, da je prostor $\mathcal{T}$ 2-hiperrefleksiven ter da velja $\kappa_2(\mathcal{T}) \leq 2$.

V Trditvi 1.4.18 smo že videli, da se k -refleksivnost ohranja s števnimi direktnimi vsotami. Z nekaj dodatnimi pogoji podobno velja tudi za k -hiperrefleksivnost, kot vidimo v naslednjem izreku Kliševe in Ptaka [27, Theorem 5.1].

Izrek 1.7.4 (Kliš in Ptak). *Naj bodo $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{N}$, kompleksni separabilni Hilbertovi prostori in naj bo $\mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ zaprt linearen podprostor za vsak $n \in \mathbb{N}$. Potem je $\mathcal{S} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_n$ k -hiperrefleksiven podprostor natanko tedaj, ko so k -hiperrefleksivni vsi prostori $\mathcal{S}_n$ in obstaja konstanta $K > 0$, da velja $\kappa_k(\mathcal{S}_n) \leq K$. Pri tem velja še ocena $\kappa_k(\mathcal{S}) \leq 2 + 3K$.*

Pogoj, da so k -hiperrefleksivnostne konstante danih prostorov operatorjev enakomerno omejene, je nujen. Zgled sta za $k = 1$ podala že Kraus in Larson [28, Theorem 6] in na ta način skonstruirala primer refleksivne algebre, ki ni hiperrefleksivna. V Poglavlju 4 bomo večkrat imeli opravka s končnimi direktnimi vsotami prostorov operatorjev. Pri tem nam bodo v pomoč predvsem rezultati za direktno vsoto dveh prostorov. Za poljubna kompleksna Hilbertova prostora $\mathcal{H}_1$ in $\mathcal{H}_2$ je tako prostor $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \oplus \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ k -hiperrefleksiven s konstanto 1, dokaz lahko bralec najde v [29, Lemma 4.6] in [27, Lemma 5.3]. Tudi sicer lahko v primeru, ko imamo opravka z direktno vsoto zgolj dveh podprostorov operatorjev, podamo boljšo oceno k -hiperrefleksivnostne konstante kot v Izreku 1.7.4, kar sta pokazala Kliš in Ptak v [27, Corollary 5.4].

Trditev 1.7.5. *Naj bosta $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ in $\mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ k -hiperrefleksivna prostora. Tedaj je k -hiperrefleksivna tudi njuna direktna vsota $\mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$ in velja*

$$\max\{\kappa_k(\mathcal{S}_1), \kappa_k(\mathcal{S}_2)\} \leq \kappa_k(\mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2) \leq 1 + 2 \max\{\kappa_k(\mathcal{S}_1), \kappa_k(\mathcal{S}_2)\}.$$

Poglavje 2

Zaporedja k -refleksivnostnih defektov

Zanimivo se je vprašati, v kolikšni meri dani prostor operatorjev odstopa od svojega k -refleksivnega pokritja. To nam pove t.i. k -refleksivnostni defekt. Omenjeno vprašanje se je prvič pojavilo v kontekstu refleksivnosti. Natančneje, Delai [18, 19] je obravnaval primer šibko zaprte algebre, generirane z direktno vsoto sebiadjungiranega in nilpotentnega operatorja ter dokazal, da je refleksivnostni defekt tovrstne algebre odvisen zgolj od nilpotenta. Ambrozie, Kuzma in Müller [1] so pokazali, da je dimenzija refleksivnega pokritja prostora operatorjev na končno razsežnem Hilbertovem prostoru navzgor omejena, s čimer so dobili tudi zgornjo mejo za refleksivnostni defekt takšnega prostora. S k -refleksivnostnim defektom so se med drugimi ukvarjali tudi avtorji v [8, 9, 44, 46]. Bralec si lahko rezultate, predstavljene v tem poglavju, ogleda v [44, 46].

2.1 Definicija in lastnosti k -refleksivnostnega defekta

Definicija 2.1.1. Naj bo $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ šibko* zaprt linearen podprostor. S predpisom

$$\text{rd}_k \mathcal{S} = \dim (\text{Ref}_k \mathcal{S} / \mathcal{S})$$

je definiran k -refleksivnostni defekt prostora $\mathcal{S}$.

Indeks 1 kot običajno opustimo in v tem primeru govorimo o refleksivnostnem defektu. Opazimo, da je v primeru, ko je dani prostor $\mathcal{S}$ končno razsežen, njegov k -refleksivnostni defekt enak $\text{rd}_k \mathcal{S} = \dim \text{Ref}_k \mathcal{S} - \dim \mathcal{S}$. Če združimo (1.1.1) z Izrekom 1.3.3, dobimo

$$\mathcal{S} \subseteq \overline{\mathcal{S}}^{w*} \subseteq \dots \subseteq \text{Ref}_2 \mathcal{S} \subseteq \text{Ref}_1 \mathcal{S}, \quad (2.1.1)$$

kjer $\overline{\mathcal{S}}^{w*}$ označuje zaprtje prostora $\mathcal{S}$ v šibki* topologiji. Po definiciji k -refleksivnostnega defekta iz (2.1.1) tedaj sledi

$$\text{rd}_1 \mathcal{S} \geq \text{rd}_2 \mathcal{S} \geq \dots \geq 0.$$

V nadaljevanju si ogledamo nekatere lastnosti k -refleksivnostnega defekta. Izkáže se, da določene transformacije danega prostora operatorjev ohranjajo njegov k -refleksivnostni defekt. Naslednje dejstvo je navedeno in dokazano v [9, Proposition 2.1].

Trditev 2.1.2. Naj bo $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ zaprt linearen podprostor. Označimo $\mathcal{S}^* = \{S^* : S \in \mathcal{S}\}$. Tedaj velja $(\text{Ref}_k \mathcal{S})^* = \text{Ref}_k \mathcal{S}^*$ in $\text{rd}_k \mathcal{S}^* = \text{rd}_k \mathcal{S}$. Prostor $\mathcal{S}^*$ je k -refleksiven natanko tedaj, ko je k -refleksiven prostor $\mathcal{S}$.

Trditev 2.1.3. Naj bo $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ zaprt linearen podprostor in naj bosta $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ obrnljiva linearna operatorja. Označimo $T_1 \mathcal{S} T_2 = \{T_1 S T_2 : S \in \mathcal{S}\}$. Tedaj velja

$$T_1 (\text{Ref}_k \mathcal{S}) T_2 = \text{Ref}_k (T_1 \mathcal{S} T_2) \quad \text{in} \quad \text{rd}_k (T_1 \mathcal{S} T_2) = \text{rd}_k \mathcal{S}.$$

Prostor $T_1 \mathcal{S} T_2$ je k -refleksiven natanko tedaj, ko je k -refleksiven prostor $\mathcal{S}$.

Dokaz. Naj bo $A \in \text{Ref}_k \mathcal{S}$. Naj bo $\varepsilon > 0$ in naj bodo $x_1, \dots, x_k \in \mathcal{H}$ poljubni vektorji. Za $1 \leq i \leq k$ postavimo $y_i = T_2 x_i$. Po predpostavki obstaja $S \in \mathcal{S}$, da za $1 \leq i \leq k$ velja $\|(A - S)y_i\| < \frac{\varepsilon}{\|T_1\|}$. Tedaj velja

$$\|(T_1 A T_2 - T_1 S T_2)x_i\| \leq \|T_1\| \|(A - S)y_i\| < \varepsilon,$$

torej je $T_1 (\text{Ref}_k \mathcal{S}) T_2 \subseteq \text{Ref}_k (T_1 S T_2)$. Naj bo sedaj $B \in \text{Ref}_k (T_1 S T_2)$, $\varepsilon > 0$ in $x_1, \dots, x_k \in \mathcal{H}$ poljubni vektorji. Preveriti moramo, da je $T_1^{-1} B T_2^{-1} \in \text{Ref}_k \mathcal{S}$. Za $1 \leq i \leq k$ postavimo $y_i = T_2^{-1} x_i$. Po predpostavki obstaja $S \in \mathcal{S}$, da za $1 \leq i \leq k$ velja $\|(B - T_1 S T_2)y_i\| < \frac{\varepsilon}{\|T_1^{-1}\|}$. Tedaj velja

$$\|(T_1^{-1} B T_2^{-1} - S)x_i\| \leq \|T_1^{-1}\| \|(B - T_1 S T_2)y_i\| < \varepsilon,$$

torej je $T_1 (\text{Ref}_k \mathcal{S}) T_2 = \text{Ref}_k (T_1 S T_2)$. Preostanek trditve je enostavna posledica pravkar dokazane enakosti. $\square$

Trditev 2.1.3 lahko bralec najde v [5, Proposition 2.9] ter v [9, Proposition 2.1]. Naslednje dejstvo je v [9, Proposition 2.2] formulirano in dokazano v kontekstu končno razsežnih linearnih prostorov nad komutativnim obsegom. Ker lahko dokaz podobno kot v Trditvi 1.4.18 enostavno prilagodimo za primer neskončno razsežnih kompleksnih Hilbertovih prostorov, ta rezultat navajamo v slednji obliki.

Trditev 2.1.4. *Naj bodo $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_n$ kompleksni separabilni Hilbertovi prostori. Za $1 \leq i \leq n$ naj bo $\mathcal{S}_i \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_i)$ zaprt podprostor. Tedaj je*

$$\text{rd}_k(\mathcal{S}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{S}_n) = \text{rd}_k \mathcal{S}_1 + \dots + \text{rd}_k \mathcal{S}_n.$$

V [10] je obravnavana splošnejša situacija kot v Trditvi 2.1.4, motivacija za omenjeno je [9, Proposition 2.3]. Naj bodo $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_n$ kompleksni separabilni Hilbertovi prostori in naj bo $\mathcal{S}_{ij} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_j, \mathcal{H}_i)$ zaprt podprostor za $1 \leq i, j \leq n$. Definirajmo

$$\mathcal{S}_n = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{11} & \dots & \mathcal{S}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{S}_{n1} & \dots & \mathcal{S}_{nn} \end{pmatrix} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n). \quad (2.1.2)$$

Naslednji izrek podaja kriterij, kdaj je prostor oblike (2.1.2) k -refleksiven.

Izrek 2.1.5. *Naj bo prostor $\mathcal{S}_n$ definiran kot v (2.1.2). Tedaj velja*

$$\text{Ref}_k \mathcal{S}_n = \begin{pmatrix} \text{Ref}_k \mathcal{S}_{11} & \dots & \text{Ref}_k \mathcal{S}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \text{Ref}_k \mathcal{S}_{n1} & \dots & \text{Ref}_k \mathcal{S}_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \text{rd}_k(\mathcal{S}_n) = \sum_{i,j=1}^n \text{rd}_k(\mathcal{S}_{ij}).$$

V posebnem, prostor $\mathcal{S}_n$ je k -refleksiven natanko tedaj, ko so $\mathcal{S}_{ij}$ k -refleksivni prostori za vse $1 \leq i, j \leq n$.

Dokaz. Definirajmo

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \text{Ref}_k \mathcal{S}_{11} & \dots & \text{Ref}_k \mathcal{S}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \text{Ref}_k \mathcal{S}_{n1} & \dots & \text{Ref}_k \mathcal{S}_{nn} \end{pmatrix}.$$

Preverimo, da velja $\text{Ref}_k \mathcal{S}_n = \mathcal{S}$. Naj bosta $i_0, j_0 \in \{1, \dots, n\}$ in naj bo $T \in \text{Ref}_k \mathcal{S}_{i_0 j_0}$. Definirajmo $\tilde{T} = (T_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n)$, kjer je $T_{ij} = 0$ za $i \neq i_0$ in $j \neq j_0$ ter $T_{i_0 j_0} = T$. Preverimo, da je $\tilde{T} \in \text{Ref}_k \mathcal{S}_n$. Naj bodo $x^{(l)} = x_{l1} \oplus x_{l2} \oplus \dots \oplus x_{ln} \in \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n$ za $1 \leq l \leq k$

poljubni vektorji in naj bo $\varepsilon > 0$. Po predpostavki za vsak $l \in \{1, \dots, k\}$ obstaja $S_l \in \mathcal{S}_{i_0 j_0}$, da je $\|(T - S_l)x_{l j_0}\| < \varepsilon$. Za $1 \leq l \leq k$ definirajmo še $\tilde{S}_l = (S_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n)$, kjer je $S_{ij} = 0$ za $i \neq i_0$ in $j \neq j_0$ ter $S_{i_0 j_0} = S_l$. Tedaj za vsak $l \in \{1, \dots, k\}$ velja

$$\|(\tilde{T} - \tilde{S}_l)x^{(l)}\| = \|(T - S_l)x_{l j_0}\| < \varepsilon.$$

Dokazali smo $\mathcal{S} \subseteq \text{Ref}_k \mathcal{S}_n$. Preverimo, da velja tudi obrat. Naj bo $T \in \text{Ref}_k \mathcal{S}_n$. Privzamemo lahko, da je $T = (T_{ij})_{i,j=1}^k$, kjer je $T_{ij} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_j, \mathcal{H}_i)$. Zadošča torej videti, da velja $T_{ij} \in \text{Ref}_k(\mathcal{S}_{ij})$ za vse $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Izberimo poljubna, a fiksna $i_0, j_0 \in \{1, \dots, n\}$ in naj bodo $x_1, \dots, x_k \in \mathcal{H}_{j_0}$ poljubni vektorji. Za vsak $i \in \{1, \dots, k\}$ definirajmo vektor $x^{(i)} = (0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n)$, pri čemer je x_i j_0 -ta koordinata. Naj bo $\varepsilon > 0$. Po predpostavki obstaja tak operator $S = (S_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{S}_n$, da za vse $i \in \{1, \dots, k\}$ velja $\|(T_{i_0 j_0} - S_{i_0 j_0})x_i\|_{\mathcal{H}_{j_0}} \leq \|(T - S)x^{(i)}\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon$. Torej je $T_{i_0 j_0} \in \text{Ref}_k \mathcal{S}_{i_0 j_0}$. Enakost $\text{rd}_k(\mathcal{S}_n) = \sum_{i,j=1}^n \text{rd}_k(\mathcal{S}_{ij})$ sledi iz dejstva, da velja

$$\text{Ref}_k \mathcal{S}_n / \mathcal{S}_n = \begin{pmatrix} \text{Ref}_k \mathcal{S}_{11} / \mathcal{S}_{11} & \dots & \text{Ref}_k \mathcal{S}_{1n} / \mathcal{S}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \text{Ref}_k \mathcal{S}_{n1} / \mathcal{S}_{n1} & \dots & \text{Ref}_k \mathcal{S}_{nn} / \mathcal{S}_{nn} \end{pmatrix},$$

s čimer je dokaz izreka končan. $\square$

Naj omenimo, da sta se s k -refleksivnostnim defektom prostorov operatorjev, ki delujejo na končno razsežnih linearnih prostorih nad komutativnim obsegom, ukvarjala Bračič in Kuzma. V tem kontekstu sta natančno določila refleksivnostni defekt dvorazsežnih prostorov operatorjev [9, Theorem 3.10]. Naj bo $\mathcal{V}$ končno razsežen vektorski prostor nad komutativnim obsegom $\mathbb{F}$ in naj $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ označuje prostor linearnih operatorjev na $\mathcal{V}$. Za $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ naj bo $\mathcal{P}(A)$ algebra, generirana z A in identičnim operatorjem. Bračič in Kuzma sta določila refleksivnostni defekt algebre $\mathcal{P}(A)$ in njenega komutanta, več o tem lahko bralec najde v [9, Theorem 4.3, Theorem 4.8]. S tem sta posplošila rezultat Deddensa in Fillmora [17], ki smo ga navedli v Izreku 1.4.14.

2.2 Zaporedja k -refleksivnostnih defektov

V nadaljevanju tega poglavja se ukvarjamo s problemom, kako danemu zaporedju nenegativnih celih števil prirediti takšen prostor operatorjev, da bo k -ti člen zaporedja natanko k -refleksivnostni defekt prostora.

Vprašanje 2.2.1. Naj bo $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq 0$ zaporedje nenegativnih celih števil. Ali obstaja takšen prostor $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$, da velja $\text{rd}_k \mathcal{S} = r_k$ za vse $k \geq 1$?

Za začetek si oglejmo, kaj lahko povemo, ko je dano zaporedje ničelno. V tem primeru ni težko poiskati podprostor algebre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, ki za dano zaporedje zadošča predpostavkam Vprašanja 2.2.1. Primerna izbira bo namreč kateri koli refleksiven podprostor algebre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Ker je vsak enorazsežen podprostor refleksiven, lahko izberemo kar $\mathcal{S} = \mathbb{C}T$, kjer je $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ nek neničeln operator. V nadaljevanju zato brez izgube splošnosti predpostavimo, da je dano zaporedje neničelno. Oglejmo si enostaven zgled takšnega zaporedja.

Zgled 2.2.2. Naj bo $r_1 = 1$ ter $r_j = 0$ za vse $j \geq 2$. Definirajmo prostora

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ 0 & s_1 \end{pmatrix} : s_1, s_2 \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathbb{M}_2 \\ \text{in } \mathcal{S}_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ 0 & s_1 & s_4 \\ 0 & 0 & s_5 \end{pmatrix} : s_1, \dots, s_5 \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathbb{M}_3. \end{aligned}$$

Preverimo, da $\mathcal{S}_1$ in $\mathcal{S}_2$ oba zadoščata predpostavkam Vprašanja 2.2.1 za dano zaporedje. V ta namen si oglejmo pripadajoča predanihnilatorja,

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_1)_\perp &= \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ 0 & -t_1 \end{pmatrix} : t_1, t_2 \in \mathbb{C} \right\}, \\ (\mathcal{S}_2)_\perp &= \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ 0 & -t_1 & t_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : t_1, \dots, t_4 \in \mathbb{C} \right\}. \end{aligned}$$

Z uporabo Izreka 1.3.3 tedaj vidimo, da je

$$\begin{aligned} \text{Ref } \mathcal{S}_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ 0 & s_3 \end{pmatrix} : s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathbb{M}_2, \\ \text{in } \text{Ref } \mathcal{S}_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ 0 & s_4 & s_5 \\ 0 & 0 & s_6 \end{pmatrix} : s_1, \dots, s_6 \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathbb{M}_3, \end{aligned}$$

za vse $j \geq 2$ pa velja $\text{Ref}_j \mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_1$ ter $\text{Ref}_j \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_2$. To pa seveda pomeni, da za $i = 1, 2$ velja $\text{rd}_i \mathcal{S}_i = 1$ ter $\text{rd}_j \mathcal{S}_i = 0$ za vse $j \geq 2$.

Odgovor na Vprašanje 2.2.1 bomo poiskali v dveh korakih. V razdelku 2.3 si ogledamo primer, ko ima dano zaporedje le končno mnogo neničelnih elementov. Izkaže se, da za primerno izbrano naravno število N lahko konstruiramo podprostor $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{M}_N$, ki v omenjenem primeru zadošča pogojem Vprašanja 2.2.1. Nato s pomočjo te konstrukcije v razdelku 2.4 podamo pritrdilen odgovor na Vprašanje 2.2.1 tudi v splošnem primeru.

2.3 Zaporedja s končno mnogo neničelnimi členi

V tem razdelku se ukvarjamo z naslednjim posebnim primerom Vprašanja 2.2.1.

Vprašanje 2.3.1. Naj bo $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq 0$ zaporedje naravnih števil in naj bo $r_k > 0$ ter $r_j = 0$ za vse $j > k$, kjer je $k \geq 1$. Ali obstaja takšen podprostor $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$, za katerega velja $\text{rd}_j \mathcal{S} = r_j$ za vse $j \geq 1$?

Naj bo $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ končno razsežen prostor operatorjev. Če Larsonov rezultat, ki smo ga navedli v Izreku 1.4.16, združimo s Posledico 1.4.17, lahko sklepamo, da je k -refleksivnostni defekt prostora $\mathcal{S}$ odvisen le od elementov končnega ranga. Torej lahko brez izgube splošnosti privzamemo, da je Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ končno razsežen. Tedaj za poljuben linearen podprostor $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ velja $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_\perp)^\perp$. V nadaljevanju konstruiramo takšen prostor $\mathcal{T}$, da bo njegov anihilator zadoščal pogojem Vprašanja 2.3.1. Za začetek pa si oglejmo enostaven zgled.

Zgled 2.3.2. Naj bo $r_1 = 4$, $r_2 = 2$, $r_3 = 1$ in $r_j = 0$ za vse $j \geq 4$. Naj bo $\{e_1, \dots, e_5\}$ standardna ortonormirana baza prostora $\mathbb{C}^5$ in naj $E_{ij} = e_i \otimes e_j$ predstavlja tisto matrično enoto algebre $\mathbb{M}_5$, ki ima enico v i -ti vrstici in j -tem stolpcu, drugod pa ničle. Definirajmo naslednje elemente algebre $\mathbb{M}_5$

$$\begin{aligned} C_1 &= E_{12} + E_{23}, & C_2 &= E_{34} + E_{45}, \\ C_3 &= E_{13} + E_{24} + E_{35}, & C_4 &= E_{11} + E_{22} + E_{33} + E_{44}. \end{aligned}$$

Naj bo $\mathcal{T} = \text{Lin}\{C_1, C_2, C_3, C_4\} \subset \mathbb{M}_5$ in definirajmo $\mathcal{S} = \mathcal{T}^\perp$. Torej je

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & * & * & * & * \\ b_1 & a_2 & * & * & * \\ c_1 & -b_1 & a_3 & * & * \\ * & c_2 & b_2 & -\sum_{j=1}^3 a_j & * \\ * & * & -(c_1 + c_2) & -b_2 & * \end{pmatrix} : a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C} \right\},$$

kjer oznaka $*$ pomeni, da je dani koeficient poljubno kompleksno število in zato neodvisen od preostalih koeficientov v matriki. Po Izreku 1.3.3 tedaj velja $\text{Ref } \mathcal{S} = \mathbb{M}_5$,

$$\begin{aligned} \text{Ref}_2 \mathcal{S} &= \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ b_1 & * & * & * & * \\ * & -b_1 & * & * & * \\ * & * & b_2 & * & * \\ * & * & * & -b_2 & * \end{pmatrix} : b_i \in \mathbb{C} \right\}, \\ \text{Ref}_3 \mathcal{S} &= \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ b_1 & * & * & * & * \\ c_1 & -b_1 & * & * & * \\ * & c_2 & b_2 & * & * \\ * & * & -(c_1 + c_2) & -b_2 & * \end{pmatrix} : b_i, c_i \in \mathbb{C} \right\} \end{aligned}$$

ter $\text{Ref}_j \mathcal{S} = \mathcal{S}$ za vse $j \geq 4$. To pa pomeni, da za vsa naravna števila j velja $\text{rd}_j \mathcal{S} = r_j$.

Zgornji zgled motivira konstrukcijo, s pomočjo katere v nadaljevanju podamo pritrdilen odgovor na Vprašanje 2.3.1. Natančneje, s pomočjo Izreka 1.3.3 poiščemo linearen podprostor algebre $\mathbb{M}_N$ za primerno naravno število N , tako da njegov anihilator zadošča predpostavkam Vprašanja 2.3.1.

Trditev 2.3.3. *Naj bo $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq 0$ zaporedje naravnih števil in naj bo $r_k > 0$ ter $r_j = 0$ za vse $j > k$, kjer je $k \geq 1$. Definirajmo*

$$N = \max \{r_k(k+1), (r_{j-1} - r_j + 1)j - 1 : 2 \leq j \leq k\}. \quad (2.3.1)$$

Tedaj obstaja takšen linearen podprostor $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{M}_N$, da velja $\text{rd}_j \mathcal{S} = r_j$ za vse $j \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Zaradi definicije (2.3.1) lahko definiramo naslednje elemente algebre $\mathbb{M}_N$,

$$C_{k+1,s} = \sum_{n=(s-1)(k+1)+1}^{s(k+1)} E_{nn} \quad \text{za } 1 \leq s \leq r_k. \quad (2.3.2)$$

Naj bo $2 \leq j \leq k$. Če je $r_{j-1} - r_j > 0$, potem definirajmo še

$$C_{j,s} = \sum_{n=(s-1)j+1}^{sj} E_{n,n+j-1} \quad \text{za } 1 \leq s \leq r_{j-1} - r_j. \quad (2.3.3)$$

Za $2 \leq j \leq k$, $r_{j-1} - r_j > 0$ in $1 \leq s \leq r_{j-1} - r_j$ so $C_{j,s}$ matrike ranga j , ki imajo neničelne koeficiente le na $(j-1)$ -ti naddiagonali. Podobno so za $1 \leq s \leq r_k$ matrike $C_{k+1,s}$ ranga $k+1$ in imajo neničelne koeficiente le na glavni diagonali. Naj bo $\mathcal{T}$ linearen podprostor algebre $\mathbb{M}_N$, napet na matrike (2.3.2) in (2.3.3). Ker so omenjene matrike linearno neodvisne, sledi $\dim \mathcal{T} = r_1$. Sedaj definirajmo $\mathcal{S} = \mathcal{T}^\perp$, torej je $\dim \mathcal{S} = N^2 - r_1$. Ker prostor $\mathcal{T}$ ne vsebuje elementov ranga 1, dobimo še $\text{Ref } \mathcal{S} = \mathbb{M}_N$, zato velja $\text{rd } \mathcal{S} = r_1$. Naj bo $2 \leq j \leq k$. Iz strukture prostora $\mathcal{T} = \mathcal{S}_\perp$ sledi $\dim(\text{Lin}(\mathcal{S}_\perp \cap \mathcal{F}_j(\mathbb{C}^N))) = r_1 - r_j$. To pa pomeni, da je $\dim \text{Ref}_j \mathcal{S} = N^2 + r_j - r_1$ in da velja $\text{rd}_j \mathcal{S} = r_j$. Naj bo sedaj $j \geq k+1$. Ker je $\mathcal{S}_\perp \cap \mathcal{F}_j(\mathbb{C}^N) = \mathcal{S}_\perp$, dobimo $\text{Ref}_j \mathcal{S} = \mathcal{S}$ ter $\text{rd}_j \mathcal{S} = 0$ za vse $j \geq k+1$, kar zaključuje dokaz. $\square$

2.4 Splošni primer zaporedja

Naj bo sedaj zaporedje $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq 0$ kot v Vprašanju 2.2.1. Očitno obstaja takšno naravno število k , da je $r_k = r_{k+1} = r_{k+n}$ za vse $n \in \mathbb{N}$, torej je zaporedje konstantno od k -tega člena dalje. Če je $r_j \neq 0$ za $j \geq k$, potem mora biti Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ v Vprašanju 2.2.1 neskončno razsežen. Oglejmo si najpreprostejši primer takšnega zaporedja, to je konstantno zaporedje pozitivnih naravnih števil.

Zgled 2.4.1. Naj bo r naravno število in naj bo $r_j = r$ za vse $j \in \mathbb{N}$. Če obstaja prostor operatorjev, ki zadošča pogojem Vprašanja 2.2.1, potem po Izreku 1.3.3 predanihnilator tega prostora ne more vsebovati nobenih operatorjev ranga $j \geq 2$. To pomeni, da so elementi predanihnilatorja lahko le operatorji ranga 1 ter operatorji s sledjo, ki so neskončnega ranga. Ker iskani prostor ne sme biti j -refleksiven za nobeno naravno število j , mora njegov predanihnilator vsebovati vsaj en tak operator neskončnega ranga. Naj bo $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ kompleten ortonormiran sistem v $\mathcal{H}$. Za $1 \leq j \leq r$ definirajmo

$$D_j = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \varphi_{n+j-1} \otimes \varphi_n.$$

Bralec lahko hitro preveri, da so $D_1, \dots, D_r$ operatorji s sledjo in neskončnega ranga. Naj bo $\mathcal{T} = \text{Lin}\{D_1, \dots, D_r\}$, torej je $\mathcal{T}$ r -razsežen podprostor algebre $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$. Če postavimo $\mathcal{S} = \mathcal{T}^\perp$, potem je $\mathcal{S}$ šibko* zaprt linearen podprostor algebre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ in velja $\mathcal{S}_\perp = \mathcal{T}$. Hitro lahko preverimo, da velja

$$\mathcal{S} = \left\{ A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \langle A \varphi_{n+j-1}, \varphi_n \rangle = 0 \text{ za } 1 \leq j \leq r, \right\}.$$

Z uporabo Izreka 1.3.3 dobimo $\text{Ref}_j \mathcal{S} = (\mathcal{T} \cap \mathcal{F}_j(\mathcal{H}))^\perp = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ za vse $j \in \mathbb{N}$. Po [12, Theorem 19.2] lahko algebro $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ identificiramo z dualom prostora $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$, zato po [11, Chapter III, Theorem 10.1] sledi $\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{S} = \mathcal{C}_1(\mathcal{H})^*/\mathcal{T}^\perp \cong \mathcal{T}^*$. Ker je $\mathcal{T}$ končno razsežen podprostor prostora $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$, velja

$$\text{rd}_j \mathcal{S} = \dim(\text{Ref}_j \mathcal{S}/\mathcal{S}) = \dim \mathcal{T}^* = \dim \mathcal{T} = r$$

za vse $j \in \mathbb{N}$. Torej prostor $\mathcal{S}$ zadošča zahtevam Vprašanja 2.2.1 za dano konstantno zaporedje.

Konstrukcija prostora v Zgledu 2.4.1 skupaj s Trditvijo 2.3.3 motivira naslednji izrek, ki poda pritrdilen odgovor na Vprašanje 2.2.1 v najbolj splošni situaciji.

Izrek 2.4.2. *Naj bo $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq 0$ zaporedje nenegativnih celih števil. Tedaj obstajata kompleksen Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ in zaprt linearen podprostor $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$, da velja $\text{rd}_k \mathcal{S} = r_k$ za vse $k \geq 1$.*

Dokaz. Po komentarju na začetku razdelka 2.2 lahko brez izgube splošnosti predpostavimo, da je dano zaporedje neničelno. Če obstaja takšno naravno število k , da je $r_k > 0$ in $r_j = 0$ za vse $j > k$, potem Trditev 2.3.3 zagotavlja obstoj ustreznega podprostora algebre kvadratnih kompleksnih matrik. Preostane nam torej primer, ko obstaja takšno naravno število k , da je $r_j = r_k > 0$ za vse $j \geq k$ in $r_{k-1} > r_k$. Naj bo $\mathcal{H}$ neskončno razsežen kompleksen separabilen Hilbertov prostor in naj bo $2 \leq j \leq k$. Če je $r_{j-1} - r_j > 0$, potem definirajmo

$$C_{j,s} = \sum_{n=(s-1)j+1}^{sj} \varphi_n \otimes \varphi_{n+j-1} \quad \text{za } 1 \leq s \leq r_{j-1} - r_j. \quad (2.4.1)$$

Za vse $j \in \{2, \dots, k\}$ so $C_{j,1}, C_{j,2}, \dots, C_{j,r_{j-1}-r_j}$ omejeni linearni operatorji ranga j na prostoru $\mathcal{H}$. Za $1 \leq j \leq r_k$ definirajmo še

$$D_j = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \varphi_{n+j-1} \otimes \varphi_n. \quad (2.4.2)$$

Tedaj so $D_1, D_2, \dots, D_{r_k}$ operatorji s sledjo neskončnega ranga. Če definiramo

$$\mathcal{T} = \text{Lin} \left\{ D_1, \dots, D_{r_k}, C_{j,1}, \dots, C_{j,r_{j-1}-r_j} : 2 \leq j \leq k \right\},$$

potem je $\mathcal{T}$ r_1 -razsežen zaprt linearen podprostor prostora $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$, ki nima nobenega elementa ranga 1. Opazimo lahko še, da za $2 \leq j \leq k$ velja $\dim(\text{Lin}(\mathcal{T} \cap \mathcal{F}_j(\mathcal{H}))) = r_1 - r_j$. Sedaj postavimo $\mathcal{S} = \mathcal{T}^\perp$, torej je $\mathcal{S}$ zaprt podprostor v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, za katerega velja $\mathcal{S}_\perp = \mathcal{T}$. Iz Izreka 1.3.3 sledi $\text{Ref } \mathcal{S} = (\mathcal{T} \cap \mathcal{F}_1(\mathcal{H}))^\perp = \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Kot v Zgledu 2.4.1 algebro $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ identificiramo z dualom prostora $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ in po [11, Chapter III, Theorem 10.1] dobimo $\text{Ref } \mathcal{S}/\mathcal{S} = \mathcal{C}_1(\mathcal{H})^*/\mathcal{T}^\perp \cong \mathcal{T}^*$. Od tod sledi $\text{rd } \mathcal{S} = \dim \mathcal{T}^* = \dim \mathcal{T} = r_1$. Hitro lahko preverimo, da velja

$$\mathcal{S} = \left\{ A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \langle A\varphi_{n+j-1}, \varphi_n \rangle = 0 \text{ za } 1 \leq j \leq r_k, \right. \\ \left. \sum_{n=(s-1)j+1}^{sj} \langle A\varphi_n, \varphi_{n+j-1} \rangle = 0 \text{ za } r_{j-1} - r_j > 0, 1 \leq s \leq r_{j-1} - r_j \text{ in } 2 \leq j \leq k \right\}. \quad (2.4.3)$$

Za poljuben operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ter $p, q \in \mathbb{N}$ definirajmo $a_{pq} = \langle A\varphi_p, \varphi_q \rangle$. Skladno s to oznako lahko v nadaljevanju operator A predstavimo z matriko $(a_{pq})_{p,q=1}^\infty$. Torej je

$$\mathcal{S} = \left\{ (a_{pq})_{p,q=1}^\infty \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} a_{n+j-1,n} = 0 \text{ za } 1 \leq j \leq r_k, \right. \\ \left. \sum_{n=(s-1)j+1}^{sj} a_{n,n+j-1} = 0 \text{ za } r_{j-1} - r_j > 0, 1 \leq s \leq r_{j-1} - r_j \text{ in } 2 \leq j \leq k \right\}.$$

Iz strukture predanihnilatorja sledi, da za $2 \leq j \leq k$ velja

$$\text{Ref}_j \mathcal{S} = (\text{Lin} \{ C_{i,1}, C_{i,2}, \dots, C_{i,r_{i-1}-r_i} : 2 \leq i \leq j \})^\perp.$$

Zato sledi

$$\text{Ref}_j \mathcal{S} = \left\{ (a_{pq})_{p,q=1}^\infty \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \sum_{n=(s-1)i+1}^{si} a_{n,n+i-1} = 0 \text{ za } r_{i-1} - r_i > 0, \right. \\ \left. 1 \leq s \leq r_{i-1} - r_i \text{ in } 2 \leq i \leq j \right\}. \quad (2.4.4)$$

Sedaj združimo (2.4.3) in (2.4.4) ter dobimo $\text{rd}_j \mathcal{S} = \dim(\text{Ref}_j \mathcal{S}/\mathcal{S}) = r_j$ za $2 \leq j \leq k$. Ker za vsak $j \geq k$ velja $\mathcal{T} \cap \mathcal{F}_j(\mathcal{H}) = \mathcal{T} \cap \mathcal{F}_k(\mathcal{H})$, sledi še $\text{Ref}_j \mathcal{S} = \text{Ref}_k \mathcal{S}$ in $\text{rd}_j \mathcal{S} = r_k$ za vse $j \geq k$. $\square$

Za konec si za boljšo predstavo, kakšen prostor konstruiramo v Izreku 2.4.2, oglejmo uporabo izreka na primeru nekonstantnega neskončnega zaporedja naravnih števil.

Zgled 2.4.3. Dano je zaporedje $r_1 = 4$, $r_2 = r_3 = 2$ in $r_j = 1$ za vse $j \geq 4$. Skladno z oznakami v Izreku 2.4.2 definirajmo operatorje

$$\begin{aligned} C_{2,1} &= \varphi_1 \otimes \varphi_2 + \varphi_2 \otimes \varphi_3, \\ C_{2,2} &= \varphi_3 \otimes \varphi_4 + \varphi_4 \otimes \varphi_5, \\ C_{4,1} &= \varphi_1 \otimes \varphi_4 + \varphi_2 \otimes \varphi_5 + \varphi_3 \otimes \varphi_6 + \varphi_4 \otimes \varphi_7, \\ D_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \varphi_n \otimes \varphi_n. \end{aligned}$$

Opazimo, da velja $r_2 - r_3 = 0$, zato operatorji tipa $C_{3,s}$ ne nastopajo. Kot v izreku, postavimo $\mathcal{T} = \text{Lin}\{C_{2,1}, C_{2,2}, C_{4,1}, D_1\}$, torej je

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & 0 & t_4 & & & & \\ & \frac{t_1}{4} & t_2 & 0 & t_4 & & & \\ & & \frac{t_1}{9} & t_3 & 0 & t_4 & & \\ & & & \frac{t_1}{16} & t_3 & 0 & t_4 & \\ & & & & \frac{t_1}{25} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} : t_1, \dots, t_4 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Po dokazu v Izreku 2.4.2 je prostor, ki zadošča predpostavkam Vprašanja 2.2.1, tedaj enak $\mathcal{S} = \mathcal{T}^\perp$ oziroma, v matrični predstavitvi,

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} & -b_1 & * & -\sum_{n=1}^3 c_n & * & * & \dots & \dots & \dots \\ * & a_1 & b_1 & * & c_1 & * & & & \\ * & * & a_2 & -b_2 & * & c_2 & \ddots & & \\ * & & * & a_3 & b_2 & * & c_3 & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & a_4 & * & * & * & \ddots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} : a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C} \right\}.$$

Oznaka $*$ v zgornjem zapisu pomeni, da je dani koeficient poljubno kompleksno število. Očitno prostor $\mathcal{S}$ ne vsebuje elementov ranga 1, zato po Izreku 1.3.3 velja $\text{Ref } \mathcal{S} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ in posledično iz strukture prostora $\mathcal{S}$ razberemo, da velja $\text{rd } \mathcal{S} = 4$. Ker je $\text{Ref}_2 \mathcal{S} = \text{Ref}_3 \mathcal{S} = (\text{Lin}\{C_{2,1}, C_{2,2}\})^\perp$, dobimo v matrični predstavitvi

$$\text{Ref}_2 \mathcal{S} = \text{Ref}_3 \mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} * & -b_1 & * & * & \dots & \dots & \dots \\ * & * & b_1 & * & & & \\ \vdots & & \ddots & -b_2 & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & b_2 & \ddots & \\ \vdots & & & & \ddots & * & \ddots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} : b_i \in \mathbb{C} \right\}.$$

Če primerjamo matrični predstavitvi prostorov $\mathcal{S}$ ter $\text{Ref}_2 \mathcal{S}$ oziroma $\text{Ref}_3 \mathcal{S}$, takoj opazimo,

da res velja $\text{rd}_2 \mathcal{S} = \text{rd}_3 \mathcal{S} = 2$. Za $j \geq 4$ velja $\text{Ref}_j \mathcal{S} = (\text{Lin}\{C_{2,1}, C_{2,2}, C_{4,1}\})^\perp$ oziroma

$$\text{Ref}_j \mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} * & -b_1 & * & -\sum_{n=1}^3 c_n & * & * & \dots & \dots & \dots \\ * & * & b_1 & * & c_1 & * & & & \\ \vdots & & \ddots & -b_2 & * & c_2 & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & b_2 & * & c_3 & \ddots & \\ \vdots & & & & \ddots & * & * & * & \ddots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} : b_i, c_i \in \mathbb{C} \right\},$$

zato po podobnem sklepu kot prej sledi še $\text{rd}_j \mathcal{S} = 1$ za vse $j \geq 4$.

Poglavje 3

Refleksivnostni defekt jedra in slike elementarnega operatorja

V tem poglavju obravnavamo refleksivnostni defekt jedra in slike elementarnega operatorja dolžine 2. Začnemo z najenostavnejšimi primeri tovrstnih elementarnih operatorjev, med drugim podamo eksplicitne formule za refleksivnostni defekt posplošenega odvajanja. V nadaljevanju obravnavamo elementarne operatorje dolžine 2 pod nekaterimi dodatnimi pogoji, kot so komutativnost, normalnost in pozitivna definitnost koeficientov. Z uporabo Kroneckerjeve kanonične forme singularnega matričnega šopa izpeljemo formulo za refleksivnostni defekt jedra poljubnega elementarnega operatorja dolžine 2, kar je glavni rezultat tega poglavja. Za konec obravnavamo še k -refleksivnostni defekt slik določenih primerov elementarnih operatorjev dolžine 2. Vse omenjene rezultate je mogoče posplošiti na primer pravokotnih kompleksnih matrik. Rezultati, predstavljeni v tem poglavju, povzemajo vsebino člankov [44, 45].

3.1 Elementarni operatorji

Naj bo $\mathcal{H}$ končno razsežen kompleksen Hilbertov prostor. Iz Trditve 2.1.3 sledi, da podobnostne transformacije ohranjajo k -refleksivnostni defekt, zato lahko brez izgube splošnosti predpostavimo, da je $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ za primerno naravno število n . Torej lahko prostor $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ identificiramo z $\mathbb{M}_n$, algebro vseh kompleksnih $n \times n$ matrik.

Definicija 3.1.1. Naj bosta k in n naravni števili. Pravimo, da je k -terica kompleksnih $n \times n$ matrik $(A_1, \dots, A_k)$ *komutativna*, če matrike v k -terici paroma komutirajo.

Definicija 3.1.2. Naj bosta $(A_1, \dots, A_k)$ in $(B_1, \dots, B_k)$ poljubni k -terici kompleksnih $n \times n$ matrik. *Elementarni operator* na $\mathbb{M}_n$ s koeficienti $(A_1, \dots, A_k)$ in $(B_1, \dots, B_k)$ je definiran s predpisom

$$\Delta(T) = A_1TB_1 + \dots + A_kTB_k, \quad T \in \mathbb{M}_n. \quad (3.1.1)$$

Naj bodo vse matrike v k -terici $(A_1, \dots, A_k)$ paroma linearno neodvisne. Podobno, naj bodo vse matrike v k -terici $(B_1, \dots, B_k)$ paroma linearno neodvisne. Tedaj operator Δ , ki je oblike kot v (3.1.1), imenujemo *elementarni operator dolžine k* .

Izkaže se, da je j -refleksivnostni defekt jedra elementarnega operatorja dolžine k enak 0, če je j dovolj velik. Naslednja trditev je navedena in dokazana v [8, Proposition 1.1].

Trditev 3.1.3. *Jedro operatorja Δ , definirane kot v (3.1.1), je k -refleksiven podprostor algebre $\mathbb{M}_n$, torej je $\text{rd}_j(\ker \Delta) = 0$ za vsa naravna števila $j \geq k$.*

Naj bosta p in q naravni števili in naj $\mathbb{M}_{p,q}$ označuje prostor vseh kompleksnih $p \times q$ matrik. V tem poglavju se večkrat srečamo s podprostorji $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{M}_n$ oblike

$$\mathcal{S} = \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_{11} & \dots & \mathcal{S}_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{S}_{M1} & \dots & \mathcal{S}_{MN} \end{array} \right),$$

kjer je $\mathcal{S}_{ij}$ podprostor $\mathbb{M}_{m_i, n_j}$ za vsak par indeksov (i, j) in $\sum_{i=1}^M m_i = \sum_{j=1}^N n_j = n$. V veliko pomoč pri obravnavi tovrstnih prostorov nam bo Izrek 2.1.5, ki opiše strukturo $\text{Ref}_k \mathcal{S}$ in pove, da velja $\text{rd}_k(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \text{rd}_k(\mathcal{S}_{ij})$.

Naj bo $S \in \mathbb{M}_n$ ter $S^\top$ njena transponiranka. Za dani podprostor $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{M}_n$ definirajmo prostor $\mathcal{S}^\top = \{S^\top : S \in \mathcal{S}\}$. Podobno kot v Trditvi 2.1.2 velja, da transformacije tipa $\mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}^\top$ ohranjajo k -refleksivnostni defekt danega prostora $\mathcal{S}$. Slednje dejstvo bo skupaj s Trditvijo 2.1.3 eno izmed glavnih orodij v tem poglavju.

3.2 Elementarni operatorji dolžine 2

Naj bosta (A_1, A_2) in (B_1, B_2) poljubna para kompleksnih $n \times n$ matrik. Naj bo Δ elementarni operator oblike

$$\Delta(T) = A_1 T B_1 - A_2 T B_2, \quad T \in \mathbb{M}_n. \quad (3.2.1)$$

Po Trditvi 3.1.3 je jedro operatorja Δ 2-refleksiven podprostor algebre $\mathbb{M}_n$, torej velja $\text{rd}_k(\ker \Delta) = 0$ za vse $k \geq 2$. Zato je smiselno vprašati, ali je mogoče določiti $\text{rd}(\ker \Delta)$. V nadaljevanju nas torej zanima refleksivnostni defekt poljubnega elementarnega operatorja dolžine 2, to je, linearne transformacije na $\mathbb{M}_n$ oblike $\Delta(T) = A_1 T B_1 - A_2 T B_2$, kjer sta (A_1, A_2) in (B_1, B_2) para linearne neodvisnih matrik. To pomeni, da sta matriki A_1 in A_2 med seboj linearne neodvisni, prav tako pa sta linearne neodvisni tudi matriki B_1 in B_2 . Torej operatorja Δ ne moremo zapisati kot dvostranskega množenja.

Naj p_T in m_T zaporedoma označujeta karakteristični in minimalni polinom dane matrike $T \in \mathbb{M}_n$. Za poljubni matriki $A, B \in \mathbb{M}_n$ definiramo posplošeno odvajanje na $\mathbb{M}_n$ s koeficientoma A in B s predpisom

$$\Delta(T) = AT - TB, \quad T \in \mathbb{M}_n. \quad (3.2.2)$$

Šulman [48] je dokazal, da je jedro posplošenega odvajanja Δ refleksivno, če sta A in B normalni matriki. Zajac [52, Corollary 3.4] je omenjeni rezultat posplošil do izreka, ki pravi, da je $\ker \Delta$ refleksiven prostor natanko tedaj, ko so vse ničle največjega skupnega delitelja minimalnih polinomov m_A in m_B enostavne. V nadaljevanju dobimo še splošnejši rezultat, pri čemer se v veliki meri naslonimo na rezultate Bračiča in Kuzme v [9] ter na rezultate Zajaca v [53].

Naj bosta A in B kompleksni $n \times n$ matriki. Naj bo $J_{p_1}(\lambda_1) \oplus \dots \oplus J_{p_N}(\lambda_N)$ Jordanova kanonična forma matrike A , kjer je $\sum_{i=1}^N p_i = n$ in so $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ ne nujno različne lastne vrednosti matrike A . Podobno, naj bo $J_{r_1}(\mu_1) \oplus \dots \oplus J_{r_M}(\mu_M)$ Jordanova kanonična forma matrike B , kjer je $\sum_{i=1}^M r_i = n$ in so $\mu_1, \dots, \mu_M$ ne nujno različne lastne vrednosti matrike B . Naj bo $R(i, j)$ nenegativno celo število, definirano s predpisom

$$R(i, j) = \begin{cases} \frac{1}{2} \min\{p_i, r_j\} (\min\{p_i, r_j\} - 1) & : \lambda_i = \mu_j, \\ 0 & : \text{sicer.} \end{cases}$$

Trditve 3.2.1. Naj bodo $A, B \in \mathbb{M}_n$ ter $R(i, j)$ kot zgoraj. Naj bo $\Delta(T) = AT - TB$ posplošeno odvajanje na $\mathbb{M}_n$. Potem je refleksivnostni defekt prostora $\ker \Delta$ enak

$$\text{rd}(\ker \Delta) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M R(i, j).$$

V posebnem, $\ker \Delta$ je refleksiven prostor natanko tedaj, ko so vse ničle največjega skupnega delitelja minimalnih polinomov m_A in m_B enostavne.

Dokaz. Po Trditvi 2.1.3 podobnostne transformacije ohranjajo refleksivnostni defekt, zato lahko brez izgube splošnosti predpostavimo, da velja

$$\ker \Delta = \left\{ \begin{pmatrix} T_{11} & \dots & T_{1M} \\ \vdots & & \vdots \\ T_{N1} & \dots & T_{NM} \end{pmatrix} : T_{ij} \in \mathbb{M}_{p_i, r_j}, \quad J_{p_i}(\lambda_i)T_{ij} = T_{ij}J_{r_j}(\mu_j) \right\}.$$

Za $T \in \mathbb{M}_{p_i, r_j}$ definirajmo $\Delta_{p_i, r_j}(T) = J_{p_i}(\lambda_i)T - TJ_{r_j}(\mu_j)$. Po Izreku 2.1.5 zadošča določiti $\text{rd}(\ker \Delta_{p_i, r_j})$. Če je $\lambda_i \neq \mu_j$, potem po [35, Theorem 4] sledi, da je Δ_{p_i, r_j} bijekcija, torej je $\ker \Delta_{p_i, r_j}$ refleksiven prostor. Če je $\lambda_i = \mu_j$, potem iz [9, Lemma 4.5, Lemma 4.6] sledi $\text{rd}(\ker \Delta_{p_i, r_j}) = \frac{1}{2} \min\{p_i, r_j\} (\min\{p_i, r_j\} - 1)$. Torej je $\text{rd}(\ker \Delta_{p_i, r_j}) = R(i, j)$, kar zaključuje dokaz. $\square$

S pomočjo Trditve 3.2.1 lahko natančno določimo refleksivnostni defekt jedra naslednjega elementarnega operatorja.

Trditve 3.2.2. Naj bosta matriki $A, B \in \mathbb{M}_n$ oblike kot pred Trditvijo 3.2.1 in naj bo Δ elementarni operator na $\mathbb{M}_n$, podan s predpisom $\Delta(T) = ATB - T$ za $T \in \mathbb{M}_n$. Če $1 \notin \sigma(A)\sigma(B) = \{\lambda_i \mu_j : \lambda_i \in \sigma(A), \mu_j \in \sigma(B)\}$, potem je $\ker \Delta$ refleksiven prostor. Sicer velja

$$\text{rd}(\ker \Delta) = \sum_{\lambda_i \mu_j = 1} \frac{1}{2} \min\{p_i, r_j\} (\min\{p_i, r_j\} - 1).$$

Dokaz. Naj bo s predpisom $\Delta_{ij}(T) = J_{p_i}(\lambda_i)TJ_{r_j}(\mu_j) - T$ podan elementarni operator, ki deluje na prostoru $\mathbb{M}_{p_i, r_j}$. Matriki A in B sta zaporedoma podobni $J_{p_1}(\lambda_1) \oplus \dots \oplus J_{p_N}(\lambda_N)$ in $J_{r_1}(\mu_1) \oplus \dots \oplus J_{r_M}(\mu_M)$, zato po Izreku 2.1.5 sledi $\text{rd}(\ker \Delta) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \text{rd}(\ker \Delta_{ij})$. Če T zadošča enačbi $J_{p_i}(\lambda_i)TJ_{r_j}(\mu_j) = T$, je T lastni vektor Kroneckerjevega produkta $J_{r_j}(\mu_j)^\top \otimes J_{p_i}(\lambda_i)$ pri lastni vrednosti 1. Po [24, Theorem 4.2.12] velja $\sigma(J_{r_j}(\mu_j)^\top \otimes J_{p_i}(\lambda_i)) = \{\lambda_i \mu_j\}$, zato lahko v primeru $\lambda_i \mu_j \neq 1$ sklepamo, da je $\ker \Delta_{ij} = \{0\}$. V nasprotnem, torej če je $\lambda_i \mu_j = 1$, sta $J_{p_i}(\lambda_i)$ in $J_{r_j}(\mu_j)$ obrnljivi matriki in velja $\ker \Delta_{ij} = \ker \tilde{\Delta}_{ij}$, kjer je $\tilde{\Delta}_{ij}$ posplošeno odvajanje oblike $\tilde{\Delta}_{ij}(T) = J_{p_i}(\lambda_i)T - TJ_{r_j}(\mu_j)^{-1}$. Z uporabo [24, Example 6.2.13] je enostavno videti, da invertiranje matrik ohranja velikost Jordanovih kletk. Želeni sklep sedaj sledi iz Trditve 3.2.1. $\square$

Naj bosta (A_1, A_2) in (B_1, B_2) para linearno neodvisnih kompleksnih $n \times n$ matrik in naj bo $\Delta(T) = A_1TB_1 - A_2TB_2$ elementarni operator na $\mathbb{M}_n$. V nadaljevanju obravnavamo refleksivnost prostora $\ker \Delta$ pri nekaterih dodatnih predpostavkah na koeficiente operatorja Δ . Če sta (A_1, A_2) in (B_1, B_2) komutativna para matrik in velja $\sigma(A_1)\sigma(B_1) \cap \sigma(A_2)\sigma(B_2) = \emptyset$, potem je po [35, Theorem 4] operator Δ bijekcija, torej je $\ker \Delta$ trivialen in posledično refleksiven prostor. Prav tako je $\ker \Delta$ refleksiven podprostor, če sta (A_1, A_2) in (B_1, B_2) komutativna para normalnih matrik. To je posledica dejstva, da je komutirajoča družina normalnih matrik simultano unitarno diagonalizabilna [23, Theorem 2.5.5]. V nadaljevanju je predpostavka o komutativnosti nadomeščena z drugo predpostavko.

Trditev 3.2.3. *Naj bodo $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbb{M}_n$ hermitske matrike in naj bo $\Delta(T) = A_1TB_1 - A_2TB_2$ elementarni operator na $\mathbb{M}_n$. Če je vsaj ena izmed matrik A_1, A_2 in vsaj ena izmed matrik B_1, B_2 pozitivno definitna, potem je $\ker \Delta$ refleksiven prostor.*

Dokaz. Če je (A_1, B_1) par pozitivno definitnih matrik, potem je $\ker \Delta = \ker \tilde{\Delta}$, kjer je $\tilde{\Delta}(T) = A_1^{-1}A_2TB_2B_1^{-1} - T$. Po [23, Theorem 7.6.3] sta oba matrična koeficienta diagonalizabilna, zato je po Trditvi 3.2.2 $\ker \Delta$ refleksiven prostor. Podobno, če je (A_1, B_2) par pozitivno definitnih matrik, potem je $\ker \Delta = \ker \tilde{\Delta}$, kjer je $\tilde{\Delta}(T) = A_1^{-1}A_2T - TB_1B_2^{-1}$. Kot prej, iz [23, Theorem 7.6.3] in Trditve 3.2.1 sledi, da je $\ker \Delta$ refleksiven. Dokaz v preostalih dveh primerih je podoben. $\square$

V nadaljevanju predstavimo pomožni rezultat, ki ga bomo kasneje večkrat uporabili. Najprej vpeljimo nekaj oznak. Naj bosta m in n naravni števili. Naj $\mathcal{T}(m, n)$ označuje prostor vseh $m \times n$ kompleksnih Toeplitzovih matrik in naj $\mathcal{T}_U(n)$ označuje algebro vseh zgornje trikotnih kompleksnih Toeplitzovih $n \times n$ matrik. Za $m \leq n$ definirajmo naslednja podprostor v $\mathbb{M}_{m, n}$

$$\mathcal{A}(m, n) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & \dots & \dots & \dots & a_n \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & a_1 & \dots & a_{n-m+1} \end{pmatrix} : a_i \in \mathbb{C} \right\},$$

$$\mathcal{B}(m, n) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{n-m+1} & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & a_1 & \dots & a_{n-m+1} \end{pmatrix} : a_i \in \mathbb{C} \right\}.$$

Trditev 3.2.4. *Naj bosta m in n naravni števili. Tedaj velja sledeče.*

- (i) *Za $m \leq n$ je $\text{rd}(\mathcal{A}(m, n)) = (m-1)(n - \frac{1}{2}m)$, $\mathcal{B}(m, n)$ pa je refleksiven prostor.*
- (ii) *Velja $\text{rd}(\mathcal{T}_U(n)) = \frac{1}{2}n(n-1)$.*
- (iii) *Velja $\text{rd}(\mathcal{T}(m, n)) = (m-1)(n-1)$. V posebnem, če je $m = 1$ ali $n = 1$, potem je prostor $\mathcal{T}(m, n)$ refleksiven, sicer pa velja $\text{Ref } \mathcal{T}(m, n) = \mathbb{M}_{m, n}$.*

Dokaz. Najprej dokažimo (i). Naj bosta $m \leq n$ naravni števili. Opazimo lahko, da velja $\text{rd}(\mathcal{A}(m, n)) = \text{rd}(\mathcal{A}^\top(m, n))$, kjer je $\mathcal{A}^\top(m, n) = \{S^\top : S \in \mathcal{A}(m, n)\}$. Določanje refleksivnega pokritja slednjega prostora je ekvivalentno reševanju sistema linearnih enačb, v katerem lahko neznanke izrazimo zaporedoma. Od tod je enostavno videti, da velja

$$\text{Ref } \mathcal{A}(m, n) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & a_{mm} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{C}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \right\}.$$

Ker je $\dim(\mathcal{A}(m, n)) = n$ in $\dim(\text{Ref}(\mathcal{A}(m, n))) = m(n - \frac{1}{2}(m-1))$, dobimo $\text{rd}(\mathcal{A}(m, n)) = (n - \frac{1}{2}m)(m-1)$. Meshulam in Šemrl [37] sta dokazala, da je d -razsežen prostor operatorjev refleksiven, če so vsi neničelni elementi tega prostora ranga vsaj $d+1$ ter je dani komutativni obseg algebraično zaprt. Bralec lahko hitro preveri, da je $\dim(\mathcal{B}(m, n)) = n - m + 1$ ter da je vsak neničeln operator v $\mathcal{B}(m, n)$ ranga m . Po [37, Theorem 1.1] je tedaj za $n \leq 2(m-1)$ prostor $\mathcal{B}(m, n)$ refleksiven. Sedaj predpostavimo, da je $n > 2(m-1)$. Iz strukture prostora

$\mathcal{B}(m, n)$ sledi, da morajo imeti elementi $\text{Ref } \mathcal{B}(m, n)$ ničle na istih mestih kot elementi prostora $\mathcal{B}(m, n)$, to je,

$$\text{Ref } \mathcal{B}(m, n) = \left\{ \begin{pmatrix} * & \dots & * & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & * & \dots & * \end{pmatrix} : * \text{ neničelni koeficient} \right\}.$$

Naj bo $B \in \text{Ref } \mathcal{B}(m, n)$. Po prejšnji ugotovitvi lahko predpostavimo, da velja

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1, n-m+1} & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & b_{mm} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

za neka kompleksna števila b_{ij} . Naj bo $t \in \mathbb{C}$ neničelni skalar in definirajmo vektor $x = \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & t^{n-1} \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{M}_{n,1}$. Po definiciji prostora $\text{Ref } \mathcal{B}(m, n)$ obstaja matrika $S \in \mathcal{B}(m, n)$ oblike

$$S = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{n-m+1} & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & a_1 & \dots & a_{n-m+1} \end{pmatrix},$$

za katero velja $Bx = Sx$. Od tod dobimo naslednji sistem m enačb

$$\sum_{j=0}^{n-m} b_{k,k+j} t^j = \sum_{j=0}^{n-m} a_{j+1} t^j \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Prvo enačbo odštejemo od preostalih, pa dobimo sistem enačb

$$\sum_{j=0}^{n-m} (b_{k,k+j} - b_{1,1+j}) t^j = 0 \quad (k = 2, \dots, m).$$

Ker je bil t poljuben neničelni skalar, sledi $b_{k,k+j} = b_{1,1+j}$ za vse $2 \leq k \leq m$ in vse $0 \leq j \leq n-m$, torej je $B \in \mathcal{B}(m, n)$. Opazimo, da ta ta dokaz deluje ne le za $n > 2(m-1)$, temveč tudi za $n \geq m$. Točka (ii) je znano dejstvo, sledi pa tudi iz točke (i), saj je $\mathcal{A}(n, n) = \mathcal{T}_U(n)$. Točka (iii) je posledica dejstva, da refleksivno pokritje spoštuje relacijo vsebovanosti, t.j., če velja $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_2$, potem je $\text{Ref } \mathcal{S}_1 \subseteq \text{Ref } \mathcal{S}_2$. $\square$

Naj bo $k \in \mathbb{N}$ in naj I_k označuje identično $k \times k$ matriko, P_k pa standardno involutorično permutacijsko $k \times k$ matriko, t.j.,

$$I_k = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad P_k = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_k.$$

Oglejmo si naslednji zgled.

Zgled 3.2.5. Naj bo Δ linearna transformacija na $\mathbb{M}_n$ oblike $\Delta(T) = A_1 T B_1 - A_2 T B_2$, kjer so $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \{J_n(0), J_n(0)^\top, I_n\}$. Zanimali nas bodo le primeri, ko je transformacija Δ elementarni operator dolžine 2 s koeficienti v množici $\{J_n(0), J_n(0)^\top, I_n\}$. Hitro lahko preverimo, da ima jedro takšnega elementarnega operatorja enak refleksivnostni defekt kot jedro ene izmed naslednjih linearnih transformacij na algebri $\mathbb{M}_n$

$$\begin{aligned} \Delta_1(T) &= J_n(0)T - TJ_n(0), & \Delta_2(T) &= J_n(0)TJ_n(0) - T, \\ \Delta_3(T) &= J_n(0)^\top T J_n(0) - J_n(0)T, & \Delta_4(T) &= J_n(0)TJ_n(0)^\top - J_n(0)^\top T J_n(0). \end{aligned}$$

Za ponazoritev si oglejmo jedro elementarnega operatorja $\tilde{\Delta}(T) = J_n(0)^\top T J_n(0)^\top - T J_n(0)$. Z uporabo transponiranja in množenja z obrnljivimi matrikami bomo dokazali, da velja $\text{rd}(\ker \tilde{\Delta}) = \text{rd}(\ker \Delta_3)$. Zadošča videti, da je $T \in \ker \Delta_3$ natanko tedaj, ko je $T^\top P_n \in \ker \tilde{\Delta}$. V ta namen transponirajmo enakost $J_n(0)^\top T J_n(0) = J_n(0)T$ in dobljeno na desni množimo z matriko P_n , da dobimo enakost $J_n(0)^\top T^\top J_n(0)P_n = T^\top J_n(0)^\top P_n$. Ker velja $P_n^2 = I_n$ in $J_n(0)^\top = P_n J_n(0) P_n$, sledi $J_n(0)^\top (T^\top P_n) J_n(0)^\top = (T^\top P_n) J_n(0)$, torej je $T^\top P_n \in \ker \tilde{\Delta}$. Po predhodni diskusiji zadošča določiti $\text{rd}(\ker \Delta_i)$ za $i = 1, 2, 3, 4$. Za dani podprostor $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{M}_{p,r}$ definirajmo $\mathcal{S} \oplus 0_{i,j} = \{S \oplus 0_{i,j} : S \in \mathcal{S}\} \subseteq \mathbb{M}_{p+i,r+j}$. Iz Trditve 3.2.1 sledi $\text{rd}(\ker \Delta_1) = \frac{1}{2}n(n-1)$, iz Trditve 3.2.2 pa $\text{rd}(\ker \Delta_2) = 0$. Večina izračunov v nadaljevanju je bila izvedenih s pomočjo programa WOLFRAM MATHEMATICA. Če je $n = 2l$ za neko naravno število l , potem so elementi $\ker \Delta_3$ matrike oblike $\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_{2l} \end{pmatrix}^\top$, kjer so za $1 \leq i \leq 2l$ vrstice $A_i \in \mathbb{M}_{1,2l}$ oblike

$$A_i = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 & \dots & a_{l-j+1} \end{pmatrix} & : i = 2j - 1, j \in \{1, \dots, l\}, \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & : i = 2j, j \in \{1, \dots, l\}. \end{cases}$$

Lahko je videti, da je v tem primeru prostor $\ker \Delta_3$ podoben prostoru $\mathcal{T}_U(l) \oplus 0_{l,l}$. Dalje, če je $n = 2l + 1$ za neko naravno število l , potem so elementi $\ker \Delta_3$ matrike oblike $\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_{2l+1} \end{pmatrix}^\top$, kjer so za $1 \leq i \leq 2l + 1$ vrstice $A_i \in \mathbb{M}_{1,2l+1}$ oblike

$$A_i = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 & \dots & a_{2l-j+2} \end{pmatrix} & : i = 2j - 1, j \in \{1, \dots, l + 1\}, \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & : i = 2j, j \in \{1, \dots, l\}. \end{cases}$$

V tem primeru je prostor $\ker \Delta_3$ podoben prostoru $\mathcal{A}(l + 1, 2l + 1)$.

Sedaj si oglejmo še $\ker \Delta_4$. Strukturo tega prostora bomo podali tako, da bomo opisali glavno diagonalo ter vse nad- in poddiagonale njegovih elementov. Za dano matriko $T \in \mathbb{M}_n$ označimo z $D(T)$ vrstico, ki predstavlja glavno diagonalo matrike T . Podobno označimo z $D_i^U(T)$ vrstico, ki predstavlja i -to naddiagonalo matrike T in z $D_i^L(T)$ vrstico, ki predstavlja i -to poddiagonalo matrike T . Naj bo $T \in \ker \Delta_4$. Če je $n = 2l$ za neko naravno število l , potem je $D(T) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ in za $i = 1, \dots, 2l - 1$ dobimo

$$\begin{aligned} D_i^U(T) &= \begin{cases} \begin{pmatrix} a_j & 0 & a_j & 0 & \dots & a_j \end{pmatrix} & : i = 2j - 1, j \in \{1, \dots, l\}, \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & : i = 2j, j \in \{1, \dots, l - 1\}, \end{cases} \\ D_i^L(T) &= \begin{cases} \begin{pmatrix} a_{l+j} & 0 & a_{l+j} & 0 & \dots & a_{l+j} \end{pmatrix} & : i = 2j - 1, j \in \{1, \dots, l\}, \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & : i = 2j, j \in \{1, \dots, l - 1\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Bralec lahko hitro preveri, da je v tem primeru prostor $\ker \Delta_4$ podoben prostoru $\mathcal{T}_U(l) \oplus \mathcal{T}_U(l)$. Če je $n = 2l + 1$ za neko naravno število l , potem dobimo $D(T) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_1 & 0 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$ in za $1 \leq i \leq 2l$ velja

$$\begin{aligned} D_i^U(T) &= \begin{cases} \begin{pmatrix} a_{j+1} & 0 & a_{j+1} & 0 & \dots & a_{j+1} \end{pmatrix} & : i = 2j, j \in \{1, \dots, l\}, \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & : i = 2j - 1, j \in \{1, \dots, l\}, \end{cases} \\ D_i^L(T) &= \begin{cases} \begin{pmatrix} a_{l+j+1} & 0 & a_{l+j+1} & 0 & \dots & a_{l+j+1} \end{pmatrix} & : i = 2j, j \in \{1, \dots, l\}, \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & : i = 2j - 1, j \in \{1, \dots, l\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Od tod hitro sledi, da je v slednjem primeru prostor $\ker \Delta_4$ podoben prostoru $\mathcal{T}(l+1, l+1) \oplus 0_{l,l}$. Po Trditvi 3.2.4 tedaj sledi

$$\text{rd}(\ker \Delta_3) = \begin{cases} \frac{1}{2}l(l-1) & : n = 2l, l \in \mathbb{N}, \\ \frac{1}{2}l(3l+1) & : n = 2l+1, l \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

in

$$\text{rd}(\ker \Delta_4) = \begin{cases} l(l-1) & : n = 2l, l \in \mathbb{N}, \\ l^2 & : n = 2l+1, l \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

3.3 Linearni matrični šopi in Kroneckerjeva forma

Naj bosta (A_1, A_2) in (B_1, B_2) para linearno neodvisnih matrik in naj bo $\Delta(T) = A_1TB_1 - A_2TB_2$ elementarni operator na $\mathbb{M}_n$. Opazimo, da lahko glede na obrnljivost koeficientov transformacije Δ včasih prevedemo problem določanja $\text{rd}(\ker \Delta)$ na takšnega, ki ga že znamo rešiti. Na primer, če sta A_1 in B_2 obrnljivi matriki, potem je $\ker \Delta$ enako jedru posplošenega odvajanja $T \mapsto TB_1B_2^{-1} - A_1^{-1}A_2T$, torej lahko refleksivnostni defekt določimo s pomočjo Trditve 3.2.1. Vendar v splošnem Jordanove strukture produkta matrik ne moremo dobiti iz Jordanove strukture posameznih faktorjev, zato na ta način ni moč dobiti neke splošne formule za refleksivnostni defekt jedra elementarnega operatorja dolžine 2. Še več, elementarni operatorji, ki smo jih obravnavali v razdelku 3.2, so imeli največ dva koeficienta različna od identične matrike, parametri, ki so nastopali v formulah za refleksivnostni defekt v omenjenem razdelku, pa so bile zgolj ustrezne velikosti Jordanovih kletk teh koeficientov. Da dobimo eksplisitne formule za refleksivnostni defekt jedra operatorja Δ , uporabimo teorijo linearnih matričnih šopov. Ker se ukvarjamo s pari matrik in njihovimi kanoničnimi formami, se v formulah za refleksivnostni defekt pojavijo dodatni parametri poleg že omenjenih velikosti Jordanovih kletk. Za začetek si oglejmo nekaj osnovnih definicij, več o matričnih šopih pa lahko bralec najde v [22, Chapter XII].

Definicija 3.3.1. Naj bodo A_1, A_2, B_1, B_2 kompleksne $n \times m$ matrike. Pravimo, da sta matrična šopa $A_1 + \lambda B_1$ in $A_2 + \lambda B_2$ *strogo ekvivalentna*, če obstajata obrnljivi matriki $P \in \mathbb{M}_n$ in $Q \in \mathbb{M}_m$, za kateri velja $P(A_1 + \lambda B_1)Q = A_2 + \lambda B_2$. Z drugimi besedami, matrična šopa $A_1 + \lambda B_1$ in $A_2 + \lambda B_2$ sta strogo ekvivalentna, če velja $PA_1Q = A_2$ in $PB_1Q = B_2$ za neki obrnljivi matriki $P \in \mathbb{M}_n$ in $Q \in \mathbb{M}_m$.

Definicija 3.3.2. Naj bosta $A, B \in \mathbb{M}_{n,m}$. Matrični šop $A + \lambda B$ je *regularen*, če sta A in B kvadratni matriki in $\det(A + \lambda B)$ ni identično enaka 0. Če je $n \neq m$ ali pa je $m = n$ in je $\det(A + \lambda B)$ identično enaka 0, potem je matrični šop *singularen*.

Naj bosta $A, B \in \mathbb{M}_n$ matriki in naj bo $A + \lambda B$ regularen matrični šop. V nadaljevanju bomo določili t.i. končne in neskončne elementarne delitelje šopa $A + \lambda B$. Za začetek matrični šop $A + \lambda B$ podamo s homogenima parametroma λ in μ , torej kot $\mu A + \lambda B$. Tedaj je $\det(\mu A + \lambda B)$ homogena funkcija parametrov λ in μ . Za $1 \leq k \leq n$ določimo *determinantni faktor reda k*, to je največji skupni delitelj vseh minorjev reda k , ki pripadajo matričnemu šopu $\mu A + \lambda B$; označimo ga $D_k(\lambda, \mu)$. Postavimo še $D_0(\lambda, \mu) = 1$. Od tod dobimo *homogene invariantne faktorje* šopa $\mu A + \lambda B$ na sledeči način

$$i_1(\lambda, \mu) = \frac{D_n(\lambda, \mu)}{D_{n-1}(\lambda, \mu)}, \quad i_2(\lambda, \mu) = \frac{D_{n-1}(\lambda, \mu)}{D_{n-2}(\lambda, \mu)}, \quad \dots, \quad i_{n-1} = \frac{D_2(\lambda, \mu)}{D_1(\lambda, \mu)},$$

$$i_n(\lambda, \mu) = D_1(\lambda, \mu).$$

Tako $D_k(\lambda, \mu)$ kot $i_l(\lambda, \mu)$ so homogeni polinomi parametrov λ in μ . Če invariantne faktorje razcepimo na potence linearnih homogenih polinomov, dobimo *elementarne delitelje* $e_j(\lambda, \mu)$ matričnega šopa $\mu A + \lambda B$ za $j \in \mathbb{N}$. Opazimo, da dobimo *elementarne delitelje* $e_j(\lambda)$ matričnega šopa $A + \lambda B$ tako, da izberemo $\mu = 1$. Hkrati pa lahko z uporabo formule $e_j(\lambda, \mu) = \mu^q e_j(\frac{\lambda}{\mu})$ iz elementarnega delitelja $e_j(\lambda)$ stopnje q dobimo ustrezen elementarni delitelj $e_j(\lambda, \mu)$. Torej je mogoče iz elementarnih deliteljev šopa $A + \lambda B$ dobiti vse elementarne delitelje šopa $\mu A + \lambda B$, z izjemo deliteljev oblike μ^q . Elementarni delitelji oblike μ^q obstajajo natanko tedaj, ko je $\det B = 0$ [22, vol. 2, pp. 27], imenujemo jih *neskončni elementarni delitelji* matričnega šopa $A + \lambda B$. Preostale elementarne delitelje imenujemo *končni elementarni delitelji*. Regularna matrična šopa sta strogo ekvivalentna natanko tedaj, ko imata enake končne in neskončne elementarne delitelje. Bralec lahko dokaz omenjenega dejstva najde v [22, Chapter XII, Theorem 2]. Za naravno število i definirajmo naslednji matriki

$$F_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{i,i+1}, \quad G_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{i,i+1}$$

in postavimo še $L_i = F_i + \lambda G_i$. Naslednji izrek predstavi *Kroneckerjevo kanonično formo* poljubnega matričnega šopa $A + \lambda B \in \mathbb{M}_{m,n}$. Izrek je povzet po [30, Theorem 3.1], bralec pa si dokaz lahko ogleda na primer v [22, Chapter XII]. Več o Kroneckerjevi kanonični formi je zapisano tudi v [20, Section 2] in [50, Section II].

Izrek 3.3.3 (Kroneckerjeva kanonična forma). *Matrični šop $A + \lambda B \in \mathbb{M}_{m,n}$ je strogo ekvivalenten matričnemu šopu*

$$0_{w,z} \oplus (L_{a_1} \oplus \dots \oplus L_{a_e}) \oplus (L_{b_1}^\top \oplus \dots \oplus L_{b_f}^\top) \quad (3.3.1)$$

$$\oplus ((I_{c_1} + \lambda J_{c_1}(0)) \oplus \dots \oplus (I_{c_g} + \lambda J_{c_g}(0))) \quad (3.3.2)$$

$$\oplus ((\lambda I_{d_1} + J_{d_1}(\alpha_1)) \oplus \dots \oplus (\lambda I_{d_h} + J_{d_h}(\alpha_h))). \quad (3.3.3)$$

Pri tem $0_{w,z}$ označuje ničelno $w \times z$ matriko, $a_1 \leq \dots \leq a_e$, $b_1 \leq \dots \leq b_f$, $c_1 \leq \dots \leq c_g$ in $d_1 \leq \dots \leq d_h$ pa so naravna števila. Zgornjo bločno diagonalno strukturo imenujemo *Kroneckerjeva kanonična forma matričnega šopa $A + \lambda B$* . Števila a_i , b_j in c_k so enolično določena z matrikama A in B . Prav tako je del (3.3.3) do permutacije diagonalnih blokov enolično določen z A in B .

Nekoliko komentirajmo Izrek 3.3.3. Bloki $0_{w,z}$, L_{a_i} in $L_{b_j}^\top$ vsebujejo singularnost šopa $A + \lambda B$. Pri tem je $w = \dim \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} \ker(A + \lambda B)$ in $z = \dim \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} \ker(A + \lambda B)$, kjer $\ker(Y) = \{x \in \mathbb{M}_{1,n} : xY = 0\}$ označuje levo jedro matrike $Y \in \mathbb{M}_{n,m}$. Bloki L_{a_i} in $L_{b_j}^\top$ so natanko določeni s svojimi velikostmi, saj obstajajo polinomski vektorski stolpci $x_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & \lambda^2 & \dots & (-1)^{a_i-1} \lambda^{a_i} \end{pmatrix}^\top$, za katere je $L_{a_i} x_i(\lambda) = 0$ in obstajajo polinom-ske vektorske vrstice $y_j(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & \lambda^2 & \dots & (-1)^{b_j-1} \lambda^{b_j} \end{pmatrix}$, za katere je $y_j(\lambda) L_{b_j}^\top = 0$. Torej ima blok L_{a_i} enorazsežno desno jedro, napeto na $x_i(\lambda)$ za vse λ . Podobno ima blok $L_{b_j}^\top$ enorazsežno levo jedro, napeto na $y_j(\lambda)$ za vse λ . Del (3.3.1) imenujemo *singularni del* Kroneckerjeve forme matričnega šopa $A + \lambda B$, števila a_i in b_j pa imenujemo *desni* (ali *stolpčni*) in *levi* (ali *vrstični*) *minimalni indeksi* matričnega šopa $A + \lambda B$. *Regularni del* šopa $A + \lambda B$ sestoji iz (3.3.2) in (3.3.3). Pri tem del (3.3.2) vsebuje neskončne elementarne delitelje in je enolično določen z njihovimi stopnjami. Spomnimo se, da neskončni elementarni delitelji obstajajo le, če je $\det B = 0$, sicer ima matrični šop le končne elementarne delitelje, ki so

vsebovani v (3.3.3) in ki enolično določajo del (3.3.3). Števila $-\alpha_j$ imenujemo *lastne vrednosti* matričnega šopa $A + \lambda B$.

Naj bosta (A_1, A_2) in (B_1, B_2) para linearno neodvisnih matrik in naj bo Δ elementarni operator na $\mathbb{M}_n$, podan s predpisom $\Delta(T) = A_1TB_1 - A_2TB_2$. Naj bodo $\epsilon_1, \dots, \epsilon_p$ in $\eta_1, \dots, \eta_q$ desni in levi minimalni indeksi šopa $A_1 + \lambda A_2$. Naj bodo $k_1, \dots, k_r$ stopnje neskončnih elementarnih deliteljev in naj bodo $(\lambda + \alpha_1)^{l_1}, \dots, (\lambda + \alpha_s)^{l_s}$ končni elementarni delitelji šopa $A_1 + \lambda A_2$. Podobno, naj bodo $a_1, \dots, a_e$ ter $b_1, \dots, b_f$ desni in levi minimalni indeksi šopa $B_1 + \lambda B_2$. Naj bodo $c_1, \dots, c_g$ stopnje neskončnih elementarnih deliteljev in naj bodo $(\lambda + \beta_1)^{d_1}, \dots, (\lambda + \beta_h)^{d_h}$ končni elementarni delitelji $B_1 + \lambda B_2$. Z uporabo Izreka 3.3.3 lahko bralec hitro preveri, da iz Kroneckerjevih kanoničnih form matričnih šopov $A_1 + \lambda A_2$ in $B_1 + \lambda B_2$ sledi, da so matrični koeficienti operatorja Δ podobni naslednjim bločno diagonalnim matrikam

$$\begin{aligned}
A_1 &\sim 0_{u,v} \oplus (F_{\epsilon_1} \oplus \dots \oplus F_{\epsilon_p}) \oplus (F_{\eta_1}^\top \oplus \dots \oplus F_{\eta_q}^\top) \oplus (I_{k_1} \oplus \dots \oplus I_{k_r}) \\
&\quad \oplus (J_{l_1}(\alpha_1) \oplus \dots \oplus J_{l_s}(\alpha_s)), \\
A_2 &\sim 0_{u,v} \oplus (G_{\epsilon_1} \oplus \dots \oplus G_{\epsilon_p}) \oplus (G_{\eta_1}^\top \oplus \dots \oplus G_{\eta_q}^\top) \oplus (J_{k_1}(0) \oplus \dots \oplus J_{k_r}(0)) \\
&\quad \oplus (I_{l_1} \oplus \dots \oplus I_{l_s}), \\
B_1 &\sim 0_{w,z} \oplus (F_{a_1} \oplus \dots \oplus F_{a_e}) \oplus (F_{b_1}^\top \oplus \dots \oplus F_{b_f}^\top) \oplus (I_{c_1} \oplus \dots \oplus I_{c_g}) \\
&\quad \oplus (J_{d_1}(\beta_1) \oplus \dots \oplus J_{d_h}(\beta_h)), \\
B_2 &\sim 0_{w,z} \oplus (G_{a_1} \oplus \dots \oplus G_{a_e}) \oplus (G_{b_1}^\top \oplus \dots \oplus G_{b_f}^\top) \oplus (J_{c_1}(0) \oplus \dots \oplus J_{c_g}(0)) \\
&\quad \oplus (I_{d_1} \oplus \dots \oplus I_{d_h}).
\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

V skladu z oznakami v (3.3.4) definirajmo števila

$$\begin{aligned}
R_{\epsilon,b}(i,j) &= \epsilon_i b_j, \\
R_{k,d}(i,j) &= \frac{\delta_{\beta_j,0}}{2} \min\{k_i, d_j\}(\min\{k_i, d_j\} - 1), \\
R_{l,c}(i,j) &= \frac{\delta_{\alpha_i,0}}{2} \min\{l_i, c_j\}(\min\{l_i, c_j\} - 1), \\
R_{l,d}(i,j) &= \frac{\delta_{\alpha_i\beta_j,1}}{2} \min\{l_i, d_j\}(\min\{l_i, d_j\} - 1), \\
R_{\epsilon,c}(i,j) &= \begin{cases} \frac{1}{2}c_j(c_j - 1) & : \epsilon_i \geq c_j, \\ \epsilon_i(c_j - \frac{1}{2}(\epsilon_i + 1)) & : \epsilon_i < c_j, \end{cases} \\
R_{\epsilon,d}(i,j) &= \begin{cases} \frac{1}{2}d_j(d_j - 1) & : \epsilon_i \geq d_j, \\ \epsilon_i(d_j - \frac{1}{2}(\epsilon_i + 1)) & : \epsilon_i < d_j, \end{cases} \\
R_{k,b}(i,j) &= \begin{cases} \frac{1}{2}k_i(k_i - 1) & : b_j \geq k_i, \\ b_j(k_i - \frac{1}{2}(b_j + 1)) & : b_j < k_i, \end{cases} \\
R_{l,b}(i,j) &= \begin{cases} \frac{1}{2}l_i(l_i - 1) & : b_j \geq l_i, \\ b_j(l_i - \frac{1}{2}(b_j + 1)) & : b_j < l_i. \end{cases}
\end{aligned}$$

Naslednji izrek podaja splošno formulo za reflektivnostni defekt elementarnega operatorja dolžine 2 in predstavlja glavni rezultat tega poglavja.

Izrek 3.3.4. *Naj bodo $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbb{M}_n$ dane matrike in naj bodo pripadajoče Kroneckerjeve kanonične dekompozicije matričnih šopov $A_1 + \lambda A_2$ in $B_1 + \lambda B_2$ kot v (3.3.4). Naj bo s*

predpisom $\Delta(T) = A_1TB_1 - A_2TB_2$ podan elementarni operator na algebri $\mathbb{M}_n$. Tedaj velja

$$\begin{aligned} \text{rd}(\ker \Delta) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^f R_{\epsilon,b}(i,j) + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^g R_{\epsilon,c}(i,j) + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^h R_{\epsilon,d}(i,j) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^f R_{k,b}(i,j) \\ &+ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^h R_{k,d}(i,j) + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^f R_{l,b}(i,j) + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^g R_{l,c}(i,j) + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^h R_{l,d}(i,j). \end{aligned}$$

Dokaz. Definirajmo naslednje elementarne operatorje

$$\begin{aligned} \Delta_{ij}^{1,S}(T) &= F_{\epsilon_i}TF_{a_j} - G_{\epsilon_i}TG_{a_j}, & \Delta_{ij}^{2,S}(T) &= F_{\epsilon_i}TF_{b_j}^\top - G_{\epsilon_i}TG_{b_j}^\top, \\ \Delta_{ij}^{3,S}(T) &= F_{\epsilon_i}T - G_{\epsilon_i}TJ_{c_j}(0), & \Delta_{ij}^{4,S}(T) &= F_{\epsilon_i}TJ_{d_j}(\beta_j) - G_{\epsilon_i}T, \\ \Delta_{ij}^{5,S}(T) &= F_{\eta_i}^\top TF_{a_j} - G_{\eta_i}^\top TG_{a_j}, & \Delta_{ij}^{6,S}(T) &= F_{\eta_i}^\top TF_{b_j}^\top - G_{\eta_i}^\top TG_{b_j}^\top, \\ \Delta_{ij}^{7,S}(T) &= F_{\eta_i}^\top T - G_{\eta_i}^\top TJ_{c_j}(0), & \Delta_{ij}^{8,S}(T) &= F_{\eta_i}^\top TJ_{d_j}(\beta_j) - G_{\eta_i}^\top T, \\ \Delta_{ij}^{9,S}(T) &= TF_{a_j} - J_{k_i}(0)TG_{a_j}, & \Delta_{ij}^{10,S}(T) &= TF_{b_j}^\top - J_{k_i}(0)TG_{b_j}^\top, \\ \Delta_{ij}^{11,R}(T) &= T - J_{k_i}(0)TJ_{c_j}(0), & \Delta_{ij}^{12,R}(T) &= TJ_{d_j}(\beta_j) - J_{k_i}(0)T, \\ \Delta_{ij}^{13,S}(T) &= J_{l_i}(\alpha_i)TF_{a_j} - TG_{a_j}, & \Delta_{ij}^{14,S}(T) &= J_{l_i}(\alpha_i)TF_{b_j}^\top - TG_{b_j}^\top, \\ \Delta_{ij}^{15,R}(T) &= J_{l_i}(\alpha_i)T - TJ_{c_j}(0), & \Delta_{ij}^{16,R}(T) &= J_{l_i}(\alpha_i)TJ_{d_j}(\beta_j) - T. \end{aligned}$$

Črka R v nadpisanem indeksu označuje, da se koeficienti danega elementarnega operatorja pojavijo zgolj v regularnih delih matričnih šopov $A_1 + \lambda A_2$ in $B_1 + \lambda B_2$. Črka S označuje, da so koeficienti mešanega tipa, nekateri iz regularnih, drugi iz singularnih delov. Črke v podpisanih indeksih označujejo števila iz (3.3.4) pri primerni izbiri domen za i in j . Če upoštevamo bločno stukturo koeficientov operatorja Δ , dobimo sledečo bločno dekompozicijo prostora $\ker \Delta$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [\ker \Delta_{ij}^{1,S}]_{i,j=1}^{p,e} & [\ker \Delta_{ij}^{2,S}]_{i,j=1}^{p,f} & [\ker \Delta_{ij}^{3,S}]_{i,j=1}^{p,g} & [\ker \Delta_{ij}^{4,S}]_{i,j=1}^{p,h} \\ 0 & [\ker \Delta_{ij}^{5,S}]_{i,j=1}^{q,e} & [\ker \Delta_{ij}^{6,S}]_{i,j=1}^{q,f} & [\ker \Delta_{ij}^{7,S}]_{i,j=1}^{q,g} & [\ker \Delta_{ij}^{8,S}]_{i,j=1}^{q,h} \\ 0 & [\ker \Delta_{ij}^{9,S}]_{i,j=1}^{r,e} & [\ker \Delta_{ij}^{10,S}]_{i,j=1}^{r,f} & [\ker \Delta_{ij}^{11,R}]_{i,j=1}^{r,g} & [\ker \Delta_{ij}^{12,R}]_{i,j=1}^{r,h} \\ 0 & [\ker \Delta_{ij}^{13,S}]_{i,j=1}^{s,e} & [\ker \Delta_{ij}^{14,S}]_{i,j=1}^{s,f} & [\ker \Delta_{ij}^{15,R}]_{i,j=1}^{s,g} & [\ker \Delta_{ij}^{16,R}]_{i,j=1}^{s,h} \end{pmatrix}. \quad (3.3.5)$$

Iz Trditve 3.2.2 sledi $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{16,R}) = R_{l,d}(i,j)$ ter $\ker \Delta_{ij}^{11,R} = \{0\}$, torej je $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{11,R}) = 0$. Podobno iz Trditve 3.2.1 dobimo še $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{12,R}) = R_{k,d}(i,j)$ in $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{15,R}) = R_{l,c}(i,j)$. Večina izračunov v nadaljevanju je bila opravljena s pomočjo programa WOLFRAM MATHEMATICA. Najprej opazimo, da lahko določimo $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{6,S})$, če poznamo $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{1,S})$. Res, naj bo $T \in \ker \Delta_{ij}^{1,S}$, torej je $F_{\epsilon_i}TF_{a_j} = G_{\epsilon_i}TG_{a_j}$. S transponiranjem te enakosti dobimo $F_{a_j}^\top T^\top F_{\epsilon_i}^\top = G_{a_j}^\top T^\top G_{\epsilon_i}^\top$, torej je $T^\top$ element jedra transformacije $S \mapsto F_{a_j}^\top S F_{\epsilon_i}^\top - G_{a_j}^\top S G_{\epsilon_i}^\top$. Če je $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{1,S}) = f_1(\epsilon_i, a_j)$ za neko funkcijo dveh spremenljivk f_1 , potem velja $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{6,S}) = f_1(b_j, \eta_i)$, saj transponiranje ohranja refleksivnostni defekt. Sedaj določimo strukturo prostora

$\ker \Delta_{ij}^{1,S}$. Lahko je videti, da je $\ker \Delta_{ij}^{1,S} = \{0\}$ za $\epsilon_i \geq a_j$. Za $\epsilon_i < a_j$ pa dobimo

$$\ker \Delta_{ij}^{1,S} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & t_1 & \dots & \dots & t_{a_j - \epsilon_i} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ t_1 & \dots & \dots & t_{a_j - \epsilon_i} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} : t_l \in \mathbb{C} \right\}.$$

Ker transponiranje in množenje z obrnljivimi matrikami ohranjata refleksivnostni defekt, dobimo

$$\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{1,S}) = \begin{cases} \text{rd}(\mathcal{B}(\epsilon_i + 1, a_j)) & : \epsilon_i < a_j, \\ 0 & : \epsilon_i \geq a_j. \end{cases}$$

Iz Trditve 3.2.4 tedaj sledi $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{1,S}) = 0$, po predhodni diskusiji pa dobimo še $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{6,S}) = 0$. Za $\Delta_{ij}^{2,S}$ lahko enostavno preverimo, da je $\ker \Delta_{ij}^{2,S} = \mathcal{T}(\epsilon_i + 1, b_j + 1)$, zato po Trditvi 3.2.4 sledi $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{2,S}) = R_{\epsilon,b}(i, j)$. Dalje, če lahko izrazimo $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{3,S})$, potem lahko določimo tudi $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{10,S})$. Res, naj bo $T \in \ker \Delta_{ij}^{3,S}$, torej je $F_{\epsilon_i} T = G_{\epsilon_i} T J_{c_j}(0)$. S transponiranjem te enakosti dobimo $T^\top F_{\epsilon_i}^\top = J_{c_j}(0)^\top T^\top G_{\epsilon_i}^\top$. Slednjo enakost na levi množimo z matriko P_{c_j} in upoštevamo, da velja $P_{c_j}^2 = I_{c_j}$ in $P_{c_j} J_{c_j}(0)^\top P_{c_j} = J_{c_j}(0)$. Od tod dobimo $(P_{c_j} T^\top) F_{\epsilon_i}^\top = J_{c_j}(0) (P_{c_j} T^\top) G_{\epsilon_i}^\top$. Torej je $P_{c_j} T^\top$ element jedra transformacije $S \mapsto S F_{\epsilon_i}^\top - J_{c_j}(0) S G_{\epsilon_i}^\top$. Če je tedaj $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{3,S}) = f_2(\epsilon_i, c_j)$ za neko funkcijo dveh spremenljivk f_2 , potem velja $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{10,S}) = f_2(b_j, k_i)$, saj smo uporabili le transformacije, ki ohranjajo refleksivnostni defekt. Hitro lahko preverimo, da je

$$\ker \Delta_{ij}^{3,S} = \left\{ \begin{pmatrix} T \\ 0_{\epsilon_i - c_j + 1, c_j} \end{pmatrix} : T \in \mathcal{T}_U(c_j) \right\}$$

za $\epsilon_i \geq c_j$ in da velja $\ker \Delta_{ij}^{3,S} = \mathcal{A}(\epsilon_i + 1, c_j)$, če je $\epsilon_i < c_j$. S pomočjo Trditve 3.2.4 dobimo $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{3,S}) = R_{\epsilon,c}(i, j)$, zato po predhodni diskusiji sledi $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{10,S}) = R_{k,b}(i, j)$. Nadaljujemo podobno. Če poznamo $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{4,S})$, lahko izrazimo tudi $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{14,S})$. Naj bo $T \in \ker \Delta_{ij}^{4,S}$, torej je $F_{\epsilon_i} T J_{d_j}(\beta_j) = G_{\epsilon_i} T$. Transponirajmo slednjo enakost in dobimo $J_{d_j}(\beta_j)^\top T^\top F_{\epsilon_i}^\top = T^\top G_{\epsilon_i}^\top$. Dobljeno enakost množimo z leve z matriko P_{d_j} in upoštevamo, da velja $P_{d_j}^2 = I_{d_j}$ ter $P_{d_j} J_{d_j}(\beta_j)^\top P_{d_j} = J_{d_j}(\beta_j)$. Tako dobimo enakost $J_{d_j}(\beta_j) (P_{d_j} T^\top) F_{\epsilon_i}^\top = (P_{d_j} T^\top) G_{\epsilon_i}^\top$. Torej je $P_{d_j} T^\top$ element jedra transformacije $S \mapsto J_{d_j}(\beta_j) S F_{\epsilon_i}^\top - S G_{\epsilon_i}^\top$. Če je $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{4,S}) = f_3(\epsilon_i, d_j, \beta_j)$ za neko funkcijo treh spremenljivk f_3 , potem je $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{14,S}) = f_3(b_j, l_i, \alpha_i)$, saj transponiranje ter množenje z obrnljivo matriko ohranjata refleksivnostni defekt. Naj bo $T \in \ker \Delta_{ij}^{4,S}$. Koeficiente matrike T lahko opišemo na sledeč način. Koeficienti v zadnji vrstici, $t_{\epsilon_i+1,1}, \dots, t_{\epsilon_i+1,d_j}$, nastopajo kot parametri, s katerimi lahko izrazimo preostale koeficiente. Koeficienti v prvi vrstici so oblike $t_{k1} = \beta_j^{\epsilon_i - k + 1} t_{\epsilon_i+1,1}$ za $k = 1, \dots, \epsilon_i + 1$. Preostale koeficiente matrike T pa lahko izrazimo kot $t_{kl} = t_{k+1,l-1} + \beta_j t_{k+1,l}$ za $k = 1, \dots, \epsilon_i$ in $l = 2, \dots, d_j$. Najprej si oglejmo primer, ko je $\beta_j = 0$. Če je $\epsilon_i \geq d_j$, potem dobimo

$$\ker \Delta_{ij}^{4,S} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & t_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ t_1 & \dots & \dots & t_{d_j} \end{pmatrix} : t_l \in \mathbb{C} \right\} \quad (3.3.6)$$

in če je $\epsilon_i < d_j$, je

$$\ker \Delta_{ij}^{4,S} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & t_1 & \dots & t_{d_j - \epsilon_i} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ t_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & t_{d_j} \end{pmatrix} : t_l \in \mathbb{C} \right\}. \quad (3.3.7)$$

Za $\beta_j \neq 0$ lahko z elementarnimi operacijami na vrsticah preoblikujemo $\ker \Delta_{ij}^{4,S}$ do matrike oblike (3.3.6) za $\epsilon_i \geq d_j$ oziroma do matrike oblike (3.3.7) za $\epsilon_i < d_j$. Ker uporabljene transformacije ponovno ohranjajo refleksivnostni defekt, lahko brez izgube splošnosti predpostavimo, da za $\epsilon_i \geq d_j$ velja

$$\ker \Delta_{ij}^{4,S} = \left\{ \begin{pmatrix} 0_{\epsilon_i - d_j + 1, d_j} \\ T \end{pmatrix} : T \in \mathcal{T}_U(d_j) \right\},$$

za $\epsilon_i < d_j$ pa $\ker \Delta_{ij}^{4,S} = \mathcal{A}(\epsilon_i + 1, d_j)$. Od tod dobimo $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{4,S}) = R_{\epsilon, d}(i, j)$. Po predhodni diskusiji dobimo še $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{14,S}) = R_{l, b}(i, j)$. Hitro lahko preverimo, da je $\ker \Delta_{ij}^{5,S} = \{0\}$ in zato $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{5,S}) = 0$. Dalje, če poznamo $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{9,S})$, potem je mogoče izraziti tudi $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{7,S})$. Naj bo $T \in \ker \Delta_{ij}^{9,S}$, torej je $TF_{a_j} = J_{k_i}(0)TG_{a_j}$. S transponiranjem zadnje enakosti dobimo $F_{a_j}^\top T^\top = G_{a_j}^\top T^\top J_{k_i}(0)^\top$. Slednjo enakost množimo z desne z matriko P_{k_i} , upoštevamo, da velja $P_{k_i}^2 = I_{k_i}$ in $P_{k_i}J_{k_i}(0)^\top P_{k_i} = J_{k_i}(0)$ ter dobimo $F_{a_j}^\top (T^\top P_{k_i}) = G_{a_j}^\top (T^\top P_{k_i})J_{k_i}(0)$. Torej je $T^\top P_{k_i}$ element jedra transformacije $S \mapsto F_{a_j}^\top S - G_{a_j}^\top S J_{k_i}(0)$. Če je tedaj $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{9,S}) = f_4(k_i, a_j)$ za neko funkcijo dveh spremenljivk f_4 , potem sledi $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{7,S}) = f_4(c_j, \eta_i)$, saj transponiranje in množenje z obrnljivo matriko ohranjata refleksivnostni defekt. Hitro lahko preverimo, da je $\ker \Delta_{ij}^{9,S} = \{0\}$, od koder sledi $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{9,S}) = \text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{7,S}) = 0$. Preostaneta nam še zadnja dva primera. Najprej preverimo, da za izračun $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{8,S})$ zadošča poznati $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{13,S})$. Naj bo $T \in \ker \Delta_{ij}^{13,S}$, torej velja $J_{l_i}(\alpha_i)TF_{a_j} = TG_{a_j}$. Transponirajmo slednjo enakost, da dobimo $F_{a_j}^\top T^\top J_{l_i}(\alpha_i)^\top = G_{a_j}^\top T^\top$. Dobljeno enakost množimo z desne z matriko P_{l_i} , upoštevamo $P_{l_i}^2 = I_{l_i}$ in $P_{l_i}J_{l_i}(\alpha_i)^\top P_{l_i} = J_{l_i}(\alpha_i)$ ter tako dobimo $F_{a_j}^\top (T^\top P_{l_i})J_{l_i}(\alpha_i) = G_{a_j}^\top (T^\top P_{l_i})$. Torej je $T^\top P_{l_i}$ element jedra transformacije $S \mapsto F_{a_j}^\top S J_{l_i}(\alpha_i) - G_{a_j}^\top S$. Če tedaj velja $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{13,S}) = f_5(l_i, a_j, \alpha_i)$ za neko funkcijo treh spremenljivk f_5 , potem je $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{8,S}) = f_5(d_j, \eta_i, \beta_j)$, saj transponiranje in množenje z obrnljivo matriko ohranjata refleksivnostni defekt. Hitro lahko preverimo, da je $\ker \Delta_{ij}^{13,S} = \{0\}$, od koder dobimo $\text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{13,S}) = \text{rd}(\ker \Delta_{ij}^{8,S}) = 0$. Za konec še upoštevajmo, da ima $\ker \Delta$ dekompozicijo oblike (3.3.5), torej lahko uporabimo Izrek 2.1.5 in s tem zaključimo dokaz. $\square$

Oglejmo si še nekaj posledic in posebnih primerov Izreka 3.3.4. Naj bodo A_1, A_2, B_1, B_2 $n \times n$ kompleksne matrike in $\Delta(T)$ kot v omenjenem izreku. Formula za $\text{rd}(\ker \Delta)$ se pričakovano poenostavi ob dodatnih predpostavkah na koeficiente operatorja Δ . Na primer, če je $A_1 + \lambda A_2$ regularen in $B_1 + \lambda B_2$ singularen matrični šop, tedaj iz Izreka 3.3.4 sledi

$$\begin{aligned} \text{rd}(\ker \Delta) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^f R_{k, b}(i, j) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^h R_{k, d}(i, j) + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^f R_{l, b}(i, j) \\ &+ \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^g R_{l, c}(i, j) + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^h R_{l, d}(i, j). \end{aligned}$$

Podobno, če je $A_1 + \lambda A_2$ singularen in je $B_1 + \lambda B_2$ regularen matrični šop, dobimo

$$\begin{aligned} \text{rd}(\ker \Delta) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^g R_{\epsilon,c}(i, j) + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^h R_{\epsilon,d}(i, j) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^h R_{k,d}(i, j) \\ &+ \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^g R_{l,c}(i, j) + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^h R_{l,d}(i, j). \end{aligned}$$

V primeru, da sta matrična šopa $A_1 + \lambda A_2$ in $B_1 + \lambda B_2$ oba regularna, pa velja

$$\text{rd}(\ker \Delta) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^h R_{k,d}(i, j) + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^g R_{l,c}(i, j) + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^h R_{l,d}(i, j).$$

Opazimo lahko, da sta Trditvi 3.2.1 in 3.2.2 dejansko posebna primera Izreka 3.3.4. Kot je navedeno v [22], je poiskati Jordanovo kanonično formo poljubne matrike $A \in \mathbb{M}_n$ namreč ekvivalentno temu, da poiščemo končne elementarne delitelje regularnega matričnega šopa $\lambda I + A$.

Naj omenimo še, da bi podoben pristop kot v dokazu Izreka 3.3.4 za elementarne operatorje dolžine $k \geq 3$ zahteval kanonične forme za k -terice matrik. V tem smislu bi tedaj imeli opravka z matričnimi šopi oblike $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k$, kjer so A_i dane matrike in λ_i spremenljivke za $1 \leq i \leq k$.

3.4 Primer uporabe in posplošena Schurova forma matričnega šopa

Spomnimo se Zgleda 3.2.5. Določiti smo želeli refleksivnostni defekt jeder transformacij

$$\begin{aligned} \Delta_1(T) &= J_n(0)T - TJ_n(0), & \Delta_2(T) &= J_n(0)TJ_n(0) - T, \\ \Delta_3(T) &= J_n(0)^T TJ_n(0) - J_n(0)T, & \Delta_4(T) &= J_n(0)TJ_n(0)^T - J_n(0)^T TJ_n(0). \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

V ta namen smo morali najprej določiti strukturo prostorov $\ker \Delta_i$ za $1 \leq i \leq 4$, nato pa izračunati še njihove refleksivnostne defekte. Želeli bi uporabiti Izrek 3.3.4, ki omogoča, da se izognemo tovrstnemu računanju konkretnih prostorov. Namesto tega moramo določiti Kroneckerjevo kanonično strukturo ustreznih matričnih šopov.

Naj bosta A in B kvadratni kompleksni $n \times n$ matriki. Da dobimo informacijo o Kroneckerjevi strukturi matričnega šopa $A + \lambda B$, ni potrebno izračunati ustrezne Kroneckerjeve kanonične forme, kot je poudaril Van Dooren v [50]. Z numeričnega vidika je optimalneje določiti t.i. *posplošeno Schurovo formo* matričnega šopa $A + \lambda B$. To je kvazitrikotna forma, dobljena z unitarnimi transformacijami, ki je oblike

$$\begin{pmatrix} A_\epsilon + \lambda B_\epsilon & * & * & * \\ 0 & A_\infty + \lambda B_\infty & * & * \\ 0 & 0 & A_f + \lambda B_f & * \\ 0 & 0 & 0 & A_\eta + \lambda B_\eta \end{pmatrix}.$$

Pri tem je $A_\epsilon + \lambda B_\epsilon$ singularen matrični šop, ki vsebuje desno (stolpčno) Kroneckerjevo strukturo šopa $A + \lambda B$, $A_\infty + \lambda B_\infty$ je regularen matrični šop, ki vsebuje neskončne elementarne delitelje šopa $A + \lambda B$, $A_f + \lambda B_f$ je regularen matrični šop, ki vsebuje končne elementarne delitelje šopa $A + \lambda B$ in $A_\eta + \lambda B_\eta$ je singularen matrični šop, ki vsebuje levo (vrstično) Kroneckerjevo strukturo šopa $A + \lambda B$. Vsak izmed teh blokov ima finejšo, t.i. stopničasto strukturo in te skupaj natanko določajo Kroneckerjevo kanonično formo matričnega šopa $A + \lambda B$. V določeni programski opremi so že implementirani algoritmi, ki izračunajo posplošeno

Schurovo formo matričnega šopa, s čimer nam omogočijo določiti pripadajočo Kroneckerjevo strukturo. Na ta način bomo lahko dobili rezultat Zgleda 3.2.5 na bistveno enostavnejši in hitrejši način ravno z uprabo Izreka 3.3.4. Vsi izračuni Kroneckerjevih kanoničnih form v sledečem zgledu so bili izvedeni z uporabo ukaza `kronneck` v programu SCILAB.

Zgled 3.4.1. Naj bodo $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \{J_n(0), J_n(0)^\top, I_n\}$ in naj bo Δ elementarni operator na $\mathbb{M}_n$, podan s predpisom $\Delta(T) = A_1TB_1 - A_2TB_2$. V Zgledu 3.2.5 smo že omenili, da je refleksivnostni defekt jedra takšnega elementarnega operatorja enak refleksivnostnemu defektu jedra ene od transformacij (3.4.1). Vemo že, da iz Trditve 3.2.1 sledi $\text{rd}(\ker \Delta_1) = \frac{1}{2}n(n-1)$ ter da po Trditvi 3.2.2 velja $\text{rd}(\ker \Delta_2) = 0$. Z uporabo Izreka 3.3.4 bomo določili še $\text{rd}(\ker \Delta_3)$ in $\text{rd}(\ker \Delta_4)$.

Uporabili bomo enake oznake kot v (3.3.4). Najprej si oglejmo $\text{rd}(\ker \Delta_3)$. Določiti moramo Kroneckerjevo strukturo matričnih šopov $A_1 + \lambda A_2 = J_n(0)^\top + \lambda J_n(0)$ in $B_1 + \lambda B_2 = J_n(0) + \lambda I_n$. Slednji je očitno regularen šop, ki je enak svoji posplošeni Schurovi formi in ima le končne elementarne delitelje. Z uporabo ukaza `kronneck` dobimo $h = 1$, $d_1 = n$ in $\beta_1 = 0$. Ostali indeksi se ne pojavijo. Regularnost šopa $J_n(0)^\top + \lambda J_n(0)$ je odvisna od n . Če je n sodo število, potem je $J_n(0)^\top + \lambda J_n(0)$ regularen šop, ki ima končne in neskončne elementarne delitelje. Z uporabo ukaza `kronneck` dobimo $r = 1$, $k_1 = \frac{n}{2}$ in $s = 1$, $l_1 = \frac{n}{2}$, $\alpha_1 = 0$. Ostali indeksi se ne pojavijo. Če je n liho število, potem je $J_n(0)^\top + \lambda J_n(0)$ singularen šop, ki nima regularne strukture. Dobimo $p = 1$, $\epsilon_1 = \frac{n-1}{2}$ in $q = 1$, $\eta_1 = \frac{n-1}{2}$. Ostali indeksi se ne pojavijo. Torej, če je $n = 2l$ za nek $l \in \mathbb{N}$, dobimo $\text{rd}(\ker \Delta_3) = R_{k,d}(1, 1) = \frac{1}{2}l(l-1)$ in če je $n = 2l + 1$ za nek $l \in \mathbb{N}$, imamo $\text{rd}(\ker \Delta_3) = R_{e,d}(1, 1) = \frac{1}{2}l(3l+1)$. Sedaj si oglejmo še $\text{rd}(\ker \Delta_4)$. Določiti moramo Kroneckerjevo kanonično strukturo matričnih šopov $A_1 + \lambda A_2 = J_n(0) + \lambda J_n(0)^\top$ in $B_1 + \lambda B_2 = J_n(0)^\top + \lambda J_n(0)$. Matrični šop $J_n(0)^\top + \lambda J_n(0)$ smo že obravnavali, zato si oglejmo še drugi primer. Opazimo, da je tudi regularnost šopa $J_n(0) + \lambda J_n(0)^\top$ odvisna od n . Podobno kot prej dobimo v primeru, ko je n sodo število, $r = 1$, $k_1 = \frac{n}{2}$; $s = 1$, $l_1 = \frac{n}{2}$, $\alpha_1 = 0$ in $g = 1$, $c_1 = \frac{n}{2}$; $h = 1$, $d_1 = \frac{n}{2}$, $\beta_1 = 0$. Ostali indeksi se ne pojavijo. Če pa je n liho število, tedaj je $p = 1$, $\epsilon_1 = \frac{n-1}{2}$; $q = 1$, $\eta_1 = \frac{n-1}{2}$ in $e = 1$, $a_1 = \frac{n-1}{2}$; $f = 1$, $b_1 = \frac{n-1}{2}$. Ostali indeksi se ne pojavijo. Torej, če je $n = 2l$ za nek $l \in \mathbb{N}$, dobimo $\text{rd}(\ker \Delta_4) = R_{k,d}(1, 1) + R_{l,c}(1, 1) = l(l-1)$ in če je $n = 2l + 1$ za nek $l \in \mathbb{N}$, imamo $\text{rd}(\ker \Delta_4) = R_{e,b}(1, 1) = l^2$.

3.5 Slike elementarnih operatorjev dolžine 2

Naj bosta k in n naravni števili. Naj bosta $(A_1, \dots, A_k)$ ter $(B_1, \dots, B_k)$ dani k -terici kompleksnih $n \times n$ matrik in naj bo s predpisom $\Delta(T) = A_1TB_1 + \dots + A_kTB_k$ podan elementarni operator na $\mathbb{M}_n$. Po Trditvi 3.1.3 vemo, da je $\ker \Delta$ k -refleksiven podprostor algebre $\mathbb{M}_n$, torej je $\text{rd}_j(\ker \Delta) = 0$ za vsa naravna števila $j \geq k$. Zanima nas, ali kaj podobnega velja tudi za $\text{im } \Delta$. Naslednji zgled pove, da je odgovor v primeru $k = 1$ pritrdilen.

Zgled 3.5.1. Naj bosta $A, B \in \mathbb{M}_n$ in naj bo Δ elementarni operator na $\mathbb{M}_n$, definiran s predpisom $\Delta(T) = ATB$. Tedaj sta jedro in slika transformacije Δ refleksivna prostora.

Vendar pa v splošnem $\text{im } \Delta$ ni k -refleksiven prostor, kot bomo videli v nadaljevanju. Najprej si oglejmo spodnjo lemo, ki sliko elementarnega operatorja Δ poveže z jedrom drugega elementarnega operatorja.

Lema 3.5.2. Naj bosta $(A_1, \dots, A_k)$ ter $(B_1, \dots, B_k)$ k -terici kompleksnih $n \times n$ matrik in naj bosta s predpisoma $\Delta(T) = A_1TB_1 + \dots + A_kTB_k$ in $\tilde{\Delta}(T) = B_1TA_1 + \dots + B_kTA_k$ podana elementarna operatorja na $\mathbb{M}_n$. Tedaj velja

$$(\text{im } \Delta)_\perp = \ker \tilde{\Delta}.$$

Dokaz. Za poljubno matriko $T \in \mathbb{M}_n$ velja $\text{tr}(\Delta(T)C) = \text{tr}(T\tilde{\Delta}(C))$. Torej je $C \in (\text{im } \Delta)_\perp$ natanko tedaj, ko je $\tilde{\Delta}(C) \in (\mathbb{M}_n)_\perp$, kar je ekvivalentno pogoju $C \in \ker \tilde{\Delta}$. $\square$

S pomočjo zgornje leme v naslednjem zgledu pokažemo, da obstaja odvajanje Δ na $\mathbb{M}_3$, za katerega $\text{im } \Delta$ ni 2-refleksiven prostor.

Zgled 3.5.3. S predpisom $\Delta(T) = J_3(0)T - TJ_3(0)$ definiramo odvajanje na prostoru $\mathbb{M}_3$. Prostor $\text{im } \Delta$ je očitno 3-refleksiven, po Lemi 3.5.2 pa sledi $(\text{im } \Delta)_\perp = \mathcal{T}_U(3)$. Ker je $(\text{im } \Delta)_\perp \cap \mathcal{F}_2(\mathbb{C}^3) \subsetneq (\text{im } \Delta)_\perp$, velja $\text{im } \Delta \subsetneq \text{Ref}_2(\text{im } \Delta)$, torej $\text{im } \Delta$ ni 2-refleksiven prostor. Še več, velja $\text{rd}(\text{im } \Delta) = 2$ in $\text{rd}_2(\text{im } \Delta) = 1$.

Torej se je smiselno vprašati, ali znamo določiti k -refleksivnostni defekt slike elementarnega operatorja Δ , definiranega kot na začetku tega razdelka. Odgovor znamo poiskati za nekatere posebne primere elementarnih operatorjev dolžine 2. Naj bosta $A, B \in \mathbb{M}_n$ dani matriki. Naj bo $J_{p_1}(\lambda_1) \oplus \dots \oplus J_{p_N}(\lambda_N)$ Jordanova kanonična forma matrike A , kjer je $\sum_{i=1}^N p_i = n$ in so $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ ne nujno različne lastne vrednosti matrike A . Podobno, naj bo $J_{r_1}(\mu_1) \oplus \dots \oplus J_{r_M}(\mu_M)$ Jordanova kanonična forma matrike B , kjer je $\sum_{i=1}^M r_i = n$ in so $\mu_1, \dots, \mu_M$ ne nujno različne lastne vrednosti matrike B . Naj bo $R(i, j, k)$ nenegativno celo število, definirano s predpisom

$$R(i, j, k) = \begin{cases} \min\{p_i, r_j\} - k & : \lambda_i = \mu_j \text{ in } k < \min\{p_i, r_j\}, \\ 0 & : \lambda_i \neq \mu_j \text{ ali } k \geq \min\{p_i, r_j\}. \end{cases}$$

Trditev 3.5.4. Naj bodo $A, B \in \mathbb{M}_n$ ter $R(i, j, k)$ kot zgoraj. Naj bo Δ posplošeno odvajanje na $\mathbb{M}_n$, podano s predpisom $\Delta(T) = AT - TB$. Tedaj lahko k -refleksivnostni defekt prostora $\text{im } \Delta$ izrazimo kot

$$\text{rd}_k(\text{im } \Delta) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M R(i, j, k).$$

V posebnem, $\text{im } \Delta$ je k -refleksivni prostor natanko tedaj, ko so vse ničle največjega skupnega delitelja minimalnih polinomov m_A in m_B kratnosti največ k .

Dokaz. Za $1 \leq i \leq N$ in $1 \leq j \leq M$ definirajmo naslednja elementarna operatorja na prostoru $\mathbb{M}_{p_i, r_j}$ oziroma na $\mathbb{M}_{r_j, p_i}$

$$\begin{aligned} \Delta_{p_i, r_j}(T) &= J_{p_i}(\lambda_i)T - TJ_{r_j}(\mu_j) & (T \in \mathbb{M}_{p_i, r_j}), \\ \Delta_{r_j, p_i}(T) &= J_{r_j}(\mu_j)T - TJ_{p_i}(\lambda_i) & (T \in \mathbb{M}_{r_j, p_i}). \end{aligned}$$

Po Lemi 3.5.2 velja $(\text{im } \Delta_{p_i, r_j})_\perp = \ker \Delta_{r_j, p_i}$. Če je $\lambda_i \neq \mu_j$, potem je Δ_{p_i, r_j} bijektiven operator, torej je $\text{im } \Delta_{p_i, r_j}$ k -refleksiven prostor za vsako naravno število k . Sedaj predpostavimo, da je $\lambda_i = \mu_j$. V tem primeru ni težko videti, da velja

$$\begin{aligned} \ker \Delta_{r_j, p_i} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0_{r_j, p_i - r_j} & T \\ & \end{pmatrix} : T \in \mathcal{T}_U(r_j) \right\}, & \text{če je } r_j \leq p_i, \\ \text{in } \ker \Delta_{r_j, p_i} &= \left\{ \begin{pmatrix} T \\ 0_{r_j - p_i, p_i} \end{pmatrix} : T \in \mathcal{T}_U(p_i) \right\}, & \text{če je } r_j > p_i. \end{aligned}$$

Naj bo $d = \min\{p_i, r_j\}$ in $D = \max\{p_i, r_j\}$. Ker transponiranje in množenje z obrnljivimi matrikami ohranjata k -refleksivnostni defekt, lahko brez izgube splošnosti predpostavimo, da je $\ker \Delta_{r_j, p_i} = \left\{ \begin{pmatrix} 0_{d, D-d} & T \\ & \end{pmatrix} : T \in \mathcal{T}_U(d) \right\}$. Od tod sledi $\dim(\text{im } \Delta) = d(D-1)$. Iz strukture prostora $\ker \Delta_{r_j, p_i}$ sledi, da je $\ker \Delta_{r_j, p_i} \cap \mathcal{F}_k(\mathbb{C}^{p_i}, \mathbb{C}^{r_j})$ linearen prostor z naslednjo

lastnostjo. Za $k \geq d$ je $\ker \Delta_{r_j, p_i} \cap \mathcal{F}_k(\mathbb{C}^{p_i}, \mathbb{C}^{r_j}) = \ker \Delta_{r_j, p_i}$, za $1 \leq k < d$ pa lahko po podobnem razmisleku kot prej brez izgube splošnosti predpostavimo, da je

$$\ker \Delta_{r_j, p_i} \cap \mathcal{F}_k(\mathbb{C}^{p_i}, \mathbb{C}^{r_j}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0_{k, d-k} & T \\ 0_{D-k, d-k} & 0_{D-k, k} \end{pmatrix} : T \in \mathcal{T}_U(k) \right\}.$$

To pa pomeni, da je $\text{im } \Delta_{p_i, r_j}$ k -refleksiven prostor natanko tedaj, ko je $k \geq d$ ali $\lambda_i \neq \mu_j$. V nasprotnem, torej če je $k < d$ in $\lambda_i = \mu_j$, pa dobimo $\dim(\text{Ref}_k(\text{im } \Delta_{p_i, r_j})) = dD - k$. Sklep sedaj sledi po Izreku 2.1.5. $\square$

Naj bosta matriki $A, B \in \mathbb{M}_n$ oblike kot pred Trditvijo 3.5.4. Naj bo $R(i, j, k)$ nenegativno celo število, definirano s predpisom

$$R(i, j, k) = \begin{cases} \min\{p_i, r_j\} - k & : \lambda_i, \mu_j \neq 0, \lambda_i = \frac{1}{\mu_j} \text{ in } k < \min\{p_i, r_j\}, \\ 0 & : \text{sicer.} \end{cases}$$

Posledica 3.5.5. *Naj bodo $A, B \in \mathbb{M}_n$ ter $R(i, j, k)$ kot zgoraj. Naj bo Δ elementaren operator na $\mathbb{M}_n$, definiran s predpisom $\Delta(T) = ATB - T$. Tedaj je k -refleksivnostni defekt prostora $\text{im } \Delta$ enak*

$$\text{rd}_k(\text{im } \Delta) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M R(i, j, k).$$

Dokaz. Na prostoru $\mathbb{M}_{p_i, r_j}$ definirajmo transformacijo $\Delta_{p_i, r_j}(T) = J_{p_i}(\lambda_i)TJ_{r_j}(\mu_j) - T$. Ker po Izreku 2.1.5 velja $\text{rd}_k(\text{im } \Delta) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \text{rd}_k(\text{im } \Delta_{p_i, r_j})$, zadošča določiti $\text{rd}_k(\text{im } \Delta_{p_i, r_j})$. Če je $\lambda_i = \mu_j = 0$, potem lahko hitro preverimo, da za $T = (t_{uv}) \in \mathbb{M}_{p_i, r_j}$ velja

$$\Delta_{p_i, r_j}(T) = -T + \begin{pmatrix} 0 & t_{21} & \dots & t_{2, r_j-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & t_{p_i, 1} & \dots & t_{p_i, r_j-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

V tem primeru je torej $\text{im } \Delta_{p_i, r_j} = \mathbb{M}_{p_i, r_j}$, zato za vsako naravno število k velja $\text{rd}_k(\text{im } \Delta_{p_i, r_j}) = 0$. V nadaljevanju obravnavamo posamezne primere. Če je $\lambda_i = 0$ in $\mu_j \neq 0$, dobimo enakost $\text{im } \Delta_{p_i, r_j} = \{XJ_{r_j}(\mu_j) : X \in \text{im } \tilde{\Delta}_{p_i, r_j}\}$, kjer je $\tilde{\Delta}_{p_i, r_j} : \mathbb{M}_{p_i, r_j} \rightarrow \mathbb{M}_{p_i, r_j}$ posplošeno odvajanje, podano s predpisom $\tilde{\Delta}_{p_i, r_j}(T) = J_{p_i}(0)T - TJ_{r_j}(\mu_j)^{-1}$. Uporabimo Trditve 2.1.3, da dobimo $\text{rd}_k(\text{im } \Delta_{p_i, r_j}) = \text{rd}_k(\text{im } \tilde{\Delta}_{p_i, r_j})$. Ker po [24, Example 6.2.13] velja, da invertiranje matrik ohranja velikosti Jordanovih kletk, po Trditvi 3.5.4 sledi $\text{rd}_k(\text{im } \Delta_{p_i, r_j}) = 0$. Podobno, če je $\lambda_i \neq 0$ in $\mu_j = 0$ ali če je $\lambda_i \neq 0, \mu_j \neq 0$ in $\lambda_i \neq \frac{1}{\mu_j}$, tedaj ponovno s pomočjo Trditve 3.5.4 dobimo $\text{rd}_k(\text{im } \Delta_{p_i, r_j}) = 0$. Preostane le še primer, ko je $\lambda_i, \mu_j \neq 0$ in velja $\lambda_i = \frac{1}{\mu_j}$. Tedaj velja $\text{rd}_k(\text{im } \Delta_{p_i, r_j}) = \text{rd}_k(\text{im } \tilde{\Delta}_{p_i, r_j})$, kjer je s predpisom $\tilde{\Delta}_{p_i, r_j}(T) = J_{p_i}(\lambda_i)T - TJ_{r_j}(\mu_j)^{-1}$ podano posplošeno odvajanje na $\mathbb{M}_{p_i, r_j}$. Po Trditvi 3.5.4 sledi $\text{rd}_k(\text{im } \tilde{\Delta}_{p_i, r_j}) = 0$ za $k \geq \min\{p_i, r_j\}$ in $\text{rd}_k(\text{im } \tilde{\Delta}_{p_i, r_j}) = \min\{p_i, r_j\} - k$ za $k < \min\{p_i, r_j\}$. Sedaj uporabimo Izrek 2.1.5 in dobimo $\text{rd}_k(\text{im } \Delta) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M R(i, j, k)$. $\square$

Poglavje 4

Ocene k -hiperrefleksivnostnih konstant prostorov operatorjev

V tem poglavju obravnavamo kriterije, kdaj so določeni prostori operatorjev k -hiperrefleksivni, pri tem pa želimo pripadajočo k -hiperrefleksivnostno konstanto čim boljše oceniti. Poleg tega nas zanima, v kolikšni meri se dana situacija spremeni, če direktna vsota Hilbertovih prostorov, na kateri delujejo operatorji, ni ortogonalna. V tem primeru obravnavamo odvisnost k -refleksivnosti in k -hiperrefleksivnosti prostorov operatorjev od kotov med danimi Hilbertovimi prostori. Za konec podamo še ocene hiperrefleksivnostnih konstant nekaterih nizko razsežnih algeber matrik. V tem poglavju so predstavljeni rezultati članka [10].

4.1 Nekatere ocene k -hiperrefleksivnostnih konstant

Naj bo $\mathcal{H}$ kompleksen separabilen Hilbertov prostor. Za začetek si oglejmo posplošitev znanega Arvesonovega izreka [3, Theorem 7.4]. Ta rezultat smo predstavili že v uvodnem poglavju kot del Izreka 1.6.7, ker pa ga v nadaljevanju večkrat uporabimo, izrek v tem razdelku še enkrat posebej navedemo.

Izrek 4.1.1 (Arveson). *Naj bo $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ k -refleksiven podprostor. Tedaj je $\mathcal{S}$ k -hiperrefleksiven natanko tedaj, ko ima vsak operator $T \in \mathcal{S}_\perp$ razcep oblike $T = \sum_{n \in \mathbb{N}} T_n$, kjer je $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_1 < \infty$ in so $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ operatorji v $\mathcal{S}_\perp$ ranga največ k . Če definiramo*

$$\kappa_k(T, \mathcal{S}_\perp) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_1 : \{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}_\perp \cap \mathcal{F}_k(\mathcal{H}), T = \sum_{n \in \mathbb{N}} T_n \right\},$$

potem je k -hiperrefleksivnostna konstanta prostora $\mathcal{S}$ enaka

$$\kappa_k(\mathcal{S}) = \sup \{ \kappa_k(T, \mathcal{S}_\perp) : T \in \mathcal{S}_\perp, \|T\|_1 \leq 1 \}.$$

Naj bo $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ zaprt linearen podprostor. Definirajmo algebro

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{C}I & \mathcal{S} \\ 0 & \mathbb{C}I \end{pmatrix},$$

kjer je I identični operator na $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Kraus in Larson sta dokazala, da je algebra $\mathcal{A}$ hiperrefleksivna (refleksivna) natanko tedaj, ko je hiperrefleksiven (refleksiven) podprostor $\mathcal{S}$, dokaz si bralec lahko ogleda v [28, Proposition 1] in [28, Proposition 4]. Še več, po [27, Proposition 3.2] je $\mathcal{A}$ k -hiperrefleksivna algebra natanko tedaj, ko je $\mathcal{S}$ k -hiperrefleksiven prostor. Opazimo, da imamo v primeru algebre $\mathcal{A}$ opraviti z več hiperrefleksivnimi objekti, saj je po [29, Proposition 3.11] algebra $\mathbb{C}I$ hiperrefleksivna in velja $\kappa(\mathbb{C}I) = 1$. V [10] obravnavamo k -hiperrefleksivnost sledeče posplošitve algebre $\mathcal{A}$.

Naj bodo $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_n$ kompleksni separabilni Hilbertovi prostori. Z $\mathcal{B}(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j)$ označimo prostor vseh omejenih linearnih operatorjev, ki slikajo iz $\mathcal{H}_i$ v $\mathcal{H}_j$. Naj bo $\mathcal{S}_{ij} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_j, \mathcal{H}_i)$ zaprt podprostor, kjer je $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Definirajmo

$$\mathcal{S}_n = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{11} & \dots & \mathcal{S}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{S}_{n1} & \dots & \mathcal{S}_{nn} \end{pmatrix} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n). \quad (4.1.1)$$

Po Izreku 2.1.5 že vemo, da je prostor oblike (4.1.1) k -refleksiven natanko tedaj, ko so $\mathcal{S}_{ij}$ k -refleksivni prostori za vse $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Sedaj pa nas zanima še, kdaj je $\mathcal{S}_n$ k -hiperrefleksiven prostor in ali je mogoče smiselno oceniti $\kappa_k(\mathcal{S}_n)$. Izkaže se, da velja sledeče.

Izrek 4.1.2. *Naj bo prostor $\mathcal{S}_n$ definiran kot v (4.1.1). Tedaj je prostor $\mathcal{S}_n$ k -hiperrefleksiven natanko tedaj, ko so prostori $\mathcal{S}_{ij}$ k -hiperrefleksivni za vse $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Pri tem velja še ocena*

$$\max \left\{ \kappa_k(\mathcal{S}_{ij}) : i, j \in \{1, \dots, n\} \right\} \leq \kappa_k(\mathcal{S}_n) \leq \sum_{i,j=1}^n \kappa_k(\mathcal{S}_{ij}).$$

Dokaz. Označimo $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n$. Za začetek si oglejmo strukturo $(\mathcal{S}_n)_\perp$. Naj bo $k \in \{1, \dots, n\}$ in naj bo $\{\varphi_{kj}\}_{j \in \mathbb{N}}$ kompleten ortonormiran sistem v $\mathcal{H}_k$. Definirajmo vektor $\tilde{\varphi}_{kj} = (0, \dots, 0, \varphi_{kj}, 0, \dots, 0) \in \mathcal{H}$, ki ima neničelno le k -to komponento. Tedaj je $\bigcup_{k=1}^n \{\tilde{\varphi}_{kj} : j \in \mathbb{N}\}$ kompleten ortonormiran sistem v $\mathcal{H}$. Hitro lahko vidimo, da je

$$(\mathcal{S}_n)_\perp = \begin{pmatrix} (\mathcal{S}_{11})_\perp & \dots & (\mathcal{S}_{1n})_\perp \\ \vdots & & \vdots \\ (\mathcal{S}_{n1})_\perp & \dots & (\mathcal{S}_{nn})_\perp \end{pmatrix} \subseteq \mathcal{C}_1(\mathcal{H}).$$

Pri tem je $(\mathcal{S}_{ij})_\perp$ podprostor v $\mathcal{C}_1(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j)$, prostoru vseh operatorjev s sledjo, ki slikajo iz $\mathcal{H}_i$ v $\mathcal{H}_j$. Predpostavimo, da je $\mathcal{S}_n$ k -hiperrefleksiven prostor. Naj bosta $i_0, j_0 \in \{1, \dots, n\}$ in naj bo $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{j_0}, \mathcal{H}_{i_0})$. Naj bo $\tilde{T} = (T_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operator, ki ima edino neničelno komponento na mestu (i_0, j_0) , in sicer naj bo $T_{i_0 j_0} = T$. Za poljuben podprostor $\mathcal{S}$ označimo $\mathcal{B}_\mathcal{S} = \{S \in \mathcal{S} : \|S\| \leq 1\}$. Tedaj velja

$$\begin{aligned} \text{dist}(T, \mathcal{S}_{i_0 j_0}) &= \text{dist}(\tilde{T}, \mathcal{S}_n) \\ &\leq \kappa_k(\mathcal{S}_n) \sup \left\{ |\text{tr}(\tilde{T}C)| : C = (C_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{B}_{(\mathcal{S}_n)_\perp} \cap \mathcal{F}_k(\mathcal{H}) \right\} \\ &\leq \kappa_k(\mathcal{S}_n) \sup \left\{ |\text{tr}(TC_{j_0 i_0})| : C_{j_0 i_0} \in \mathcal{B}_{(\mathcal{S}_{i_0 j_0})_\perp} \cap \mathcal{F}_k(\mathcal{H}_{i_0}, \mathcal{H}_{j_0}) \right\} \\ &= \kappa_k(\mathcal{S}_n) \alpha_k(T, \mathcal{S}_{i_0 j_0}). \end{aligned}$$

Dokazali smo, da je prostor $\mathcal{S}_{i_0 j_0}$ k -hiperrefleksiven ter da velja $\kappa_k(\mathcal{S}_{i_0 j_0}) \leq \kappa_k(\mathcal{S}_n)$ za vse $i_0, j_0 \in \{1, \dots, n\}$. Sedaj predpostavimo, da je $\mathcal{S}_{ij}$ k -hiperrefleksiven prostor za vse pare indeksov $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Naj bosta $\tilde{S} = (S_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{S}_n$ in $\tilde{T} = (T_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ poljubna. Naj bo C poljuben element prostora $(\mathcal{S}_n)_\perp$ in naj bo $C = (C_{ij})_{i,j=1}^n$ operatorska matrika, ki reprezentira operator C . Po predpostavki za vsak C_{ij} obstaja družina operatorjev $\{C_{ij,m}\}_{m \in \mathbb{N}} \subseteq (\mathcal{S}_{ji})_\perp$ ranga največ k , za katero velja $C_{ij} = \sum_{m \in \mathbb{N}} C_{ij,m}$ in $\sum_{m \in \mathbb{N}} \|C_{ij,m}\|_1 < \infty$. Za $i, j \in \{1, \dots, n\}$ definirajmo operator $\tilde{C}_{ij,m} = (\tilde{C}_{pq})_{p,q=1}^n \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$, pri čemer je $\tilde{C}_{pq} = 0$ za $p \neq i$ in $q \neq j$ ter $\tilde{C}_{ij} = C_{ij,m}$. Tedaj je $\tilde{C}_{ij,m}$ element $(\mathcal{S}_n)_\perp$ ranga največ k in $C = \sum_{i,j=1}^n \sum_{m=1}^\infty \tilde{C}_{ij,m}$. Očitno lahko pišemo $C = \sum_{r=1}^\infty D_r$, kjer so D_r zgolj ustrezno preimenovani sumandi $\tilde{C}_{ij,m}$. Ker za vse $1 \leq i, j \leq n$ velja $\sum_{m=1}^\infty \|C_{ij,m}\|_1 < \infty$, sledi $\sum_{i,j=1}^n \sum_{m=1}^\infty \|\tilde{C}_{ij,m}\|_1 < \infty$. Torej je $\sum_{r=1}^\infty \|D_r\|_1 < \infty$ in prostor $\mathcal{S}_n$ je k -hiperrefleksiven po Izreku 4.1.1.

Preveriti moramo še, da veljajo ocene k -hiperrefleksivnostnih konstant. Naj bo $C = (C_{ij})_{i,j=1}^n \in (\mathcal{S}_n)_\perp$ in izberimo poljuben $\varepsilon > 0$. Za vse pare indeksov $i, j \in \{1, \dots, n\}$ lahko najdemo takšno družino $\{C_{ij,m}\}_{m \in \mathbb{N}} \subseteq (\mathcal{S}_{ji})_\perp$ operatorjev ranga največ k , da velja $C_{ij} = \sum_{m=1}^\infty C_{ij,m}$, $\sum_{m=1}^\infty \|C_{ij,m}\|_1 < \infty$ in $\sum_{m=1}^\infty \|C_{ij,m}\|_1 \leq k_k(C_{ij}, (\mathcal{S}_{ji})_\perp) + \frac{\varepsilon}{n^2}$. Naj bosta $\tilde{C}_{ij,m}$ in D_r kot prej. Tedaj je $\bigcup_{i,j=1}^n \{\tilde{C}_{ij,m} : m \in \mathbb{N}\} = \{D_r : r \in \mathbb{N}\}$ družina elementov prostora $(\mathcal{S}_n)_\perp$ ranga največ k , za katero velja $C = \sum_{i,j=1}^n \sum_{m=1}^\infty \tilde{C}_{ij,m} = \sum_{r=1}^\infty D_r$ ter $\sum_{i,j=1}^n \sum_{m=1}^\infty \|\tilde{C}_{ij,m}\|_1 = \sum_{r=1}^\infty \|D_r\|_1 < \infty$. Tedaj velja

$$\kappa_k(C, \mathcal{S}_n) \leq \sum_{i,j=1}^n \sum_{m=1}^\infty \|\tilde{C}_{ij,m}\|_1 = \sum_{i,j=1}^n \sum_{m=1}^\infty \|C_{ij,m}\|_1 \leq \sum_{i,j=1}^n \kappa_k(C_{ij}, \mathcal{S}_{ji}) + \varepsilon.$$

Ker je ε poljuben, po Izreku 4.1.1 sledi $\kappa_k(\mathcal{S}_n) \leq \sum_{i,j=1}^n \kappa_k(\mathcal{S}_{ij})$ in dokaz je zaključen. $\square$

Opomba 4.1.3. Izkaže se, da je spodnja meja v Izreku 4.1.2 optimalna. Naj bo $n = 2$, $m \geq 2$ in $\mathcal{H} = \mathbb{C}^m$. Če postavimo $\mathcal{S}_{21} = 0$, $\mathcal{S}_{12} = \mathbb{M}_m$ in $\mathcal{S}_{11} = \mathcal{S}_{22} = \mathbb{T}_m$, kjer $\mathbb{T}_m \subset \mathbb{M}_m$ označuje podalgebro zgornjetrikotnih matrik, dobimo $\mathcal{S}_2 = \mathbb{T}_{2m}$. Algebra zgornje trikotnih matrik je končno razsežen primer gnezde algebre, za slednje pa po [2, Theorem 1.1] velja, da so hiperrefleksivne s konstanto 1. Torej je $\kappa_k(\mathcal{S}_2) = 1$ in ker velja $\kappa_k(\mathbb{M}_m) = 1$, je spodnja meja v Izreku 4.1.2 res dosežena.

Opomba 4.1.4. Oglejmo si še en primer ocen v Izreku 4.1.2. Naj bo $n = 2$, $\mathcal{S}_{12} = \mathcal{S}_{21} = \{0\}$ ter $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathbb{D}_3$, kjer je $\mathbb{D}_3$ algebra diagonalnih 3×3 matrik. Za tako izbrane parametre se ocena v Izreku 4.1.2 glasi $\kappa(\mathcal{S}_2) < 2(1 + \sqrt{3/2})$, saj sta Davidson in Ordower [14] dokazala, da je $\kappa(\mathbb{D}_3) = \sqrt{3/2}$. Ker pa je $\mathcal{S}_2$ v posebnem komutativna von Neumannova algebra, lahko po [43, Theorem 3.5] dobimo še boljšo oceno hiperrefleksivnostne konstante, in sicer velja $\kappa(\mathcal{S}_2) \leq 2$.

4.2 Odvisnost od kotov med Hilbertovimi prostori

Do sedaj smo se ukvarjali s prostori omejenih linearnih operatorjev nad ortogonalnimi direktnimi vsotami Hilbertovih podprostorov. V nadaljevanju si bomo ogledali splošnejšo situacijo. Naj bosta $\mathcal{H}_1$ in $\mathcal{H}_2$ netrivialna zaprta podprostora Hilbertovega prostora $\mathcal{H}$, za katera velja $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$ in $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$. Kot $\varphi = \varphi(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ med podprostoroma $\mathcal{H}_1$ in $\mathcal{H}_2$ je definiran s predpisom

$$\cos \varphi = \sup\{|\langle x, y \rangle| : x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2 \text{ in } \|x\| = \|y\| = 1\}.$$

Znano je, da je $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ zaprt podprostor prostora $\mathcal{H}$ natanko tedaj, ko je kot med podprostoroma $\mathcal{H}_1$ in $\mathcal{H}_2$ strogo večji od 0. V nadaljevanju privzemimo, da je $\varphi(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \in (0, \pi/2]$ in pišimo $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus_\varphi \mathcal{H}_2$. V primeru $\varphi = \frac{\pi}{2}$ uporabimo običajen simbol $\oplus$, torej s $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ označimo ortogonalno direktno vsoto podprostorov. Motivacija za ta razdelek so bili rezultati Bessonova, Bračiča in Zajaca v [7].

Naj bo $0 < \psi \leq \frac{\pi}{2}$. Naj bosta $\mathcal{K}$ in $\mathcal{L}$ takšna netrivialna zaprta podprostora Hilbertovega prostora $\mathcal{H}$, da obstajata izometrična izomorfizma $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{K}$ in $V : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{L}$ ter velja $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus_\psi \mathcal{L}$.

Lema 4.2.1. Naj bosta $x \in \mathcal{H}_1$ in $y \in \mathcal{H}_2$ vektorja, za katera je $\|x + y\| \neq 0$. Tedaj velja

$$\frac{1 - \cos \psi}{1 + \cos \varphi} \leq \frac{\|Ux + Vy\|^2}{\|x + y\|^2} \leq \frac{1 + \cos \psi}{1 - \cos \varphi}. \quad (4.2.1)$$

Dokaz. Postavimo $x' = \frac{x}{\sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}}$ in $y' = \frac{y}{\sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}}$. Za tako izbrana vektorja x' in y' velja $\|x'\|^2 + \|y'\|^2 = 1$, zato po [7, Lemma 1.6] sledi $1 - \cos \varphi \leq \|x' + y'\|^2 \leq 1 + \cos \varphi$. Od tod dobimo

$$1 - \cos \varphi \leq \frac{\|x+y\|^2}{\|x\|^2 + \|y\|^2} \leq 1 + \cos \varphi. \quad (4.2.2)$$

Sedaj nadomestimo vektor x z vektorjem Ux , vektor y pa z vektorjem Vy . Potem je

$$1 - \cos \psi \leq \frac{\|Ux+Vy\|^2}{\|Ux\|^2 + \|Vy\|^2} \leq 1 + \cos \psi. \quad (4.2.3)$$

Upoštevajmo, da sta U in V izometriji; oceni v (4.2.1) tedaj dobimo, če združimo (4.2.2) in (4.2.3). $\square$

Vsak vektor $z \in \mathcal{H}$ ima enoličen zapis oblike $z = x + y$, kjer je $x \in \mathcal{H}_1$ in $y \in \mathcal{H}_2$. Zato lahko definiramo preslikavo

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi(\varphi, \psi, U, V) : \mathcal{H}_1 \oplus_{\varphi} \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H} \oplus_{\psi} \mathcal{L} \\ \Phi(x + y) &= Ux + Vy. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Glede na razcepa $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus_{\varphi} \mathcal{H}_2$ in $\mathcal{H} = \mathcal{H} \oplus_{\psi} \mathcal{L}$ lahko preslikavo Φ predstavimo z bločno diagonalno operatorsko matriko $\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$. Očitno je, da je preslikava Φ obrnljiv omejen linearen operator. Povemo lahko še nekoliko več.

Trditev 4.2.2. *Naj bo Φ operator, definiran s predpisom v (4.2.4). Tedaj velja*

$$\sqrt{\frac{1-\cos \psi}{1+\cos \varphi}} \leq \|\Phi\| \leq \sqrt{\frac{1+\cos \psi}{1-\cos \varphi}} \quad \text{in} \quad \sqrt{\frac{1-\cos \varphi}{1+\cos \psi}} \leq \|\Phi^{-1}\| \leq \sqrt{\frac{1+\cos \varphi}{1-\cos \psi}}.$$

Dokaz. Iz ocen v (4.2.1) takoj dobimo $\|\Phi\| \leq \sqrt{\frac{1+\cos \psi}{1-\cos \varphi}}$, od koder zaradi podobnosti sledi tudi $\|\Phi^{-1}\| \leq \sqrt{\frac{1+\cos \varphi}{1-\cos \psi}}$. Upoštevajmo, da velja $\|\Phi^{-1}\|^{-1} \leq \|\Phi\|$, pa dobimo še neenakosti $\sqrt{\frac{1-\cos \psi}{1+\cos \varphi}} \leq \|\Phi\|$ in $\sqrt{\frac{1-\cos \varphi}{1+\cos \psi}} \leq \|\Phi^{-1}\|$. $\square$

Natančno vrednost $\|\Phi\|$ lahko podamo, če izometriji U in V zadoščata nekaterim dodatnim pogojem, kot lahko vidimo v naslednjem izreku.

Izrek 4.2.3. *Naj bo operator Φ podan s predpisom v (4.2.4). Predpostavimo, da izometriji U in V zadoščata naslednjima pogojema:*

- (i) če za $x \in \mathcal{H}_1$ in $y \in \mathcal{H}_2$ velja $\langle x, y \rangle \neq 0$, potem je $\frac{\langle Ux, Vy \rangle}{\langle x, y \rangle} \leq 0$;
- (ii) če za enotska vektorja $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$ in $\varepsilon > 0$ velja $\cos \varphi \leq |\langle x, y \rangle| + \varepsilon$, potem je $\cos \psi \leq |\langle Ux, Vy \rangle| + \varepsilon$.

Tedaj velja

$$\|\Phi\| = \sqrt{\frac{1+\cos \psi}{1-\cos \varphi}}. \quad (4.2.5)$$

Dokaz. Zadošča videti, da je $\|\Phi\| \geq \sqrt{\frac{1+\cos \psi}{1-\cos \varphi}}$, saj obratna neenakost velja po Trditvi 4.2.2. Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Po definiciji kota med podprostoroma $\mathcal{H}_1$ in $\mathcal{H}_2$ obstajata takšna enotska vektorja $x \in \mathcal{H}_1$ in $y \in \mathcal{H}_2$, da je $\cos \varphi \leq |\langle x, y \rangle| + \varepsilon$. Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo, da velja $\langle x, y \rangle < 0$, sicer x nadomestimo z vektorjem $-\frac{|\langle x, y \rangle|}{\langle x, y \rangle} x$. Ker po predpostavki U in V zadoščata pogojema (i) in (ii), velja $\langle Ux, Vy \rangle \geq 0$ in $\cos \psi \leq |\langle Ux, Vy \rangle| + \varepsilon$. Zato je

$$\begin{aligned} \left\| \Phi \left(\frac{x+y}{\|x+y\|} \right) \right\|^2 &= \frac{\|Ux+Vy\|^2}{\|x+y\|^2} = \frac{\|Ux\|^2 + \|Vy\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle Ux, Vy \rangle}{\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle} \\ &= \frac{2+2|\langle Ux, Vy \rangle|}{2-2|\langle x, y \rangle|} \geq \frac{1+\cos \psi - \varepsilon}{1-\cos \varphi + \varepsilon} \end{aligned}$$

in dokaz je končan. $\square$

Opazimo lahko, da so pogoji Izreka 4.2.3 avtomatično izpolnjeni, če je $\psi = \frac{\pi}{2}$. V tem primeru namreč velja $\langle Ux, Vy \rangle = 0$ za poljubna vektorja $x \in \mathcal{H}_1$ in $y \in \mathcal{H}_2$.

Posledica 4.2.4. *Naj bo operator Φ podan s predpisom v (4.2.4). Če je $\mathcal{H} = \mathcal{L}^\perp$, potem velja $\|\Phi\| = \frac{1}{\sqrt{1-\cos\varphi}}$ in $\|\Phi^{-1}\| = \sqrt{1+\cos\varphi}$.*

Dokaz. Enakost $\|\Phi\| = \frac{1}{\sqrt{1-\cos\varphi}}$ sledi neposredno iz Izreka 4.2.3, saj sta ob danih predpostavkah pogoja (i) in (ii) izpolnjena. Neenakost $\|\Phi^{-1}\| \leq \sqrt{1+\cos\varphi}$ sledi po Trditvi 4.2.2, zato moramo preveriti le, da velja tudi obratna neenakost. Naj bo $\varphi > 0$ poljuben in naj bosta $x \in \mathcal{H}_1$ in $y \in \mathcal{H}_2$ enotska vektorja, ki zadoščata $\cos\varphi - \varepsilon \leq |\langle x, y \rangle|$. Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo, da je $\langle x, y \rangle > 0$. Tedaj je

$$\|\Phi^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}(x \oplus y))\|^2 = \frac{1}{2}\|x + y\|^2 = 1 + |\langle x, y \rangle| \geq 1 + \cos\varphi - \varepsilon$$

in zato velja $\|\Phi^{-1}\| \geq \sqrt{1+\cos\varphi}$. $\square$

S pomočjo Izreka 4.1.1 lahko dokažemo posplošitev [25, Proposition 1.3] v kontekstu k -hiperrefleksivnosti, ki jo bomo potrebovali v nadaljevanju.

Izrek 4.2.5. *Naj bo $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ zaprt linearen podprostor in naj bosta $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ obrnljiva linearna operatorja. Prostor $\mathcal{S}$ je k -hiperrefleksiven natanko tedaj, ko je T_1ST_2 k -hiperrefleksiven prostor. Pri tem veljata še oceni*

$$\frac{1}{\|T_1\| \|T_2\| \|T_1^{-1}\| \|T_2^{-1}\|} \kappa_k(\mathcal{S}) \leq \kappa_k(T_1ST_2) \leq \|T_1\| \|T_2\| \|T_1^{-1}\| \|T_2^{-1}\| \kappa_k(\mathcal{S}).$$

Dokaz. Najprej dokažimo, da velja $(T_1ST_2)_\perp = T_2^{-1}\mathcal{S}_\perp T_1^{-1}$. Naj bo $C \in (T_1ST_2)_\perp$. Tedaj za vsak $S \in \mathcal{S}$ velja $\text{tr}(CT_1ST_2) = \text{tr}(T_2CT_1S) = 0$. Torej je $C \in (T_1ST_2)_\perp$ natanko tedaj, ko je $T_2CT_1 \in \mathcal{S}_\perp$ oziroma natanko tedaj, ko je $C \in T_2^{-1}\mathcal{S}_\perp T_1^{-1}$. Denimo, da je $\mathcal{S}$ k -hiperrefleksiven prostor in naj bo $D \in (T_1ST_2)_\perp$. Po prejšnjem obstaja $C \in \mathcal{S}_\perp$, da velja $D = T_2^{-1}CT_1^{-1}$. Hkrati po predpostavki obstaja družina $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}_\perp \cap \mathcal{F}_k(\mathcal{H})$, za katero velja $C = \sum_{n=1}^\infty C_n$ in $\sum_{n=1}^\infty \|C_n\|_1 < \infty$. Tedaj je $D = \sum_{n=1}^\infty T_2^{-1}C_nT_1^{-1}$, pri tem pa velja $\{T_2^{-1}C_nT_1^{-1}\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (T_1ST_2)_\perp \cap \mathcal{F}_k(\mathcal{H})$ in

$$\sum_{n=1}^\infty \|T_2^{-1}C_nT_1^{-1}\|_1 \leq \|T_1^{-1}\| \|T_2^{-1}\| \sum_{n=1}^\infty \|C_n\|_1 < \infty.$$

Po Izreku 4.1.1 sledi, da je tudi T_1ST_2 k -hiperrefleksiven prostor. Obratna implikacija se dokaže podobno. Preverimo še, da veljajo ocene k -hiperrefleksivnostnih konstant. Naj bo $D \in (T_1ST_2)_\perp$ in naj bo $C \in \mathcal{S}_\perp$ tisti operator, za katerega velja $D = T_2^{-1}CT_1^{-1}$. Iz pravkar dokazanega tedaj sledi, da velja

$$\begin{aligned} \kappa_k(D, (T_1ST_2)_\perp) &= \inf \left\{ \sum_{n=1}^\infty \|T_2^{-1}C_nT_1^{-1}\|_1 : C = \sum_{n=1}^\infty C_n, \{C_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}_\perp \cap \mathcal{F}_k(\mathcal{H}) \right\} \\ &\leq \|T_1^{-1}\| \|T_2^{-1}\| \kappa_k(C, \mathcal{S}_\perp). \end{aligned}$$

Ker je $\{C \in \mathcal{S}_\perp : \|T_2^{-1}CT_1^{-1}\|_1 \leq 1\} \subseteq \{C \in \mathcal{S}_\perp : \|C\|_1 \leq \|T_1\| \|T_2\|\}$, dobimo z uporabo Izreka 4.1.1 naslednjo oceno

$$\begin{aligned} \kappa_k(T_1ST_2) &= \sup \{ \kappa_k(D, (T_1ST_2)_\perp) : D \in (T_1ST_2)_\perp \text{ in } \|D\|_1 \leq 1 \} \\ &\leq \|T_1^{-1}\| \|T_2^{-1}\| \sup \{ \kappa_k(C, \mathcal{S}_\perp) : C \in \mathcal{S}_\perp \text{ in } \|T_2^{-1}CT_1^{-1}\|_1 \leq 1 \} \\ &\leq \|T_1^{-1}\| \|T_2^{-1}\| \sup \{ \kappa_k(C, \mathcal{S}_\perp) : C \in \mathcal{S}_\perp \text{ in } \|C\|_1 \leq \|T_1\| \|T_2\| \} \\ &\leq \|T_1\| \|T_2\| \|T_1^{-1}\| \|T_2^{-1}\| \sup \{ \kappa_k(C, \mathcal{S}_\perp) : C \in \mathcal{S}_\perp \text{ in } \|C\|_1 \leq 1 \} \\ &= \|T_1\| \|T_2\| \|T_1^{-1}\| \|T_2^{-1}\| \kappa_k(\mathcal{S}). \end{aligned}$$

Iz pravkar dokazane neenakosti takoj sledi še

$$\kappa_k(\mathcal{S}) \leq \|T_1\| \|T_2\| \|T_1^{-1}\| \|T_2^{-1}\| \kappa_k(T_1 \mathcal{S} T_2),$$

kar zaključuje dokaz. $\square$

Z uporabo Izreka 4.2.5 dobimo naslednjo posplošitev [7, Corollary 1.2].

Posledica 4.2.6. *Naj bo $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ k -hiperrefleksiven prostor ter U in V poljubna unitarna operatorja na $\mathcal{H}$. Tedaj je k -hiperrefleksiven tudi prostor USV in velja $\kappa_k(USV) = \kappa_k(\mathcal{S})$.*

Posledica 4.2.7. *Naj bodo $\mathcal{S}_{11} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mathcal{S}_{22} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{L})$, $\mathcal{S}_{12} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{L}, \mathcal{H})$ in $\mathcal{S}_{21} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{L})$ šibko* zaprti linearni podprostor. Naj bo operator Φ podan s predpisom v (4.2.4). Definirajmo prostora*

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{11} & \mathcal{S}_{12} \\ \mathcal{S}_{21} & \mathcal{S}_{22} \end{pmatrix} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus_\psi \mathcal{L}) \quad \text{in} \quad \mathcal{T}' = \Phi^{-1} \mathcal{T} \Phi \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \oplus_\varphi \mathcal{H}_2).$$

Tedaj velja sledeče.

- (i) *Prostor $\mathcal{T}'$ je k -refleksiven natanko tedaj, ko je $\mathcal{T}$ k -refleksiven prostor.*
- (ii) *Prostor $\mathcal{T}'$ je k -hiperrefleksiven natanko tedaj, ko je $\mathcal{T}$ k -hiperrefleksiven prostor. Pri tem veljata še oceni*

$$\frac{(1 - \cos \varphi)(1 - \cos \psi)}{(1 + \cos \varphi)(1 + \cos \psi)} \kappa_k(\mathcal{T}) \leq \kappa_k(\mathcal{T}') \leq \frac{(1 + \cos \varphi)(1 + \cos \psi)}{(1 - \cos \varphi)(1 - \cos \psi)} \kappa_k(\mathcal{T}).$$

Dokaz. Točka (i) je posledica Izreka 4.2.5 (i), točko (ii) pa dobimo iz Izreka 4.2.5 (ii), če upoštevamo Trditev 4.2.2. $\square$

V nadaljevanju si ogledamo nekoliko drugačno situacijo. Naj bosta $\mathcal{H}'_1$ in $\mathcal{H}'_2$ takšna zaprta netrivialna podprostor v $\mathcal{H}$, da velja $\mathcal{H} = \mathcal{H}'_1 \oplus_\psi \mathcal{H}'_2$ in $\mathcal{H}'_1 \cap \mathcal{H}'_2 = \{0\}$. Predpostavimo še, da sta podprostor $\mathcal{H}'_1$ in $\mathcal{H}'_2$ zaporedoma izometrično izomorfna podprostoroma $\mathcal{H}_1$ in $\mathcal{H}_2$. Naj bo $\mathcal{M}$ takšen zaprt netrivialen podprostor v $\mathcal{H}$, da je $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ in predpostavimo, da sta $\mathcal{M}$ in $\mathcal{M}^\perp$ zaporedoma izometrično izomorfna podprostoroma $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}'_1$ in $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}'_2$. Torej, obstajajo izometrični izomorfizmi $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{M}$, $U' : \mathcal{H}'_1 \rightarrow \mathcal{M}$, $V : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{M}^\perp$ in $V' : \mathcal{H}'_2 \rightarrow \mathcal{M}^\perp$. Definirajmo preslikavi

$$\begin{aligned} \Phi_\varphi : \mathcal{H}_1 \oplus_\varphi \mathcal{H}_2 &\rightarrow \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp, & \Phi(x + y) &= Ux \oplus Vy, \\ \Phi_\psi : \mathcal{H}'_1 \oplus_\psi \mathcal{H}'_2 &\rightarrow \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp, & \Phi(x + y) &= U'x \oplus V'y. \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Trditev 4.2.8. *Naj bodo $\mathcal{S}_{11} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{M})$, $\mathcal{S}_{22} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{M}^\perp)$, $\mathcal{S}_{12} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{M}^\perp, \mathcal{M})$ in $\mathcal{S}_{21} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{M}, \mathcal{M}^\perp)$ šibko* zaprti linearni podprostor. Definirajmo prostora*

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{11} & \mathcal{S}_{12} \\ \mathcal{S}_{21} & \mathcal{S}_{22} \end{pmatrix} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp), \quad \mathcal{R}' = \Phi_\psi^{-1} \mathcal{T} \Phi_\varphi \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \oplus_\varphi \mathcal{H}_2, \mathcal{H}'_1 \oplus_\psi \mathcal{H}'_2).$$

Tedaj velja sledeče.

- (i) *Prostor $\mathcal{R}'$ je k -refleksiven natanko tedaj, ko je $\mathcal{R}$ k -refleksiven prostor.*

- (ii) *Prostor $\mathcal{R}'$ je k -hiperrefleksiven natanko tedaj, ko je $\mathcal{R}$ k -hiperrefleksiven prostor. Pri tem veljata še oceni*

$$\sqrt{\frac{(1 - \cos \varphi)(1 - \cos \psi)}{(1 + \cos \varphi)(1 + \cos \psi)}} \kappa(\mathcal{R}) \leq \kappa(\mathcal{R}') \leq \sqrt{\frac{(1 + \cos \varphi)(1 + \cos \psi)}{(1 - \cos \varphi)(1 - \cos \psi)}} \kappa(\mathcal{R}).$$

Dokaz. Točka (i) velja po Izreku 4.2.5 (i). Po Posledici 4.2.4 imamo

$$\|\Phi_\varphi\| \|\Phi_\psi\| \|\Phi_\varphi^{-1}\| \|\Phi_\psi^{-1}\| = \sqrt{\frac{(1 + \cos \varphi)(1 + \cos \psi)}{(1 - \cos \varphi)(1 - \cos \psi)}},$$

zato (ii) sledi iz Izreka 4.2.5 (ii). $\square$

V nadaljevanju si ogledamo linearni prostor operatorjev $\mathcal{S}_n$, definiran podobno kot v (4.1.1), vendar nad ne nujno ortogonalno direktno vsoto Hilbertovih prostorov. Naj bo φ_{n-1} kot med prostoroma $\mathcal{H}_{n-1}$ in $\mathcal{H}_n$, φ_j pa kot med prostoroma $\mathcal{H}_j$ ter $\mathcal{H}_{j+1} \oplus \varphi_{j+1} \dots \oplus \varphi_{n-1} \mathcal{H}_n$ za $1 \leq j \leq n-2$. Definirajmo

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus_{\varphi_1} \mathcal{H}_2 \oplus_{\varphi_2} \dots \oplus_{\varphi_{n-1}} \mathcal{H}_n.$$

Za vsak par indeksov $i, j \in \{1, \dots, n\}$ naj bo $\mathcal{S}_{ij} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_j, \mathcal{H}_i)$ zaprt linearen podprostor. Definirajmo

$$\mathcal{S}_n = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{11} & \dots & \mathcal{S}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{S}_{n1} & \dots & \mathcal{S}_{n,n} \end{pmatrix} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}). \quad (4.2.7)$$

Očitno je $\mathcal{S}_n$ zaprt linearen podprostor v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Naj bo $\mathcal{K}_1 = \mathcal{H}_2 \oplus_{\varphi_2} \dots \oplus_{\varphi_{n-1}} \mathcal{H}_n$ in naj bo $U_1 : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{K}_1^\perp$ izometrični izomorfizem. Naj bo $\Phi_1 : \mathcal{H}_1 \oplus_{\varphi_1} \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K}_1^\perp \oplus \mathcal{K}_1$ preslikava, podana s predpisom $\Phi_1 = U_1 \oplus \text{id}_{\mathcal{K}_1}$. Za $j \in \{2, \dots, n-1\}$ postavimo

$$\mathcal{K}_j = \mathcal{H}_{j+1} \oplus_{\varphi_{j+1}} \dots \oplus_{\varphi_{n-1}} \mathcal{H}_n$$

in naj bo $U_j : \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{K}_j^\perp$ izometrični izomorfizem, kjer je $\mathcal{K}_j^\perp$ ortogonalni komplement prostora $\mathcal{K}_j$ glede na Hilbertov prostor $\mathcal{H}_{j-1}$. Sedaj si oglejmo preslikavo

$$\Phi_j : \mathcal{K}_1^\perp \oplus \dots \oplus \mathcal{K}_{j-1}^\perp \oplus \mathcal{H}_j \oplus_{\varphi_j} \mathcal{K}_j \rightarrow \mathcal{K}_1^\perp \oplus \dots \oplus \mathcal{K}_{j-1}^\perp \oplus \mathcal{K}_j^\perp \oplus \mathcal{K}_j$$

podano s predpisom $\Phi_j = \text{id}_{\mathcal{K}_1^\perp \oplus \dots \mathcal{K}_{j-1}^\perp} \oplus U_j \oplus \text{id}_{\mathcal{K}_j}$. Preslikava Φ_j je očitno obrnljiv omejen linearen operator na prostoru $\mathcal{H}$ za vsak $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Če postavimo $\Phi = \Phi_{n-1} \circ \dots \circ \Phi_1$, potem je tudi tako definirana preslikava Φ obrnljiv omejen linearen operator na prostoru $\mathcal{H}$.

Trditev 4.2.9. *Naj bo prostor $\mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definiran kot v (4.2.7) in naj bo $\mathcal{S}'_n = \Phi \mathcal{S}_n \Phi^{-1}$. Tedaj velja sledeče.*

- (i) *Prostor $\mathcal{S}_n$ je k -refleksiven natanko tedaj, ko je $\mathcal{S}'_n$ k -refleksiven prostor.*
(ii) *Prostor $\mathcal{S}_n$ je k -hiperrefleksiven natanko tedaj, ko je $\mathcal{S}'_n$ k -hiperrefleksiven prostor. Pri tem veljata še oceni*

$$\prod_{j=1}^{n-1} \frac{1 - \cos \varphi_j}{1 + \cos \varphi_j} \kappa(\mathcal{S}'_n) \leq \kappa(\mathcal{S}_n) \leq \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1 + \cos \varphi_j}{1 - \cos \varphi_j} \kappa(\mathcal{S}'_n).$$

Dokaz. Točka (i) je posledica Izreka 4.2.5 (i). Po Posledici 4.2.4 velja $\|\Phi_j\| = \frac{1}{\sqrt{1-\cos\varphi_j}}$ in $\|\Phi_j^{-1}\| = \sqrt{1+\cos\varphi_j}$, zato je

$$\|\Phi\| \leq \prod_{j=1}^{n-1} \|\Phi_j\| = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-\cos\varphi_j}} \quad \text{in} \quad \|\Phi^{-1}\| \leq \prod_{j=1}^{n-1} \|\Phi_j^{-1}\| = \prod_{j=1}^{n-1} \sqrt{1+\cos\varphi_j}.$$

Ker je $\|\Phi\|^2 \|\Phi^{-1}\|^2 \leq \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1+\cos\varphi_j}{1-\cos\varphi_j}$, točka (ii) sledi iz Izreka 4.2.5 (ii). $\square$

4.3 Nizko razsežne algebre matrik

Naj bo n naravno število in naj bo $\mathbb{D}_n \subset \mathbb{M}_n$ podalgebra vseh kompleksnih diagonalnih $n \times n$ matrik. Ker je $\mathbb{D}_n$ končno razsežna komutativna von Neumannova algebra, je po [43, Theorem 3.5] hiperrefleksivna in velja $\kappa(\mathbb{D}_n) \leq 2$. Hitro vidimo, da velja $\kappa(\mathbb{D}_2) = 1$. Res, ker je

$$(\mathbb{D}_2)_\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\},$$

za vsak $C \in (\mathbb{D}_2)_\perp$ velja $\kappa_k(C, (\mathbb{D}_2)_\perp) = \|C\|_1$ in po Izreku 4.1.1 sledi $\kappa(\mathbb{D}_2) = 1$. Vendar pa natančna vrednost $\kappa(\mathbb{D}_n)$ ni znana za $n \geq 4$. Tako je že izračun hiperrefleksivnostne konstante za algebro $\mathbb{D}_3$ precej težji problem. Davidson in Ordower sta v [14, Theorem 2.3] s prevedbo na problem napolnitve matrik dokazala, da velja $\kappa(\mathbb{D}_3) = \sqrt{\frac{3}{2}}$. V istem članku sta avtorja dokazala še, da velja $\kappa(\mathbb{D}_4) \in \left[\sqrt{\frac{4}{9}\sqrt{2}+1}, \frac{3}{2} \right]$. Algebre oblike $\mathbb{D}_n$ so poseben primer algeber, ki imajo komutativno mrežo invariantnih podprostorov in so hiperrefleksivne. V splošnem je vsaka algebra s komutativno mrežo invariantnih podprostorov refleksivna in vsebuje maksimalno komutativno sebi-adjungirano algebro, ni pa nujno hiperrefleksivna, več o tem lahko bralec najde v [15].

V tem razdelku si ogledamo nekaj primerov nizko razsežnih algeber matrik, ki jih dobimo z bijektivnimi transformacijami algeber diagonalnih matrik, a nimajo komutativne mreže invariantnih podprostorov. Motivacija za omenjeno je članek Tosake [49], v katerem je obravnaval hiperrefleksivnost algebre $\mathcal{A} \subset \mathbb{M}_2$, ki ima natanko dva netrivialna invariantna podprostora, ki razpenjata cel prostor $\mathbb{C}^2$, njun presek pa je trivialen. To je najenostavnejši primer refleksivne algebre, ki nima komutativne mreže invariantnih podprostorov. V splošnem je znano, da je algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$, ki ima natanko dva netrivialna invariantna podprostora $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{H}$, za katera je $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \{0\}$ in $\overline{\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2} = \mathcal{H}$, hiperrefleksivna natanko tedaj, ko je $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ zaprt podprostor [26, 40].

Za začetek si oglejmo primer, ki ga je obravnaval Tosaka [49]. Naj bo $\varphi \in (0, \pi/2)$ in postavimo $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, $\mathcal{M}_1 = \{(x, 0) : x \in \mathbb{C}\}$ ter $\mathcal{M}_2 = \{(y, y \tan \varphi) : y \in \mathbb{C}\}$. Definirajmo

$$\mathcal{A}_\varphi = \{A \in \mathbb{M}_2 : A\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{M}_i \text{ za } i = 1, 2\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & (b-a)\cot\varphi \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}. \quad (4.3.1)$$

Če postavimo

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \cos\varphi \\ 0 & \sin\varphi \end{pmatrix},$$

lahko hitro preverimo, da je matrika R_φ obrnljiva in da velja $\mathcal{A}_\varphi = R_\varphi \mathbb{D}_2 R_\varphi^{-1}$. Tosaka [49] je dokazal, da je $\kappa(\mathcal{A}_\varphi) = \frac{1}{\sin\varphi}$, torej velja $\kappa(\mathbb{D}_2) < \kappa(R_\varphi \mathbb{D}_2 R_\varphi^{-1})$. V nadaljevanju obravnavamo podoben problem za eno izmed možnih posplošitev algebre $\mathbb{D}_3$ na algebro z nekomutativno mrežo invariantnih podprostorov.

Definirajmo $\mathcal{M}_1 = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{C}\}$, $\mathcal{M}_2 = \{(y, y \tan \varphi, 0) : y \in \mathbb{C}\}$ ter $\mathcal{M}_3 = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{C}\}$ in postavimo

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\varphi &= \{A \in \mathbb{M}_3 : A\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{M}_i \text{ za } i = 1, 2, 3\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & (b-a)\cot\varphi & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{C} \right\} \end{aligned}$$

Opazimo lahko, da ima algebra $\mathcal{B}_\varphi$ nekomutativno mrežo invariantnih podprostorov, ki jo lahko dobimo iz mreže invariantnih podprostorov algebre $\mathbb{D}_3$, če invariantni podprostor, napet na standardni enotski vektor $(0, 1, 0)$ premaknemo pod kot φ glede na invariantni podprostor, napet na standardni enotski vektor $(1, 0, 0)$. Če sedaj definiramo

$$S_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

lahko hitro preverimo, da je matrika S_φ obrnljiva in da velja $\mathcal{B}_\varphi = S_\varphi \mathbb{D}_3 S_\varphi^{-1}$. Ker velja

$$\|S\| = \sqrt{1 + \cos\varphi} \quad \text{in} \quad \|S^{-1}\| = \frac{\sqrt{1 + \cos\varphi}}{\sin\varphi},$$

je po Izreku 4.2.5 algebra $\mathcal{B}_\varphi$ hiperrefleksivna in velja

$$\left(\frac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi}\right)^2 \sqrt{\frac{3}{2}} \leq \kappa(\mathcal{B}_\varphi) \leq \left(\frac{1 + \cos\varphi}{\sin\varphi}\right)^2 \sqrt{\frac{3}{2}}. \quad (4.3.2)$$

Po drugi strani je $\mathcal{B}_\varphi = \mathcal{A}_\varphi \oplus \mathbb{C}$. Ker je $\kappa(\mathbb{C}) = 1$ in $\kappa(\mathcal{A}_\varphi) = 1/\sin\varphi$, po Trditvi 1.7.5 sledi še ocena

$$\frac{1}{\sin\varphi} \leq \kappa(\mathcal{B}_\varphi) \leq 1 + \frac{2}{\sin\varphi}. \quad (4.3.3)$$

Če je φ blizu $\frac{\pi}{2}$, so ocene (4.3.2) boljše kot ocene (4.3.3). Če pa je φ blizu 0, so boljše ocene (4.3.3). Opazimo lahko, da $\kappa(\mathcal{B}_\varphi)$ narašča proti $+\infty$ tako hitro kot $\frac{1}{\sin\varphi}$, če gre $\varphi \rightarrow 0$. Za izračun natančne vrednosti hiperrefleksivnostne konstante algebre $\mathcal{B}_\varphi$ ni mogoče uporabiti metod Davidsona in Ordowerja [14], s pomočjo katerih sta izračunala $\kappa(\mathbb{D}_3)$. Pogoji za uporabo teh metod je, da dana algebra vsebuje podalgebro diagonalnih matrik, kar v našem primeru ne velja. Prav tako ne deluje metoda Tosake v [49], s pomočjo katere je določil hiperrefleksivnostno konstanto algebre $\mathcal{A}_\varphi$, definirane v (4.3.1). V našem primeru je namreč $\dim((\mathcal{B}_\varphi)_\perp) = 6$, kar bistveno prispeva k zahtevnosti iskanja minimalnega razcepa poljubne matrike $T \in (\mathcal{B}_\varphi)_\perp$.

Zaključek

Kot smo videli v disertaciji, je na področju k -refleksivnosti, predvsem pa k -hiperrefleksivnosti odprtih še mnogo vprašanj. Ker je definicija k -refleksivnostnega defekta razmeroma mlada, obstaja veliko možnosti nadaljnega raziskovanja. Omenili smo, da za prostor operatorjev na končno razsežnem Hilbertovem prostoru obstaja zgornja meja za pripadajoči refleksivnostni defekt. Takšna meja pa zaenkrat ni znana za k -refleksivnostni defekt v primeru, ko je $k \geq 2$. Avtorji, ki so dokazali rezultat za $k = 1$, so pri tem uporabljali močna orodja algebraične geometrije. Eno od odprtih vprašanj je, ali lahko za dano zaporedje nenegativnih celih števil natančno karakteriziramo vse prostore operatorjev, za katere je k -ti člen zaporedja natanko k -refleksivnostni defekt danega prostora. V povezavi s pričujočim delom se je seveda smiselno vprašati, ali znamo določiti k -refleksivnostni defekt jedra elementarnega operatorja dolžine $n \geq 3$. Z metodo dokazovanja, ki smo jo uporabili v disertaciji, bi to pomenilo, da potrebujemo kanonične forme za matrične šope n spremenljivk. Kolikor je znano avtorici, tovrstne kanonične forme za matrične šope brez dodatnih pogojev na koeficiente še niso poznane. Ena od možnih nadaljnjih usmeritev z obstoječo metodo pa je seveda določitev k -refleksivnostnega defekta slike poljubnega elementarnega operatorja dolžine 2. Naj še omenimo, da je vse rezultate tretjega poglavja mogoče enostavno posplošiti na prostore pravokotnih matrik.

Še več možnosti nadaljnega raziskovanja ponuja področje k -hiperrefleksivnosti. Tako na primer še vedno ni znano, ali je vsaka von Neumannova algebra hiperrefleksivna. Za večino znanih hiperrefleksivnih von Neumannovih algeber pa ni znana natančna vrednost pripadajoče hiperrefleksivnostne konstante. Tako bi bil lahko eden izmed nadaljnjih ciljev določitev konstante za algebro $\mathbb{D}_4$ oziroma $\mathbb{D}_n$ za $n \geq 4$. Prav tako ne smemo zanemariti našega poskusa določanja natančne vrednosti konstante za nekatere nizko razsežne hiperrefleksivne algebre matrik z nekomutativno mrežo invariantnih podprostorov.

Literatura

- [1] C. Ambrozie, B. Kuzma, V. Müller, *An upper bound on the dimension of the reflexivity closure*, Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010) 1721–1731.
- [2] W. Arveson, *Interpolation problems in nest algebras*, J. Funct. Anal. **20** (1975) 208–233.
- [3] W. Arveson, *Ten lectures on operator algebras*, CBMS Regional Conferences in Mathematics **55**, Amer. Math. Soc. (1984).
- [4] E. A. Azoff, *K-reflexivity in finite dimensional spaces*, Duke Math. J. **40** (1973) 821–830.
- [5] E. A. Azoff, *On finite rank operators and preannihilators*, Memoirs Amer. Math. Soc. **357** (1986).
- [6] E. A. Azoff, M. Ptak, *A dichotomy for linear spaces of Toeplitz operators*, J. Funct. Anal. **156** (1998) 411–428.
- [7] R. V. Bessonov, J. Bračič, M. Zajac, *Non-hyperreflexive reflexive spaces of operators*, Studia Mathematica **202** (2011) 65–80.
- [8] J. Bračič, *Reflexivity of the commutant and local commutants of an algebraic operator*, Linear Algebra Appl. **420** (2007) 20–28.
- [9] J. Bračič, B. Kuzma, *Reflexivity defect of spaces of linear operators*, Linear Algebra Appl. **430** (2009) 344–359.
- [10] J. Bračič, T. Rudolf, *Estimates of k-hyperreflexivity constants*, preprint.
- [11] J. B. Conway, *A course in functional analysis*, Second edition, Springer-Verlag, (1990).
- [12] J. B. Conway, *A course in operator theory*, GSM Vol. 21, AMS, Providence, RI, (2000).
- [13] K. R. Davidson, *The distance to the analytic Toeplitz operators*, Illinois J. Math. **31** (1987) 265–273.
- [14] K. R. Davidson, M. S. Ordower, *Some exact distance constants*, Linear Algebra Appl. **208/209** (1994) 37–55.
- [15] K. R. Davidson, S. C. Power, *Failure of the distance formula*, J. London Math. Soc. (2) **32** (1984) 157–165.
- [16] J. A. Deddens, *Every isometry is reflexive*, Proc. Amer. Math. Soc. **28** (1971) 509–512.
- [17] J. A. Deddens, P. A. Fillmore, *Reflexive linear transformations*, Linear Algebra Appl. **10** (1975) 89–93.
- [18] M. B. Delai, *Extensions d'opérateurs auto-adjoints et défaut de réflexivité*, Linear Algebra Appl. **297** (1999) 81–85.

- [19] M. B. Delai, *Description de $\text{Alg Lat } T/W(T)$ pour certaines extensions d'opérateurs auto-adjoints*, Linear Algebra Appl. **322** (2001) 43–49.
- [20] J. Demmel, B. Kågström, *The generalized Schur decomposition of an arbitrary pencil $A - \lambda B$: robust software with error bounds and applications. Part I: theory and algorithms*, ACM Trans. Math. Software **19** (1993) 160–174.
- [21] A. Feintuch, *Algebras generated by Volterra operators*, J. Math. Anal. Appl. **56** (1976) 470–476.
- [22] F. R. Gantmacher, *The theory of matrices*, Vols. 1 and 2, Chelsea Publishing Co., New York, 1959.
- [23] R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [24] R. A. Horn, C. R. Johnson, *Topics in matrix analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [25] I. Ionaşcu, *The continuity of the constant of hyperreflexivity*, J. Operator Theory **32** (1994) 353–379.
- [26] A. Katavolos, M. S. Lambrou, W. Longstaff, *The decomposability of operators relative to two subspaces*, Studia Math. **105** (1993) 25–36.
- [27] K. Kliś, M. Ptak, *k -hyperreflexive subspaces*, Houston Journal of Mathematics **32** (2006) 299–313.
- [28] J. Kraus, D. R. Larson, *Some applications of a technique for constructing reflexive operator algebras*, J. Operator Theory **13** (1985) 227–236.
- [29] J. Kraus, D. R. Larson, *Reflexivity and distance formulae*, Proc. London Math. Soc. **53** (1986) 340–356.
- [30] P. Lancaster, L. Rodman, *Canonical forms for Hermitian matrix pairs under strict equivalence and congruence*, SIAM Rev. **47** (2005) 407–443.
- [31] D. R. Larson, *Annihilators of operator algebras*, Operator Theory Adv. and Appl. **6** (1982) 119–130.
- [32] D. R. Larson, *Hyperreflexivity and a dual product construction*, Trans. Amer. Math. Soc. **294** (1986) 79–88.
- [33] D. R. Larson, *Reflexivity, algebraic reflexivity and linear interpolation*, Amer. J. Math. **110** (1988) 283–299.
- [34] A. Loginov, V. S. Šulman, *Hereditary and intermediate reflexivity of W^* algebras*, Izv. Akad. Nauk SSSR **39** (1975) 1260–1273.
- [35] G. Lumer, M. Rosenblum, *Linear operator equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959) 32–41.
- [36] B. Magajna, *On the distance to finite-dimensional subspaces in operator algebras*, J. London Math. Soc. **47** (1993) 516–532.

- [37] R. Meshulam, P. Šemrl, *Minimal rank and reflexivity of operator spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007) 1839–1842.
- [38] V. Müller, M. Ptak, *Hyperreflexivity of finite-dimensional subspaces*, J. Funct. Anal. **218** (2005) 395–408.
- [39] R. F. Olin, J. E. Thomson, *Algebras of subnormal operators*, J. Funct. Anal. **37** (1980) 271–301.
- [40] M. Papadakis, *On hyperreflexivity and rank one density for non-CSL algebras*, Studia Math. **98** (1991) 11–17.
- [41] H. Radjavi, P. Rosenthal, *Invariant subspaces and weakly closed algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968) 1013–1014.
- [42] H. Radjavi, P. Rosenthal, *Invariant subspaces*, Second edition, Dover Publications, 2002.
- [43] S. Rosenoer, *Distance estimates for von Neumann algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **86** (1982) 248–252.
- [44] T. Rudolf, *Reflexivity defect of kernels of the elementary operators of length 2*, Linear Algebra Appl. **437** (2012) 1366–1379.
- [45] T. Rudolf, *k-reflexivity defect of the image of a generalized derivation*, arXiv: 1401.7244.
- [46] T. Rudolf, *Sequences of k-reflexivity defects*, preprint.
- [47] D. Sarason, *Invariant subspaces and unstarred operator algebras*, Pacific Journal of Mathematics **17** (1966) 511–517.
- [48] V. S. Šulman, *The Fuglede-Putnam theorem, and reflexivity*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **210** (1973) 543–544 (in Russian); Soviet Math. Dokl. **14** (1973) 784–786 (English translation).
- [49] S. Tosaka, *A note on the hyperreflexivity constant for certain reflexive algebras*, Studia Math. **134** (3) (1999) 203–206.
- [50] P. Van Dooren, *The computation of Kronecker’s canonical form of a singular pencil*, Linear Algebra Appl. **27** (1979) 103–140.
- [51] W. Wogen, *Some counterexamples in nonselfadjoint algebras*, Ann. of Math. **126** (1987) 415–427.
- [52] M. Zajac, *On reflexivity and hyperreflexivity of some spaces of intertwining operators*, Math. Bohem. **133** (2008) 75–83.
- [53] M. Zajac, *Reflexivity of intertwining operators in finite dimensional spaces*, preprint.