UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA MATEMATIKO

Lucijan Plevnik

PRESLIKAVE NA MNOŽICAH OPERATORJEV

Doktorska disertacija

Mentor: prof. dr. Peter Šemrl

Ljubljana, 2014

Izjava

Podpisani Lucijan Plevnik izjavljam:

- da sem doktorsko disertacijo z naslovom Preslikave na množicah operatorjev izdelal samostojno pod mentorstvom prof. dr. Petra Šemrla in
- da Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani dovoljujem objavo elektronske oblike svojega dela na spletnih straneh.

Ljubljana, april 2014

Podpis

Zahvala

Rad bi se zahvalil svojemu mentorju, Petru Šemrlu, za pomoč in usmerjanje pri nastajanju tega dela. Hvala tudi vsem, ki so mi polepšali kak trenutek v obdobju ustvarjanja disertacije.

Povzetek

V uvodnem poglavju predstavimo več znanih rezultatov s področja ohranjevalcev na prostorih matrik in operatorjev.

V drugem poglavju dokažemo osnovni izrek afine geometrije in osnovni izrek projektivne geometrije. Če je V končno razsežen realen ali kompleksen vektorski prostor dimenzije vsaj 2, potem osnovni izrek afine geometrije karakterizira bijektivne preslikave $V \to V$, ki slikajo premice v premice (oziroma ohranjajo kolinearnost). Če je V realen ali kompleksen vektorski prostor dimenzije vsaj 3, potem osnovni izrek projektivne geometrije karakterizira bijektivne preslikave na projektivnem prostoru nad njim, ki ohranjajo komplanarnost. Kot posledico zadnjega izreka dokažemo tudi Uhlhornov izrek. Ti trije izreki so naša glavna orodja pri reševanju problemov v kasnejših poglavjih.

V naslednjem poglavju preučujemo probleme naslednjega tipa. Naj bo $\mathcal{V}$ bodisi prostor vseh $n \times n$ hermitskih matrik bodisi prostor vseh $n \times n$ realnih simetričnih matrik bodisi množica efektov ali pa množica vseh projektorjev ranga 1. Bodi c realno število. Karakteriziramo bijektivne preslikave $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, ki zadoščajo pogoju $\mathrm{sl}\,(AB) = c \iff \mathrm{sl}\,(\phi\,(A)\,\phi\,(B)) = c$ z nekaterimi dodatnimi omejitvami na c, odvisnimi od množice $\mathcal{V}$.

Naj bo $\mathcal{H}$ neskončno razsežen realen ali kompleksen Hilbertov prostor, $\mathcal{I}_\infty\,(\mathcal{H})$ pa množica omejenih linearnih idempotentnih operatorjev na $\mathcal{H}$ z neskončno razsežno sliko in neskončno razsežnim jedrom. V četrtem poglavju karakteriziramo tri tipe preslikav na $\mathcal{I}_\infty\,(\mathcal{H})$: urejenostne avtomorfizme, bijektivne preslikave, ki ohranjajo pravokotnost v obe smeri in bijektivne preslikave, ki ohranjajo komutativnost v obe smeri.

V zadnjem poglavju dodatno predpostavimo, da je $\mathcal{H}$ separabilen, z $\mathrm{Lat}\,\mathcal{H}$ pa označimo mrežo njegovih zaprtih podprostorov. Opišemo pare bijektivnih preslikav ϕ, ψ na $\mathrm{Lat}\,\mathcal{H}$ z naslednjo lastnostjo: podprostora $U, V \in \mathrm{Lat}\,\mathcal{H}$ sta komplementirana natanko tedaj, ko isto velja za $\phi\,(U)$ in $\psi\,(V)$. Dobljeni rezultat reformuliramo kot opis bijektivnih preslikav na množici idempotentov, ki ohranjajo enakost slik in jeder. Kot posledico navedemo nekatere znane strukturne izreke o preslikavah na idempotentih.

Math. Subj. Class. (2010): `06A06, 15A86, 15B57, 46B20, 47B49.`
Ključne besede: hermitska matrika; realna simetrična matrika; projektor; efekt; sled; ohranjevalec; idempotent; delna urejenost; ortogonalnost; komutativnost; Hilbertov prostor; mreža zaprtih podprostorov; komplementirani podprostori; sosednji podprostori.

Abstract

In the introduction we present several known results about preservers on matrix and operator spaces.

In the second chapter we prove the fundamental theorem of affine geometry and the fundamental theorem of projective geometry. If V is a finite-dimensional real or complex vector space of dimension at least 2, then the fundamental theorem of affine geometry characterizes bijective maps $V \to V$ which map lines into lines (they preserve colinearity). If V is a real or complex vector space of dimension at least 3, then the fundamental theorem of projective geometry characterizes bijective maps on the projective space of V which preserve complanarity. As a corollary we also prove Uhlhorn's theorem. These three theorems are our main tools when solving problems in later chapters.

The problems of the following type are considered in the next chapter. Let $\mathcal{V}$ be the set of $n \times n$ hermitian matrices or the set of $n \times n$ real symmetric matrices or the set of all effects, or the set of all projections of rank one. Let c be a real number. We characterize bijective maps $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ satisfying $\mathrm{sl}\,(AB) = c \iff \mathrm{sl}\,(\phi(A)\,\phi(B)) = c$ with some additional restrictions on c, depending on the underlying set of matrices.

Let $\mathcal{H}$ be an infinite-dimensional real or complex Hilbert space and $\mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$ the set of all bounded linear idempotent operators on $\mathcal{H}$ with an infinite-dimensional image and an infinite-dimensional kernel. In the fourth chapter we characterize three types of maps on $\mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$, namely poset automorphisms, bijective maps preserving orthogonality in both directions, and bijective maps preserving commutativity in both directions.

In the last chapter we additionaly assume that $\mathcal{H}$ is separable and and we denote the lattice of its closed subspaces by $\mathrm{Lat}\,\mathcal{H}$. We describe the general form of pairs of bijective maps ϕ, ψ on $\mathrm{Lat}\,\mathcal{H}$ having the following property: subspaces $U, V \in \mathrm{Lat}\,\mathcal{H}$ are complemented if and only if the same holds for $\phi(U)$ and $\psi(V)$. Then we reformulate this theorem as a description of bijective image equality and kernel equality preserving maps acting on bounded linear idempotent operators. Several known structural results for maps on idempotents are easy consequences.

Math. Subj. Class. (2010): `06A06, 15A86, 15B57, 46B20, 47B49.`
Key words: hermitian matrix; real symmetric matrix; projection; effect; trace; preserver; idempotent; partial order; orthogonality; commutativity; Hilbert space; lattice of closed subspaces; complemented subspaces; adjacent subspaces.

Kazalo

Poglavje 1

Uvod

1.1 Oznake

Indeksi in skalarji Oznake $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}_\infty$ zaporedoma označujejo množico celih števil, množico naravnih števil $\{1, 2, \ldots\}$ in $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$.

Skozi celotno delo bo $\mathbb{F}$ skupna oznaka za obsega realnih števil $\mathbb{R}$ in kompleksnih števil $\mathbb{C}$.

V nadaljevanju razdelka naj bo $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor nad $\mathbb{F}$.

Zaprti podprostori Mrežo zaprtih podprostorov v $\mathcal{H}$ označimo z $\operatorname{Lat}\mathcal{H}$. Naj bo

$$\operatorname{Lat}_0 \mathcal{H} = \{\{0\}, \mathcal{H}\}$$

množica trivialnih podprostorov. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ vpeljimo množici n-razsežnih podprostorov

$$\operatorname{Lat}_n \mathcal{H} = \{U \in \operatorname{Lat}\mathcal{H} \,:\, \dim U = n\}$$

in podprostorov s kodimenzijo n

$$\operatorname{Lat}_{-n} \mathcal{H} = \{U \in \operatorname{Lat}\mathcal{H} \,:\, \dim U^\perp = n\}.$$

Tukaj $U^\perp$ označuje ortogonalni komplement prostora U. Končno razsežne podprostore bomo pogosto označili z $[x_1, \ldots, x_n]$, to je linearna ogrinjača vektorjev $x_1, \ldots, x_n$.

Uvedimo še množico podprostorov z neskončno dimenzijo in neskončno kodimenzijo

$$\operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H} = \{U \in \operatorname{Lat}\mathcal{H} \,:\, \dim\, U = \infty \text{ in } \dim\, U^\perp = \infty\}.$$

Na tem mestu opomnimo, da bomo v disertaciji včasih predpostavili, da je $\mathcal{H}$ separabilen Hilbertov prostor. Kadar ta predpostavka ni eksplicitno izražena, tega ne predpostavimo. V slednjem primeru izraz $\dim U = \infty$ za $U \in \operatorname{Lat}\mathcal{H}$ ni povsem korekten. Ta izraz bomo kljub vsemu uporabljali, saj nas bo vselej zanimalo le, če so podprostori končno ali neskončno razsežni, ne bomo pa razlikovali med kardinalnostmi dimenzij.

Če je $\mathcal{H}$ neskončno razsežen, je $\{\operatorname{Lat}_n \mathcal{H}\}_{n\in\mathbb{Z}_\infty}$ razbitje množice $\operatorname{Lat}\mathcal{H}$.

Operatorji in delna urejenost Z $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ označimo algebro omejenih linearnih operatorjev na $\mathcal{H}$. Za operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ naj A^* označuje njegov adjungiran operator, $\operatorname{im} A$ pa njegovo sliko. Na množici sebi adjungiranih operatorjev $\mathcal{B}_s(\mathcal{H}) = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : A^* = A\}$ vpeljemo delno urejenost na naslednji način. Za $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definiramo

$$A \geq 0 \iff A \in \mathcal{B}_s(\mathcal{H}) \text{ in } \langle Ax, x\rangle \geq 0 \text{ za vse } x \in \mathcal{H}$$

ter pravimo, da je A pozitivno semidefiniten. Če je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, pogoj $A \in \mathcal{B}_s(\mathcal{H})$ sledi avtomatično iz pogoja $\langle Ax, x\rangle \geq 0$, $x \in \mathcal{H}$, zato za definicijo $A \geq 0$ uporabimo le slednjega. Za $A, B \in \mathcal{B}_s(\mathcal{H})$ definiramo

$$A \leq B \iff B - A \geq 0. \tag{1.1.1}$$

Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ delno urejeni množici. Bijektivni prelikavi $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, ki zadošča

$$a \leq b \iff \phi(a) \leq \phi(b), \quad a, b \in \mathcal{A},$$

pravimo *urejenostni izomorfizem*. Urejenostnemu izomorfizmu, pri katerem je $\mathcal{B} = \mathcal{A}$, pravimo *urejenostni avtomorfizem* množice $\mathcal{A}$.

Matrike in operatorji Če je $\mathcal{H} = \mathbb{F}^n$ končno razsežen, lahko $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ identificiramo z množico $M_n(\mathbb{F})$ vseh $n \times n$ matrik s koeficienti iz $\mathbb{F}$. Naj bo $A \in M_n(\mathbb{F})$. Z A^* označimo matriko ustreznega adjungiranega operatorja. Če je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, je torej A^* konjugirano transponirana matrika matrike A, v primeru $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ pa je A^* kar transponiranka A^t matrike A. Potem sebi adjungiranim operatorjem pripadajo hermitske matrike v primeru $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ in simetrične v primeru $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Množico prvih označimo s $\mathcal{H}_n \subset M_n(\mathbb{C})$, množico drugih pa s $\mathcal{S}_n \subset M_n(\mathbb{R})$. Preko identifikacije z operatorji nam predpis (1.1.1) definira delno urejenost na teh dveh množicah. Za $A \in M_n(\mathbb{F})$ naj $\operatorname{im} A$ predstavlja sliko ustreznega operatorja.

Naj bo $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operator s sledjo. Sled tega operatorja oznacimo s $\operatorname{sl} A$. Če je $\{e_\lambda\}_\lambda$ ortonormirana baza za $\mathcal{H}$, je torej $\operatorname{sl} A = \sum_\lambda \langle Ae_\lambda, e_\lambda\rangle$. Za matriko $A \in M_n(\mathbb{F})$ je $\operatorname{sl} A$ enaka vsoti diagonalnih elementov po eni in vsoti lastnih vrednosti po drugi strani.

Idempotenti in projektorji Z $\mathcal{I}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ označimo množico idempotentov. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Uvedimo naslednje podmožice $\mathcal{I}(\mathcal{H})$: množica $\mathcal{I}_n(\mathcal{H})$ idempotentov ranga n, množica $\mathcal{I}_{-n}(\mathcal{H})$ idempotentov z n-razsežnim jedrom, množica trivialnih idepotentov $\mathcal{I}_0(\mathcal{H})$, množica idempotentov z neskončno razsežnim jedrom $\mathcal{I}^\infty(\mathcal{H})$, množica idempotentov z neskončno razsežno sliko in neskončno razsežnim jedrom $\mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$, množica projektorjev $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ ter množica projektorjev ranga ena $\mathcal{P}^1(\mathcal{H})$. Torej

$$\begin{gathered}
\mathcal{I}(\mathcal{H})=\{P\in\mathcal{B}(\mathcal{H})\,:\,P^2=P\},\\
\mathcal{I}_n(\mathcal{H})=\{P\in\mathcal{I}(\mathcal{H})\,:\,\operatorname{rang}P=n\},\\
\mathcal{I}_{-n}(\mathcal{H})=\{P\in\mathcal{I}(\mathcal{H})\,:\,\dim\ker P=n\},\\
\mathcal{I}_0(\mathcal{H})=\{0,I\},\\
\mathcal{I}^\infty(\mathcal{H})=\{P\in\mathcal{I}(\mathcal{H})\,:\,\dim\,\ker P=\infty\},\\
\mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})=\{P\in\mathcal{I}^\infty(\mathcal{H})\,:\,\dim\,\mathrm{im}\,P=\infty\},\\
\mathcal{P}(\mathcal{H})=\{P\in\mathcal{I}(\mathcal{H})\,:\,P=P^*\},\\
\mathcal{P}^1(\mathcal{H})=\{P\in\mathcal{P}(\mathcal{H})\,:\,\operatorname{rang}P=1\}.
\end{gathered}$$

Če je $\mathcal{H}=\mathbb{F}^n$, potem množici $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ in $\mathcal{P}^1(\mathcal{H})$ identificiramo z množicama

$$\mathcal{P}_n=\left\{P\in M_n(\mathbb{F})\,:\,P^2=P=P^*\right\},$$

oziroma

$$\mathcal{P}_n^1=\left\{P\in M_n(\mathbb{F})\,:\,P^2=P=P^*,\,\operatorname{rang}P=1\right\}.$$

1.2 O ohranjevalcih in njihovi zgodovini

Problemi, ki jih bomo obravnavali v disertaciji, sodijo med probleme ohranjevalcev, zato bomo v tem razdelku predstavili delček razvoja tega področja. V zadnjih sto letih se je zelo razvila teorija (linearnih) ohranjevalcev na prostorih matrik, v zadnjih treh desetljetjih pa tudi na prostorih operatorjev. V problemih (linearnih) ohranjevalcev je cilj karakterizirati takšne (linearne) preslikave, ki ohranjajo določeno strukturo. Za pregled takšnih problemov in metod njihovega reševanja se sklicujemo na [9, 23, 29, 35, 40, 47, 56]. V preglednem članku [35] jih Li in Pierce razdelita v tri skupine. Vselej bo $\mathcal{M}$ nek (vektorski) prostor matrik ali pa operatorjev na Hilbertovem ali Banachovem prostoru.

(I) Naj bo F funkcija na $\mathcal{M}$, katere vrednosti so bodisi skalarji bodisi vektorji bodisi množice. Karakteriziraj takšne (linearne) preslikave ϕ na $\mathcal{M}$, za katere velja

$$F(\phi(A))=F(A),\quad A\in\mathcal{M}.$$

(II) Naj bo $\mathcal{S}\subset\mathcal{M}$ podmnožica. Karakteriziraj takšne (linearne) preslikave ϕ na $\mathcal{M}$, za katere je izpolnjen pogoj

$$A\in\mathcal{S}\Longrightarrow\phi(A)\in\mathcal{S},\quad A\in\mathcal{M}.$$

ali pogoj

$$A\in\mathcal{S}\iff\phi(A)\in\mathcal{S},\quad A\in\mathcal{M}.$$

(III) Naj bo $\sim$ relacija na $\mathcal{M}$. Karakteriziraj takšne (linearne) preslikave ϕ na $\mathcal{M}$, za katere je izpolnjen pogoj

$$A\sim B\Longrightarrow\phi(A)\sim\phi(B),\quad A,B\in\mathcal{M}.$$

ali pogoj

$$A\sim B\iff\phi(A)\sim\phi(B),\quad A,B\in\mathcal{M}.$$

Navedimo nekaj primerov. Prvi znan problem ohranjevalcev je oblike (I), rešil pa ga je Frobenius. V članku [19] namreč obravnava takšen problem za prostor vseh kompleksnih matrik $\mathcal{M} = M_n(\mathbb{C})$ in funkcijo determinante $F(A) = \det A$, $A \in M_n(\mathbb{C})$. Dokaže, da imajo v tem primeru vse linearne preslikave ϕ obliko

$$\phi(A) = MAN, \quad A \in \mathcal{M}, \quad \text{ali} \quad \phi(A) = MA^tN, \quad A \in \mathcal{M}, \tag{1.2.1}$$

kjer sta $M, N \in M_n(\mathbb{C})$ matriki z lastnostjo $\det(MN) = 1$.

Spomnimo se, da je determinanta enaka produktu lastnih vrednosti. Pogosto se namreč obravnavajo problemi, kjer je F določena funkcija lastnih vrednosti. Kot še en primer navedimo simetrične funkcije. Če je $k \le n$ in so $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ števila, potem sta njihovi k-ta elementarna simetrična funkcija in k-ta popolnoma simetrična funkcija enaki

$$\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \prod_{j=1}^{k} \lambda_{i_j} \quad \text{oziroma} \quad \sum_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le n} \prod_{j=1}^{k} \lambda_{i_j}.$$

Opomnimo, da je k-ta elementarna simetrična funkcija lastnih vrednosti matrike ravno koeficient karakterističnega polinoma te matrike do predznaka natančno. V posebnem je n-ta elementarna simetrična funkcija lastnih vrednosti ravno determinanta matrike. Znano je [4, 44], [56, Sec. 4.1], da je v primeru, ko je $\mathcal{M} = M_n(\mathbb{C})$ in $3 \le k < n$, vsak linearen ohranjevalec k-te (elementarne ali popolnoma) simetrične funkcije lastnih vrednosti oblike kot v (1.2.1), kjer je $N = aM^{-1}$ za nek k-ti koren enote a. Isti problem je rešen tudi v primeru $k = 2$, vendar se v rezultatu pojavijo tudi bolj komplicirane preslikave [30]. Če pa je $k = 1$, sta elementarna in popolnoma simetrična funkcija lastnih vrednosti enaki sledi matrike. Linearne preslikave, ki ohranjajo sled, so zelo raznovrstne. Lepšo obliko pa imajo (ne nujno linearne) preslikave, ki ohranjajo funkcijo dveh spremenljivk $F(A, B) = \text{sl}\,(AB)$ na določenih podmnožicah matrik. Sorodne probleme bomo obravnavali v poglavju 3.

Zanimiv problem je tudi ohranjanje celotnega spektra, ne le njegovih funkcij. V jeziku iz (I) za množico $\mathcal{M}$ vzemimo $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, kjer je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor, za $F(A)$ pa spekter $\sigma(A)$ operatorja A. V [28] sta Jafarian in Sourour dokazala, da je potem vsak surjektiven linearen ϕ iz (I) oblike

$$\phi(A) = TAT^{-1}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),$$

ali pa

$$\phi(A) = TA^tT^{-1}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Tukaj je $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ obrnljiv, ^{t} je pa transponiranje glede na poljubno, ampak fiksirano ortonormirano bazo $\mathcal{H}$.

Velikokrat se problemi ohranjevalcev rešujejo tako, da se jih prevede na problem ohranjanja matrik ali operatorjev ranga 1. To velja tudi za vse zgoraj naštete primere. Ključna opazka pri karakterizaciji ohranjevalcev determinante ali simetričnih funkcij je, da za neničelno matriko A velja rang $A = 1$ natanko tedaj, ko ima polinom $p(x) = \det(xA + B)$ stopnjo največ 1 za vsako matriko B. Dokaz lahko najdemo v [44, Lemma 3.2]. Podobno nam ključna ugotovitev [28, Theorem 1] pri karakterizaciji linearnih ohranjevalcev spektra pove, da ima neničelen operator A rang 1 natanko tedaj, ko je $\sigma(T + A) \cap \sigma(T + cA) \subseteq \sigma(T)$ za vsak operator T in vsak skalar $c \neq 1$. To nas privede do ohranjevalcev fiksnega ranga, kar je prvi primer prelikav tipa (II). Naj bo $\mathcal{M}$ množica $m \times n$ matrik nad algebraično zaprtim obsegom karakteristike 0, $k \leq \min\{m, n\}$, $\mathcal{S}$ pa množica matrik ranga k. Če je potem linearna preslikava ϕ kot v (II), je oblike (1.2.1), pri čemer sta M in N obrnljivi kvadratni matriki ustreznih velikosti, oblika s transponiranjem se pa lahko pojavi le v primeru $m = n$, glej [3, 45, 46]. Bolj splošen rezultat o aditivnih ohranjevalcih matrik ranga 1 je dokazan v [74]. Problem je zanimiv tudi v kontekstu operatorjev na neskončno razsežnih Banachovih prostorih. Rezultat takšnega tipa lahko najdemo v [51]. V slednjem članku pa avtorja obravnavata tudi aditivne preslikave, ki ohranjajo idempotente ranga 1. Preslikave, ki ohranjajo idempotente, so spet tipa (II), njihov študij pa je razvit zaradi povezav z večimi problemi s področja ohrnjevalcev. V [23, Sec. 4] je na primer opisana tehnika, pri kateri probleme linearnih ohranjevalcev prevedemo na problem ohranjanja idempotentov, v nadaljevanju pa na karatko opišimo povezavi z lokalnimi avtomorfizmi in pa tudi s slavnim problemom Kaplanskega. Osredotočimo se najprej na prvo povezavo. Če je $\mathcal{A}$ algebra ali kolobar, potem je linearna preslikava $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ lokalni avtomorfizem, če za vsak $a \in \mathcal{A}$ obstaja tak avtomorfizem $\phi_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, da je $\phi(a) = \phi_a(a)$. Jasno je, da takšne preslikave ohranjajo idempotente, naravno vprašanje v povezavi z njimi pa je, če oziroma pod kakšnimi pogoji je lokalni avtomorfizem kar avtomorfizem. Če je $\mathcal{A}$ algebra omejenih operatorjev na Banachovem oziroma Hilbertovem prostoru, lahko tovrstne rezultate najdemo v [10, 47] in tamkajšnjih referencah. V [10] sta Brešar in Šemrl dokazala, da je vsaka bijektivna linearna preslikava ϕ na algebri $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, ki ohranja idempotente, bodisi avtomorfizem bodisi antiavtomorfizem. Če je $\mathcal{H}$ separabilen, sta dokazala tudi, da je vsak lokalni avtomorfizem res avtomorfizem, torej oblike $A \mapsto TAT^{-1}$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, za nek obrnljiv $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Opomnimo, da v zadnjem izreku bijektivnost/surjektivnost/injektivnost ni predpostavljena in se pojavi kot del rezultata. Oglejmo si še povezavo s problemom Kaplanskega. Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ kompleksni Banachovi algebri z enico in $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ unitalna linearna preslikava. Če je ϕ Jordanski homomorfizem, t.j. $\phi(a^2) = \phi(a)^2$, $a \in \mathcal{A}$, potem je znano, da ϕ ohranja obrnljivost [70, Proposition 1.3]. Če pa ϕ ohranja obrnljivost, potem je po izreku Gleason-Kahane-Želazko [21, 31, 73] ϕ multiplikativna v primeru $\mathcal{B} = \mathbb{C}$. V posebnem je ϕ Jordanski homomorfizem. Kaplansky se je v [33, Sec. 9] vprašal, pod katerimi pogoji iz ohranjanja obrnljivosti preslikave ϕ sledi, da je ϕ Jordanski homomorfizem. To je še eno vprašanje tipa (II), opomnimo pa, da je v primeru, ko sta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ enaki $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, vprašanje tesno povezano s prej omenjenim Jafarianovim rezultatom ohranjanja spektra. Unitalna linearna preslikava $\phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ namreč ohranja obrnljivost natanko tedaj, ko za vsak $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ velja $\sigma(\phi(A)) \subseteq \sigma(A)$. Znano je, da za vse unitalne Banachove algebre ne velja sklep iz vprašanja Kaplanskega, glej na primer [70, Example 1]. B. Aupetit je postavil domnevo, da sklep velja, če je $\mathcal{B}$ polenostvna in ϕ surjektivna. Veljavnost te domneve še ni znana, delne rezultate pa lahko najdemo v [7, 29] in tamkajšnjih referencah. V [8] sta Brešar ter Šemrl dokazala, da v primeru, ko je $\mathcal{B}$ zaprta in vsebuje operatorje končnega ranga, iz surjektivnosti in ohranjanja obrnljivosti preslikave ϕ sledi ohranjanje idempotentov. V poglavljih 4 in 5 pa bomo obravnavali preslikave, ki ohranjajo določene relacije na $\mathcal{I}(\mathcal{H})$ in njenih podmnožicah.

S tem smo prišli do primerov preslikav iz (III). Oglejmo si najprej relacijo komutativnosti. Linearne preslikave na prostorih matrik in operatorjev, ki ohranjajo komutativnost, so pogosto obravnavane v literaturi. Glavna motivacija pri tem je preprosta opazka, da ohranjanje komutativnosti pomeni ohranjanje ničelnega Liejevega produkta. V [49] je Omladič dokazal osnoven tovrsten rezultat. Opisal je strukuro linearnih transformacij na algebri omejenih operatorjev na Banachovem prostoru, ki ohranjajo komutativnost v obe smeri. V kontekstu Hilbertovih prostorov nam njegov rezultat pove naslednje. Naj bo $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor dimenzije vsaj 3 in $\phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ bijektivna linearna preslikava, ki ohranja komutativnost v obe smeri. Potem obstajajo neničelen skalar λ, obrnljiv operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ in linearen funkcional f na $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, tako da velja bodisi

$$\phi(A) = \lambda TAT^{-1} + f(A)\, I, \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),$$

bodisi

$$\phi(A) = \lambda TA^tT^{-1} + f(A)\, I, \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Obravnava preslikav, ki ohranjajo komutativnost, pa se je kaneje zelo razvila v različne smeri. Šemrl [66] je karakteriziral nelinearne preslikave na $M_n(\mathbb{C})$, ki ohranjajo komutativnost v obe smeri, medtem ko so bile v [48] obravnavane takšne preslikave na množici $\mathcal{B}_s(\mathcal{H})$. V [50] avtorji obravnavajo ohranjanje komutativnosti na prostoru matrik nad splošnejšimi obsegi, v [60] pa lahko najdemo pregled metod reševanja tovrstnih problemov in karakterizacijo preslikav, ki ohranjajo komutativnost na $M_n(\mathbb{C})$ ter zadoščajo šibkim predpostvkam: ohranjanje v eno smer, injektivnost in zveznost. Brešarjev članek [6] pa obravnava preslikave, ki ohranjajo Liejev produkt oziroma komutativnost v algebraičnem kontekstu kolobarjev.

Problem ohranjanja komutativnosti pa je zanimiv tudi na raznih podmnožicah matrik oziroma operatorjev, na primer idempotentih. Za splošen matrični rezultat se sklicujemo na [64], za operatorskega pa na [65]. V slednjem Šemrl predstavi tudi povezave med ohranjevalci komutativnosti, urejenostnimi avtomorfizmi in ohranjevalci pravokotnosti na idempotentih. Te bomo podrobneje obravnavali v poglavju 4, na tem mestu pa si oglejmo še dva primera urejenostnih avtomorfizmov. Vsak urejenostni avtomorfizem množice $\mathcal{B}_s(\mathcal{H})$ glede na delno urejenost (1.1.1) je oblike

$$\phi(A) = TAT^* + C, \quad A \in \mathcal{B}_s(\mathcal{H}),$$

kjer je T omejen obrnljiv linearen ali konjugirano linearen operator na $\mathcal{H}$ in $C \in \mathcal{B}_s(\mathcal{H})$, glej [61]. V kvantni mehaniki so posebej pomembni operatorji iz $\mathcal{B}_s(\mathcal{H})$ efekti, to so operatorji A, za katere velja $0 \leq A \leq I$. Urejenostni avtomorfizmi množice le-teh imajo zapletenejšo strukturo, njihov eleganten opis pa je našel Šemrl [62]. V [61] je utemeljeno tudi, da je relacija delne urejenosti tesno povezana z relacijo sosednosti. Pravimo, da sta operatorja A, B na Banachovem prostoru sosednja, če je $A - B$ operator ranga 1. V štiridesetih in začetku petdesetih let prešnjega stoletja je Hua objavil vrsto člankov, ki obravnavajo ohranjevalce sosednosti na raznih prostorih matrik: kvadratnih ali pravokotnih matrik nad različnimi obsegi ali hermitskih kompleksnih ali simetričnih ali antisimetričnih realnih matrik. Pomembnost teh rezultatov se kaže na primer v tem, da dajo številne rezultate o linearnih ohranjevalcih kot posledice. V svojih izrekih Hua namreč ne predpostavi linearnosti, preprosta opazka pa nam pove, da linearna preslikava, ki ohranja operatorje ranga 1, ohranja tudi sosednost. Vemo pa že, da se da več problemov linearnih ohranjevalcev, na primer ohranjanje determinante in ohranjanje spektra, prevesti na problem ohranjanja ranga 1. Predvsem v zadnjem desetletju so se razvile posplošitve Huajevih izrekov, glej [63, 67, 69] in tamkajšnje reference.

Poglavje 2

Pomožni rezultati

2.1 Operatorji ranga 1

Ker se bodo operatorji ranga 1 na $\mathcal{H}$ v nadaljevanju večkrat pojavili, ponovimo njihove pomembne lastnosti.

Za $x, y \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ definirajmo operator $x \otimes y^*$ s predpisom $(x \otimes y^*)\, z = \langle z, y \rangle x$. Tako definiran operator ima očitno rang 1, saj je njegova slika enaka $[x]$. Je tudi omejen, njegova norma je nareč enaka $\|x\|\|y\|$. Prepričajmo se še, da so vsi omejeni operatorji ranga 1 takšne oblike. Res, naj bo sedaj $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operator z enorazsežno sliko $[x]$. Potem obstaja tak omejen linearen funkcional $\varphi \neq 0$ na $\mathcal{H}$, da je $Az = \varphi(z)\, x$, $z \in \mathcal{H}$. Po Rieszovem izreku o reprezentaciji omejenih linearnih funkcionalov na Hilbertovem prostoru pa je $A = x \otimes y^*$ za nek $y \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$.

Naslednja lema nam pove, kako računamo z operatorji ranga 1.

Lema 2.1.1. *Naj bosta $x, y \in \mathcal{H}$. Potem imamo:*

- $\operatorname{sl} x \otimes y^* = \langle x, y \rangle$,
- $(x \otimes y^*)^* = y \otimes x^*$,
- $(x \otimes y^*)(u \otimes v^*) = \langle u, y \rangle (x \otimes v^*)$.

Dokaz. Naj bo $\{e_\lambda\}_\lambda$ ortonormirana baza za $\mathcal{H}$. Potem je

$$\operatorname{sl} x \otimes y^* = \sum_\lambda \langle e_\lambda, y \rangle \langle x, e_\lambda \rangle = \left\langle x, \sum_\lambda \langle y, e_\lambda \rangle e_\lambda \right\rangle = \langle x, y \rangle.$$

Če sta $u, v \in \mathcal{H}$, imamo nadalje

$$\langle (x \otimes y^*)\, u, v \rangle = \langle u, y \rangle \langle x, v \rangle = \langle u, (y \otimes x^*)\, v \rangle\,,$$

zato je $(x \otimes y^*)^* = y \otimes x^*$. Za $z \in \mathcal{H}$ pa imamo

$$(x \otimes y^*)(u \otimes v^*)\, z = \langle z, v \rangle (x \otimes y^*)\, u = \langle u, y \rangle \langle z, v \rangle\, x = \langle u, y \rangle (x \otimes v^*)\, z.$$

$\square$

Iz zadnje lastnosti se direktno vidi, da je $x \otimes y^*$ idempotent natanko tedaj, ko je $\langle x, y\rangle = 1$. Ta opazka nam skupaj z drugo lastnostjo pove, da je operator ranga 1 projektor natanko tedaj, ko je oblike $x \otimes x^*$ za nek enotski vektor $x \in \mathcal{H}$. Tako imamo

$$\mathcal{I}_1(\mathcal{H}) = \{x \otimes y^* \,:\, x, y \in \mathcal{H},\, \langle x, y\rangle = 1\}$$

in

$$\mathcal{P}^1(\mathcal{H}) = \{x \otimes x^* \,:\, x \in \mathcal{H},\, \|x\| = 1\}.$$

Oglejmo si še primer, ko je $\mathcal{H} = \mathbb{F}^n$ končno razsežen, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ pa poistovetimo z $M_n(\mathbb{F})$. Za skalar $\mu \in \mathbb{F}$ bo $\overline{\mu}$ seveda predstavljal konjugirano število števila μ v kompleksnem primeru, medtem ko je $\overline{\mu} = \mu$ v realnem. Potem je matrika operatorja $x \otimes y^*$ enaka $xy^* = [x_i\overline{y_j}]$. Posledično dobimo

$$\mathcal{P}_n^1 = \{xx^* \,:\, x \in \mathbb{F}^n,\, \|x\| = 1\}.$$

2.2 Semilinearne preslikave

V tem razdelku bomo predstavili semilinearne preslikave, ki bodo imele zelo pomembno vlogo v nadaljevanju. Naj bosta V in W vektorska prostora nad $\mathbb{F}$. Preslikava $A : V \to W$ je *semilinearna*, če je aditivna in obstaja tak avtomorfizem obsega $\sigma : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, da velja

$$A(\lambda x) = \sigma(\lambda)\, Ax, \quad \lambda \in \mathbb{F}, \quad x \in V.$$

Opomnimo najprej, da v primerih, ko obravnavamo preslikave med dvema vektorskima prostoroma nad $\mathbb{F}$, vedno predpostavimo, da sta bodisi oba realna bodisi oba kompleksna. Nadalje se spomnimo znanega dejstva, da je identiteta edini homomorfizem $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zato so na realnem vektorskem prostoru semilinearne preslikave natanko tiste, ki so linearne. Po drugi strani ima obseg $\mathbb{C}$ precej več avtomorfizmov. Med njimi sta dva zvezna (identiteta in kompleksno konjugiranje) ter neštevno mnogo nezveznih [34]. Semilinearni preslikavi, za katero je σ kompleksno konjugiranje, pravimo konjugirano linearna preslikava.

Naj bosta $\mathcal{H}$ in $\mathcal{K}$ Hilbertova prostora nad $\mathbb{F}$. Ko bomo preučevali preslikave na posebnih množicah operatorjev na Hilbertovih prostorih ali na množici zaprtih podprostorov Hilbertovega prostora, se bodo v rezultatih vedno pojavili operatorji, ki so omejeni, obrnljivi in bodisi linearni bodisi konjugirano linearni. Množico vseh takšnih operatorjev označimo z

$$\begin{gathered}\mathrm{BCI}(\mathcal{H}, \mathcal{K}) = \{A : \mathcal{H} \to \mathcal{K} \,:\, A \text{ je omejen,} \\ \text{obrnljiv, linearen ali konjugirano linearen}\}.\end{gathered}$$

Če je $\mathcal{K} = \mathcal{H}$, to množico krajše označimo z $\mathrm{BCI}(\mathcal{H})$. Za bijektivno semilinearno preslikavo $A : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ karakterizirajmo, kdaj je $A \in \mathrm{BCI}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Ta karakterizacija sledi iz [32, Lemma 2, Cor.], [43, Lemma B] in [17, Lemma 3]. V originalnih člankih so omenjene leme predstavljene za splošne normirane prostore, vendar jih bomo potrebovali in dokazali le za Hilbertove.

Lema 2.2.1. *Naj bosta $\mathcal{H}$ in $\mathcal{K}$ neskončno razsežna Hilbertova prostora nad $\mathbb{F}$ in $A : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ bijektivna semilinearna preslikava. Potem je $A \in \mathrm{BCI}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ natanko tedaj, ko je*

$$A(\mathrm{Lat}_{-1}\mathcal{H}) = \mathrm{Lat}_{-1}\mathcal{K}. \tag{2.2.1}$$

Dokaz. Predpostavimo najprej, da je $A \in \mathrm{BCI}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Če je $V \in \mathrm{Lat}_{-1}\mathcal{K}$, potem je $U = A^{-1}(V) \in \mathrm{Lat}_{-1}\mathcal{H}$, ker je A zvezna. Ker je po izreku o odprti preslikavi tudi A^{-1} zvezna, lahko isti razmislek uporabimo še za dokaz obratne inkluzije v (2.2.1).

Privzemimo sedaj, da velja (2.2.1). Najprej bomo dokazali, da je A linearna ali konjugirano linearna. Če je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, je A avtomatično linearna, zato predpostavimo $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Ker je A semilinearna, obstaja tak avtomorfizem σ obsega $\mathbb{C}$, da je $A(\lambda x) = \sigma(\lambda) Ax$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in \mathcal{H}$. Dokazati moramo, da je σ zvezen. Recimo, da to ni res. Potem obstaja tako omejeno zaporedje $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, da je $\{\sigma(\lambda_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ neomejeno. Fiksirajmo ortonormirano množico $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$. Ker je zaporedje $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ omejeno, vrsta $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left\| \frac{\overline{\lambda_n}}{n} e_n \right\|^2$ konvergira. Zato konvergira tudi vrsta $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\overline{\lambda_n}}{n} e_n$. Označimo vsoto te vrste z y. Za vsak $k \in \mathbb{N}$ postavimo $y_k = \frac{k}{\lambda_k} e_k - \frac{1}{\lambda_1} e_1$. Naj bo $k \in \mathbb{N}$. Če je $k = 1$, je $y_k = 0$, sicer pa

$$\langle y_k, y \rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\lambda_n}{n} \left\langle \frac{k}{\lambda_k} e_k - \frac{1}{\lambda_1} e_1, e_n \right\rangle = -\frac{\lambda_1}{1} \frac{1}{\lambda_1} + \frac{\lambda_k}{k} \frac{k}{\lambda_k} = -1 + 1 = 0.$$

V vsakem primeru dobimo $y_k \in [y]^\perp$ in posledično

$$\frac{k}{\sigma(\lambda_k)} Ae_k - A\left(\frac{1}{\lambda_1} e_1\right) \in A\left([y]^\perp\right).$$

Ker je zaporedje $\{\sigma(\lambda_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ neomejeno, lahko po morebitnem prehodu na podzaporedje predpostavimo, da je $|\sigma(\lambda_k)| \geq k^2 \|Ae_k\|$ za vsak k. Potem je

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{\sigma(\lambda_k)} Ae_k - A\left(\frac{1}{\lambda_1} e_1\right)\right) = A\left(-\frac{1}{\lambda_1} e_1\right).$$

Po (2.2.1) je $A\left([y]^\perp\right)$ zaprt podprostor v $\mathcal{K}$, zato vsebuje $A\left(-\frac{1}{\lambda_1} e_1\right)$. To pomeni, da je $e_1 \in [y]^\perp$. Prišli smo do protislovja, saj je $\langle e_1, y \rangle = \lambda_1 \neq 0$. Torej je σ zvezen in posledično identiteta ali kompleksna konjugacija.

Naj bo spet $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Preostane dokazati, da je A omejen operator. Predpostavimo, da je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ in A konjugirano linearen, saj se primer $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, A linearen, obravnava analogno. S predpisom $F(y, x) = \langle y, Ax \rangle$, $y \in \mathcal{K}$, $x \in \mathcal{H}$, je definirana bilinearna forma na $\mathcal{K} \times \mathcal{H}$. Za vsak $y \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$ je jedro funkcionala $F(y, \cdot)$ enako $A^{-1}\left([y]^\perp\right)$. Po (2.2.1) je slednje enako $[z]^\perp$ za nek $z \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$. Ker ima linearen funkcional $x \mapsto \langle x, z \rangle$, $x \in \mathcal{H}$, isto jedro, je skalarni večkratnik funkcionala $F(y, \cdot)$. Posledično za vsak $y \in \mathcal{K}$ obstaja natanko en $z_y \in \mathcal{H}$, za katerega je

$$F(y, x) = \langle x, z_y \rangle, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Zato je $|F(y, x)| \leq \|z_y\|$ za vsak $y \in \mathcal{K}$ in vsak enotski $x \in \mathcal{H}$. Po izreku o enakomerni omejenosti je množica $\{\|F(\cdot, x)\|\}_{\|x\|=1}$ omejena. Torej obstaja tak

$C > 0$, da je $|F(y,x)| \le C\|y\|$ za vse $y \in \mathcal{K}$ in enotske $x \in \mathcal{H}$. Če v to neenakost vstavimo $y = Ax$, dobimo $\|Ax\| \le C$ za vse $x \in \mathcal{H}$ z $\|x\| = 1$, kar smo tudi želeli. $\square$

Posledica 2.2.2. *Naj bosta $\mathcal{H}$ in $\mathcal{K}$ neskončno razsežna Hilbertova prostora nad $\mathbb{F}$ in $A, B : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ takšni bijektivni semilinearni preslikavi, da je*

$$x \perp y \iff Ax \perp By, \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

Potem je $A \in \mathrm{BCI}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ in $A(V) = B\left(V^{\perp}\right)^{\perp}$ za vsak $V \in \mathrm{Lat}_{-1}\mathcal{H}$.

Dokaz. Naj bo $V \in \mathrm{Lat}_{-1}\mathcal{H}$ poljuben, torej $V = [y]^{\perp}$ za nek $y \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$. Po predpostavki imamo $A(V) = A\left([y]^{\perp}\right) = [By]^{\perp} = B\left(V^{\perp}\right)^{\perp} \in \mathrm{Lat}_{-1}\mathcal{K}$. Po drugi strani, ker je B bijektivna, je vsak element množice $\mathrm{Lat}_{-1}\mathcal{K}$ oblike $[By]^{\perp} = A\left([y]^{\perp}\right)$ za nek $y \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$. Torej velja (2.2.1) in posledično nam lema 2.2.1 da $A \in \mathrm{BCI}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. $\square$

Nadaljujmo s preprosto lemo, ki jo lahko najdemo na primer v [16, Lemma 2.4].

Lema 2.2.3. *Naj bosta V in W vektorska prostora nad $\mathbb{F}$, $A, B : V \to W$ pa aditivni preslikavi. Predpostavimo, da $\mathrm{im}\, A$ vsebuje vsaj dva linearno neodvisna vektorja. Če sta vektorja Ax in Bx linearno odvisna za vsak $x \in V$, potem obstaja tak $\lambda \in \mathbb{F}$, da je $B = \lambda A$.*

Dokaz. Naj bo $x \in V$ tak, da $Ax \ne 0$. Ker sta Ax in Bx linearno odvisna, obstaja tak skalar $\lambda_x \in \mathbb{F}$, da je $Bx = \lambda_x Ax$. Pokazali bomo, da je $\lambda_x = \lambda_y$ za $x, y \notin \ker A$. Ločimo dva primera.

Najprej predpostavimo, da sta Ax in Ay linearno neodvisna. Potem je

$$\lambda_x Ax + \lambda_y Ay = Bx + By = B(x+y) = \lambda_{x+y} A(x+y) = \lambda_{x+y} Ax + \lambda_{x+y} Ay,$$

iz česar sledi $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.

Oglejmo si še primer, ko sta Ax in Ay linearno odvisna. Potem obstaja tak $z \in V \setminus \ker A$, da sta vektorja Ay in Az linearno neodvisna. Tedaj velja isto tudi za vektorja Ax in Az, zato imamo po prejšnjem primeru $\lambda_x = \lambda_z = \lambda_y$. $\square$

Posledica 2.2.4. *Naj bosta $\mathcal{H}$ in $\mathcal{K}$ Hilbertova prostora nad $\mathbb{F}$, $\dim \mathcal{H} \ge 2$ in $A, B : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ injektivni semilinearni preslikavi. Če je $A(U) = B(U)$ za vsak $U \in \mathrm{Lat}_{-1}\mathcal{H}$, potem obstaja tak $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, da je $B = \lambda A$.*

Dokaz. Naj bo $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ poljuben. Ker sta A in B injektivni, imamo $Ax, Bx \ne 0$. Označimo $\mathrm{Lat}_x \mathcal{H} = \{U \in \mathrm{Lat}_{-1}\mathcal{H} : x \in U\}$. Iz semilinearnost A sledi $[Ax] = A([x])$, to pa je nadalje enako

$$A\left(\bigcap_{U \in \mathrm{Lat}_x \mathcal{H}} U\right) = \bigcap_{U \in \mathrm{Lat}_x \mathcal{H}} A(U) = \bigcap_{U \in \mathrm{Lat}_x \mathcal{H}} B(U) = [Bx].$$

Zaključek sledi iz leme 2.2.3. $\square$

Spomnimo se, da za vsako linearno preslikavo med končno razsežnima vektorskima prostoroma s skalarnim produktom obstaja njena adjungirana preslikava. Dokažimo, da analogna trditev velja za semilinearne preslikave.

Trditev 2.2.5. *Naj bosta V in W končno razsežna vektorska prostor s skalarnim produktom nad $\mathbb{F}$, $A : V \to W$ semilinearna preslikava, σ pa pripadajoči avtomorfizem obsega. Potem obstaja enolično določena semilinearna preslikava $A^* : W \to V$, za katero je*

$$\langle Ax, y\rangle = \sigma\left(\langle x, A^*y\rangle\right), \quad x \in V, \quad y \in W.$$

Avtomorfizem obsega, ki pripada preslikavi A^*, je $\lambda \mapsto \overline{\sigma^{-1}\left(\overline{\lambda}\right)}$, $\lambda \in \mathbb{F}$.

Dokaz. Trivialno je preveriti, da je preslikava A^* enolično določena, če obstaja. Zato moramo dokazati le njen obstoj. Za vsak $y \in W$ definiramo linearen funkcional f_y na V s predpisom $f_y(x) = \sigma^{-1}\left(\langle Ax, y\rangle\right)$. Po Rieszovem izreku obstaja natanko določen $z \in V$, za katerega velja $f_y(x) = \langle x, z\rangle$, $x \in V$. Če postavimo $A^*y = z$, očitno velja $\langle Ax, y\rangle = \sigma\left(\langle x, A^*y\rangle\right)$ za vse $x, y \in V$. Preostane še dokazati semilinearnost preslikave A^*. V ta namen izberimo poljubne $x \in V$, $y \in W$ in $\lambda \in \mathbb{F}$. Za njih velja

$$\sigma\left(\langle x, A^*(\lambda y)\rangle\right) = \langle Ax, \lambda y\rangle = \left\langle A\left(\sigma^{-1}\left(\overline{\lambda}\right)x\right), y\right\rangle = \sigma\left(\left\langle x, \overline{\sigma^{-1}\left(\overline{\lambda}\right)}A^*y\right\rangle\right),$$

od koder sledi $A^*(\lambda y) = \overline{\sigma^{-1}\left(\overline{\lambda}\right)}A^*y$. Še lažje je dokazati aditivnost A^*. □

Podobna trditev velja tudi za omejene operatorje na Hilbertovem prostoru. V tem primeru nas bodo zanimali operatorji, ki so bodisi linearni bodisi konjugirano linearni. Trditev dokažemo na isti način kot prejšnjo, le da v dokazu uporabimo Rieszov izrek o reprezentaciji omejenih linearnih funkcionalov na Hilbertovem prostoru.

Trditev 2.2.6. *Naj bosta $\mathcal{H}$ in $\mathcal{K}$ kompleksna Hilbertov prostora, $A : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ pa omejen konjugirano linearen operator. Potem obstaja enolično določen omejen konjugirano linearen operator $A^* : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$, za katerega je*

$$\langle Ax, y\rangle = \overline{\langle x, A^*y\rangle}, \quad x \in \mathcal{H}, \quad y \in \mathcal{K}.$$

Trditev 2.2.7. *Naj bosta $\mathcal{H}$ in $\mathcal{K}$ Hilbertov prostora nad $\mathbb{F}$ in $A \in \mathrm{BCI}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Potem je $A^* \in \mathrm{BCI}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ in za vsak $U \in \operatorname{Lat}\mathcal{H}$ velja*

$$(A^*)^{-1}(U) = A\left(U^\perp\right)^\perp.$$

Dokaz. Preprosto je preveriti, da sta $(A^{-1})^*A^*$ in $A^*(A^{-1})^*$ identična operatorja na ustreznih prosotrih, ker sta takšna tudi AA^{-1} in $A^{-1}A$. To nam pove, da je A^* obrnljiv in $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Naj bosta sedaj $U \in \operatorname{Lat}\mathcal{H}$ in $y \in \mathcal{K}$. Potem je

$$\begin{aligned} y \in (A^*)^{-1}(U) \iff A^*y \in U \iff \forall x \in U^\perp : \langle x, A^*y\rangle = 0 \\ \iff \forall x \in U^\perp : \langle Ax, y\rangle = 0 \iff y \in A\left(U^\perp\right)^\perp. \end{aligned}$$

□

2.3 Osnovni izrek afine geometrije

V tem razdelku bomo dokazali osnovni izrek afine geometrije, ki nam bo služil kot geometrijsko orodje pri nekaterih dokazih v poglavju 3. Kot osrednjo literaturo smo uporabili knjigo [72], glej tudi [58].

Naj bo V končno razsežen vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ in označimo $n = \dim V$. Na V bomo včasih gledali kot na množico vektorjev, včasih pa kot na množico točk (0-razsežnih afinih podprostorov). Z vektorji bomo delali, kadar bomo z njimi računali, s točkami pa, kadar bomo preučevali geometrijske objekte. Če je U r-razsežen vektorski podprostor v V, $v \in V$ pa vektor, potem pravimo množici $U + v = \{u + v : u \in U\}$ afin podprostor v V, število r pa predstavlja njegovo dimenzijo (razsežnost). Afinim podprostorom dimenzije 1 pravimo *premica*. Premice so torej množice oblike $[x] + v = \{\lambda x + v : \lambda \in \mathbb{F}\}$ za neka $v \in V$, $x \in V \setminus \{0\}$.

Bodi $A : V \to V$ bijektivna semilinearna preslikava in $a \in V$ vektor. Naj bo $\phi : V \to V$ kompozicija translacije za a in preslikave A, torej $\phi(x) = Ax + a$, $x \in V$. Če je $U + v$ r-razsežen afin podprostor v V, je tudi $\phi(U + v) = A(U) + (Av + a)$ afin podprostor v V dimenzije r. V posebnem je slika vsake premice s preslikavo ϕ spet premica. Cilj tega razdelka je dokazati osnovni izrek afine geometrije, ki pove, da v primeru $n \geq 2$ velja tudi obrat zadnje trditve. To pomeni, da se da vsako bijektivno preslikavo $V \to V$, ki slika premice v premice, zapisati kot kompozicijo translacije in bijektivne semilinearne preslikave. Pred začetkom dokazovanja tega izreka pa se moramo še bolje poučiti o geometriji afinih prostorov.

Trditev 2.3.1. *Poljubnih $r + 1$ točk iz V, ki ne leži v nobenem $(r - 1)$-razsežnem afinem podprostoru, leži na natanko enem r-razsežnem afinem podprostoru* $(1 \leq r \leq n)$.

Dokaz. Naj bodo $v_1, \ldots, v_{r+1}$ točke iz V, ki ne ležijo na nobenem $(r-1)$-razsežnem afinem podprostoru. Za $i = 1, \ldots, r$ označimo $z_i = v_i - v_{r+1}$ in nadalje $Z = [z_1, \ldots, z_r]$. Očitno je $\dim Z \leq r$ in afin podprostor $Z + v_{r+1}$ vsebuje točke $v_1, \ldots, v_{r+1}$. Po predpostavki mora biti $\dim Z \geq r$, torej je $Z + v_{r+1}$ r-razsežen.

Naj bo sedaj $U + u$ r-razsežen afin podprostor, ki vsebuje točke $v_1, \ldots, v_{r+1}$. Dokažimo, da je $U + u = Z + v_{r+1}$. Imamo $v_i = u_i + u$, pri čemer $u_i \in U$ za $i = 1, \ldots, r + 1$. Tako dobimo $U + u = U + v_{r+1}$ in $z_i = v_i - v_{r+1} = u_i - u_{r+1} \in U$ za $i = 1, \ldots, r$. Torej U vsebuje Z, ker pa je $\dim U = \dim Z = r$, mora biti $U = Z$. $\square$

Opomba 2.3.2. *V primeru $r = 1$ nam trditev pove, da skozi različni točki $v, w \in V$ poteka natanko ena premica p, iz dokaza pa razberemo, da jo lahko parametriziramo na naslednji način:*

$$p = \{\mu(v - w) + w : \mu \in \mathbb{F}\} = \{\mu v + (1 - \mu)w : \mu \in \mathbb{F}\}.$$

Pravimo, da sta afina podprostora $U_1 + v_1$ in $U_2 + v_2$ *vzporedna*, če velja bodisi $U_1 \subseteq U_2$ bodisi $U_2 \subseteq U_1$.

Lema 2.3.3. *Skozi vsako točko iz V poteka natanko en r-razsežen afin podprostor, ki je vzporeden z danim r-razsežnim afinim podprostorom* $(0 \leq r \leq n)$.

Dokaz. Naj bo $v \in V$ točka in $U + u$ afin podprostor v V z $\dim(U + u) = r$. Očitno v leži na r-razsežnem afinem podprostoru $U + v$, ki je vzporeden z $U + u$. Naj bo nadalje $Z + z$ afin podprostor dimenzije r, ki vsebuje v in je vzporeden z $U + u$. Iz $v \in Z + z$ sklepamo, da je $Z + z = Z + v$. Ker sta $Z + z$ in $U + u$ vzporedna, velja ali $Z \subseteq U$ ali $U \subseteq Z$, ker pa je $\dim Z = \dim U = r$, mora biti $Z = U$. Tako smo dobili želen rezultat $Z + z = U + v$. □

Afina preslikava prostora V je preslikava $V \to V$ oblike

$$x \mapsto Ax + a, \quad x \in V,$$

pri čemer je $A : V \to V$ bijektivna linearna preslikava in $a \in V$. *Afina grupa* prostora V je množica vseh afinih preslikav prostora V, opremljena z operacijo kompozituma preslikav. Označimo jo z $\mathrm{Aff}(V)$.

Trditev 2.3.4. *(a)* $\mathrm{Aff}(V)$ *deluje tranzitivo na množici vseh r-razsežnih afinih podprostorov v V $(0 \leq r \leq n)$.*

(b) $\mathrm{Aff}(V)$ *deluje tranzitivo na množici vseh podmnožic V, ki vsebujejo $r + 1$ točk, ki ne ležijo na nobenem $(r - 1)$-razsežnem afinem podprostoru v V $(1 \leq r \leq n)$.*

Dokaz. (a) Na začetku razdelka smo preverili, da afina transformacija preslika r-razsežen afin podprostor v r-razsežen afin podprostor.

Bodita $U_1 + u_1$ in $U_2 + u_2$ afina podprostora dimenzije r. Potem obstaja taka bijektiva linearna preslikava $A : V \to V$, da je $A(U_1) = U_2$. Afina preslikava

$$x \mapsto Ax + (u_2 - Au_1), \quad x \in V,$$

preslika $U_1 + u_1$ v $U_2 + u_2$.

(b) Enostavno je preveriti, da afina transformacija preslika $r + 1$ točk, ki ne ležijo na $(r - 1)$-razsežnem afinem podprostoru v $r + 1$ točk z isto lastnostjo.

Izberimo točke $0, e_1, \ldots, e_r \in V$, pri čemer so vektorji $e_1, \ldots, e_r$ linearno neodvisni. Potem točke $0, e_1, \ldots, e_r$ ne ležijo na nobenem $(r - 1)$-razsežnem afinem podprostoru, ležijo pa na r-razsežnem afinem (vektorskem) podprostoru $U = [e_1, \ldots, e_r]$. Po trditvi 2.3.1 je dovolj pokazati, da za katerekoli $r + 1$ točke $v_0, v_1, \ldots, v_r$, ki ne ležijo na nobenem afinem podprostoru dimenzije $r - 1$, ležijo pa v U, obstaja afina transformacija, ki preslika točke $v_0, v_1, \ldots, v_r$ zaporedoma v točke $0, e_1, \ldots, e_r$. Translacija

$$x \mapsto x - v_0 \tag{2.3.1}$$

preslika v_0 v 0 in v_i v $v_i - v_0$ za $i = 1, \ldots, r$. Ker točke $0, v_1 - v_0, \ldots, v_r - v_0$ ne ležijo na nobenem $(r - 1)$-razsežnem afinem podprostoru, so vektorji $v_1 - v_0, \ldots, v_r - v_0$ linearno neodvisni. Torej obstaja bijektivna linearna preslikava $A : V \to V$, ki preslika $v_i - v_0$ v e_i za $i = 1, \ldots, r$. Iskana afina transformacija je torej kompozitum preslikave A in translacije (2.3.1).

□

Lema 2.3.5. *Naj bo $\phi : V \to V$ bijektivna preslikava, ki preslika premice v premice. Potem tudi ϕ^{-1} preslika premice v premice.*

Dokaz. Za dano premico p v V izberimo dve različni točki na njej: T_1, T_2. Potem sta $\phi^{-1}(T_1)$ in $\phi^{-1}(T_2)$ spet različni točki in tako po trditvi 2.3.1 obstaja premica p', ki ju vsebuje. Očitno je $\phi(p') = p$, zato je $\phi^{-1}(p) = p'$. □

Lema 2.3.6. *Naj bo $\phi : V \to V$ bijektivna preslikava, ki preslika premice v premice. Potem tako ϕ kot ϕ^{-1} preslika r-razsežne afine podprostore v r-razsežne afine podprostore $(0 \le r \le n)$.*

Dokaz. Po lemi 2.3.5 je dovolj izpeljati želen zaključek za preslikavo ϕ. Uporabili bomo indukcijo na r. Po predpostavki trditev drži za $r = 0$ in 1. Naj bo sedaj $r \ge 2$ (in v posebnem $n \ge 2$) ter predpostavimo, da ϕ preslika $(r-1)$-razsežne afine podprostore v $(r-1)$-razsežne afine podprostore. Dokazali bomo, da je to res tudi za r-razsežne afine podprostore. Postavimo $S = U + v$, pri čemer je $U \subset V$ vektorski prostor dimenzije r in $v \in V$. Izberimo bazo $u_1, \ldots, u_r$ prostora U, torej $U = [u_1, \ldots, u_r]$. Označimo $S' = \phi(S)$ in $v' = \phi(v) \in S'$. Definirajmo

$$U' = \{u' \in V \,:\, u' + v' \in S'\},$$

tako je $S' = U' + v'$. Pokazati moramo, da je U' r-razsežen vektorski prostor. Naj bo $U_{r-1} = [u_1, \ldots, u_{r-1}]$ in $W = [u_r]$. Potem imamo $U = U_{r-1} + W$, $U_{r-1} \cap W = \{0\}$, $U_{r-1} + v$ je $(r-1)$-razsežen afin podprostor, vsebovan v S, $W + v$ pa je premica, vsebovana v S. Po indukcijski predpostavki je $\phi(U_{r-1} + v) \subset S'$ afin podprostor dimenzije $(r-1)$, po predpostavki leme pa je $\phi(W + v) \subset S'$ premica. Zato obstajata vektorska podprostora $U'_{r-1}, W' \subset V$ z $\dim U'_{r-1} = r-1$ in $\dim W' = 1$, za katera velja

$$\phi(U_{r-1} + v) = U'_{r-1} + v'$$

in

$$\phi(W + v) = W' + v'.$$

Iz enačb $U'_{r-1} + v' \subset S'$, $W' + v' \subset S'$ in definicije U' dobimo

$$U'_{r-1} \subseteq U' \quad \text{in} \quad W' \subseteq U'.$$

Trdimo, da je

$$U'_{r-1} \cap W' = \{0\}.$$

Res, če bi bilo $U'_{r-1} \cap W' \ne \{0\}$, bi imeli $\left(U'_{r-1} + v'\right) \cap (W' + v') \ne \{v'\}$. Od tod sledi $(U_{r-1} + v) \cap (W + v) \ne \{v\}$ in nadalje $U_{r-1} \cap W \ne \{0\}$, kar je protislovje.

Ko dokažemo še enakost

$$U' = U'_{r-1} + W',$$

bo očitno sledilo, da je U' r-razsežen vektorski podprostor v V.

V ta namen izberimo poljuben $u' \in U'$. Potem je $u' + v' \in S'$. Ker je $\phi(S) = S'$ in $S = U + v$, obstaja vektor $u \in U$, za katerega je $\phi(u + v) = u' + v'$. Vektor u lahko razcepimo na $u = z + w$, pri čemer je $z \in U_{r-1}$ in $w \in W$. Izberimo $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0, 1\}$.

Potem je $\lambda z \in U_{r-1}$. Označimo premico, na kateri ležita točki $\lambda z + v$ in $u + v$ s p_1, torej

$$p_1 = \{\mu\lambda z + (1-\mu)\, u + v \,:\, \mu \in \mathbb{F}\}.$$

Označimo premico, na kateri ležita točki v in $w + v$ s p_2, torej

$$p_2 = \{\mu w + v \,:\, \mu \in \mathbb{F}\}.$$

Premici p_1 in p_2 se sekata v točki $\frac{\lambda}{\lambda-1}w + v$. Tako p_1 poteka skozi točke $\lambda z + v$, $\frac{\lambda}{\lambda-1}w + v$ in $u + v$. Naj bo

$$\phi\,(\lambda z + v) = z' + v' \quad \text{in} \quad \phi\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}w + v\right) = w' + v',$$

pri čemer sta $z' \in U'_{r-1}$ in $w' \in W'$. Potem točke $z' + v'$, $w' + v'$ in $u' + v'$ ležijo na premici $\phi\,(p_1)$. Posledično je $u' = \mu z' + (1-\mu)\, w'$ za nek $\mu \in \mathbb{F}$ in zato $u' \in U'_{r-1} + W'$. Dokazali smo inkluzijo $U' \subseteq U'_{r-1} + W'$.

Za dokaz obratne inkluzije izberimo poljubna $z' \in U'_{r-1}$ in $w' \in W'$ ter označimo $u' = z' + w'$. Izberimo $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0, 1\}$. Potem je $\lambda z' \in U'_{r-1}$. Označimo premico, na kateri ležita točki $\lambda z' + v'$ in $u' + v'$ s p'_1, torej

$$p'_1 = \{\mu\lambda z' + (1-\mu)\, u' + v' \,:\, \mu \in \mathbb{F}\}.$$

Naj bo p'_2 premica, na kateri ležita točki v' in $w' + v'$, torej

$$p'_2 = \{\mu w' + v' \,:\, \mu \in \mathbb{F}\}.$$

Premici p'_1 in p'_2 se sekata v točki $\frac{\lambda}{\lambda-1}w' + v'$. Tako p'_1 poteka skozi točke $\lambda z' + v'$, $\frac{\lambda}{\lambda-1}w' + v'$ in $u' + v'$. Ker je $\lambda z' \in U'_{r-1}$ in $\frac{\lambda}{\lambda-1}w' \in W'$, obstajata $z \in U_{r-1}$ in $w \in W$, za katera je

$$\phi\,(z + v) = \lambda z' + v' \quad \text{in} \quad \phi\,(w + v) = \frac{\lambda}{\lambda-1}w' + v'.$$

Po lemi 2.3.5 je $p'_1 = \phi\,(p)$, pri čemer je p premica skozi $z + v$ in $w + v$, točka $u' + v'$ pa je slika neke točke iz p. Tako je $u' + v' \in S'$ in zato $u' \in U'$ ter končno $U'_{r-1} + W' \subseteq U'$. □

Posledica 2.3.7. *Naj bo $\phi : V \to V$ bijektivna preslikava, ki preslika premice v premice. Če je $\phi\,(0) = 0$, potem ϕ preslika vsako množico linearno neodvisnih vektorjev v množico linearno neodvisnih vektorjev.*

Dokaz. Naj bodo $u_1, \ldots, u_r$ linearno neodvisni vektorji v V. Potem je $U = [u_1, \ldots, u_r]$ r-razsežen afin podprostor v V. Po lemi 2.3.6 je takšen prostor tudi $\phi\,(U)$. Ker je $0 \in U$ in $\phi\,(0) = 0$, je $\phi\,(U)$ r-razsežen vektorski podprostor v V. Z indukcijo na r bomo dokazali, da so $\phi\,(u_1), \ldots, \phi\,(u_r)$ linearno neodvisni. Če je $r = 1$, ni kaj dokazovati. Predpostavimo, da je $r \geq 2$ in da so $\phi\,(u_1), \ldots, \phi\,(u_{r-1})$ linearno neodvisni. Označimo $U_{r-1} = [u_1, \ldots, u_{r-1}]$ in $W = [u_r]$. Potem je $U = U_{r-1} + W$ in $U_{r-1} \cap W = \{0\}$. V dokazu leme 2.3.6 smo videli, da velja tudi $\phi\,(U) = U'_{r-1} + W'$ in $U'_{r-1} \cap W' = \{0\}$, pri čemer je $U'_{r-1} = \phi\,(U_{r-1})$ in $W' = \phi\,(W)$. Jasno imamo $\phi\,(u_1), \ldots, \phi\,(u_{r-1}) \in U'_{r-1}$ in $\phi\,(u_r) \in W'$, zato so $\phi\,(u_1), \ldots, \phi\,(u_r)$ linearno neodvisni. □

Sedaj smo pripravljeni dokazati glavni izrek tega razdelka.

Izrek 2.3.8 (Osnovni izrek afine geometrije)**.** *Naj bo V končno razsežen vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ dimenzije vsaj 2 in $\phi : V \to V$ bijektivna preslikava, za katero velja, da je slika vsake premice spet premica. Potem obstajata bijektivna semilinearna preslikava $A : V \to V$ in vektor $v \in V$, tako da je*

$$\phi\,(x) = Ax + v, \quad x \in V. \tag{2.3.2}$$

Dokaz. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $V = \mathbb{F}^n$ za $n \geq 2$. Zaradi lažjega zapisa bomo vektorje iz $\mathbb{F}^n$ pisali kot vrstice. Izrek bomo dokazali z indukcijo na n.

Predpostavimo najprej, da je $n = 2$. Če bi bile točke $\phi\,(0,0)$, $\phi\,(1,0)$ in $\phi\,(0,1)$ kolinearne, bi bile po lemi 2.3.5 takšne tudi točke $(0,0)$, $(1,0)$ in $(0,1)$, prostislovje. Torej so $\phi\,(0,0)$, $\phi\,(1,0)$ ter $\phi\,(0,1)$ nekolinearne in po trditvi 2.3.4 (b) obstaja afina transformacija, ki preslika $\phi\,(0,0)$, $\phi\,(1,0)$ in $\phi\,(0,1)$ zaporedoma v $(0,0)$, $(1,0)$ in $(0,1)$. Po komponiranju inverza te afine preslikave s ϕ lahko privzamemo, da je

$$\phi\,(0,0) = (0,0), \quad \phi\,(1,0) = (1,0) \quad \text{in} \quad \phi\,(0,1) = (0,1).$$

S p označimo premico skozi $(0,0)$ in $(1,0)$, s p^* pa premico skozi $(0,0)$ in $(0,1)$. Tako je

$$p = \{(\mu, 0) \,:\, \mu \in \mathbb{F}\} \quad \text{in} \quad p^* = \{(0, \mu) \,:\, \mu \in \mathbb{F}\}.$$

Po predpostavki je $\phi\,(p) = p$ in $\phi\,(p^*) = p^*$. Torej obstaja preslikava $\sigma : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, za katero je

$$\phi\,(\mu, 0) = (\sigma\,(\mu)\,, 0)\,, \quad \mu \in \mathbb{F}.$$

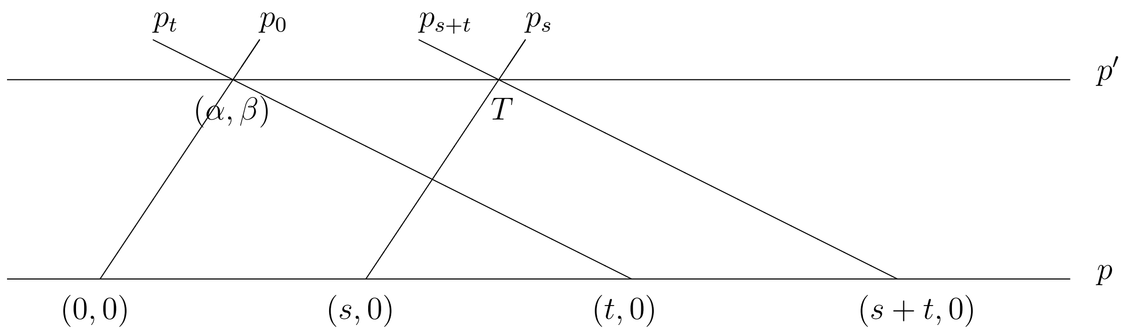
Trdimo, da je σ avtomorfizem obsega. Jasno je σ bijekcija in imamo $\sigma\,(0) = 0$ ter $\sigma\,(1) = 1$. Dokazati moramo, da je

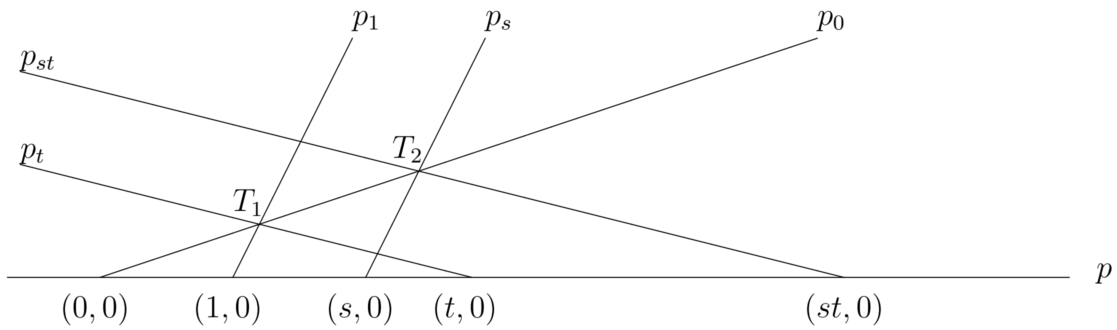
$$\sigma\,(s+t) = \sigma\,(s) + \sigma\,(t)\,, \quad s, t \in \mathbb{F} \setminus \{0\},$$

in

$$\sigma\,(st) = \sigma\,(s)\,\sigma\,(t)\,, \quad s, t \in \mathbb{F} \setminus \{0, 1\}.$$

Pri dokazu teh dveh formul si lahko pomagamo z naslednjima slikama.





Dokaz prve formule je naslednji. Naj bo (α, β) točka, ki ne leži niti na p niti na p^*. Potem $\alpha \neq 0$ in $\beta \neq 0$. Potegnimo premico p_0 skozi (α, β) in $(0,0)$, torej

$$p_0 = \{\mu\,(\alpha, \beta) \,:\, \mu \in \mathbb{F}\}.$$

Po lemi 2.3.3 poteka skozi točko (α, β) natanko ena premica p', ki je vzporedna s p. Potem je

$$p' = \{(\mu, 0) + (\alpha, \beta) \,:\, \mu \in \mathbb{F}\}.$$

Obstaja natanko ena premica p_s, ki vsebuje točko $(s,0)$ in je vzporedna s p_0, to je

$$p_s = \{\mu\,(\alpha, \beta) + (s, 0) \,:\, \mu \in \mathbb{F}\}.$$

Premici p_s in p' se sekata v točki

$$T = (s + \alpha, \beta)\,.$$

Označimo premico skozi $(t,0)$ in (α, β) s p_t in dobimo

$$p_t = \{\mu\,(t, 0) + (1-\mu)\,(\alpha, \beta) \,:\, \mu \in \mathbb{F}\} = \{\mu\,(t-\alpha, -\beta) + (\alpha, \beta) \,:\, \mu \in \mathbb{F}\}.$$

Naj bo nadalje p_{s+t} premica skozi T, ki je vzporedna s p_t:

$$p_{s+t} = \{\mu\,(t-\alpha, -\beta) + (s+\alpha, \beta) \,:\, \mu \in \mathbb{F}\}.$$

Potem je presek $p \cap p_{s+t} = \{(s+t, 0)\}$ neodvisen od izbire (α, β). Če v tem postopku namesto $(s,0)$ in $(t,0)$ pišemo $(\sigma\,(s)\,, 0)$ in $(\sigma\,(t)\,, 0)$, nam bo točka $(\sigma\,(s) + \sigma\,(t)\,, 0)$ zamenjala točko $(s+t, 0)$. Ker je ϕ bijektivna, slika vzporedne premice v vzporedne premice in zato dobimo $(\sigma\,(s+t)\,, 0) = \phi\,(s+t, 0) = (\sigma\,(s) + \sigma\,(t)\,, 0)$, torej $\sigma\,(s+t) = \sigma\,(s) + \sigma\,(t)$.

Dokažimo sedaj še drugo formulo. Naj bosta (α, β) in p_0 kot prej, izberimo pa še tako točko (α_1, β_1), da je premica

$$p_0' = \{\mu\,(\alpha_1, \beta_1) \,:\, \mu \in \mathbb{F}\}\,,$$

ki poteka skozi $(0,0)$ in (α_1, β_1), različna od premic p, p^* in p_0. Tako imamo $\alpha_1, \beta_1 \neq 0$, vektorja (α, β) in (α_1, β_1) pa sta linearno neodvisna, iz česar nadalje sledi $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta \neq 0$. Potegnimo premico

$$p_1 = \{\mu\,(\alpha_1, \beta_1) + (1, 0) \,:\, \mu \in \mathbb{F}\}$$

skozi točko $(1,0)$, ki je različna od p in ni vzporedna s p_0. Izračunajmo presečno točko premic p_0 in p_1:

$$T_1 = \left(\frac{\alpha\beta_1}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}, \frac{\beta\beta_1}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta} \right).$$

Označimo premico, ki je vzporedna s p_1 in vsebuje $(s,0)$, s

$$p_s = \{\mu(\alpha_1,\beta_1) + (s,0) \,:\, \mu \in \mathbb{F}\}.$$

Naj bo T_2 presečna točka premic p_0 in p_s:

$$T_2 = \left(\frac{s\alpha\beta_1}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}, \frac{s\beta\beta_1}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta} \right).$$

Potegnimo premico p_t skozi točki $(t,0)$ in T_1:

$$p_t = \left\{ \mu \left(t - \frac{\alpha\beta_1}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}, -\frac{\beta\beta_1}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta} \right) + \left(\frac{\alpha\beta_1}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}, \frac{\beta\beta_1}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta} \right) \,:\, \mu \in \mathbb{F} \right\}.$$

Premica, ki je vzporedna s p_t in vsebuje T_2, je

$$p_{st} = \left\{ \mu \left(t - \frac{\alpha\beta_1}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}, -\frac{\beta\beta_1}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta} \right) + s\left(\frac{\alpha\beta_1}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}, \frac{\beta\beta_1}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta} \right) \,:\, \mu \in \mathbb{F} \right\}.$$

Premici p_{st} in p se sekata v točki $(st,0)$ neodvisno od izbora točk (α,β) in (α_1,β_1). Če v postopku zamenjamo $(s,0)$ in $(t,0)$ s $(\sigma(s),0)$ in $(\sigma(t),0)$, dobimo na koncu točko $(\sigma(s)\sigma(t),0)$ namesto $(st,0)$. Tako je $\sigma(st) = \sigma(s)\sigma(t)$. Torej je σ avtomorfizem $\mathbb{F}$. Po komponiranju preslikave ϕ z bijektivno semilinearno preslikavo

$$(x,y) \mapsto \left(\sigma^{-1}(x), \sigma^{-1}(y)\right)$$

lahko predpostavimo, da je

$$\phi(\mu,0) = (\mu,0), \quad \mu \in \mathbb{F}.$$

Ker je $\phi(p^*) = p^*$, obstaja bijektivna preslikava $\tau : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, za katero je

$$\phi(0,\mu) = (0,\tau(\mu)), \quad \mu \in \mathbb{F}.$$

Podobno kot prej lahko dokažemo, da je τ avtomorfizem obsega.

Naj bosta $x,y \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Premica skozi $(x,0)$, ki je vzporedna s p^*, je

$$\{(0,\mu) + (x,0) \,:\, \mu \in \mathbb{F}\},$$

premica skozi $(0,y)$, vzporedna premici p, pa je

$$\{(\mu,0) + (0,y) \,:\, \mu \in \mathbb{F}\}.$$

Ker se ti dve premici sekata v točki (x,y), je

$$\phi(x,y) = (x,\tau(y)). \tag{2.3.3}$$

Premica skozi $(0,0)$ in (x,y) je $\{\mu(x,y) : \mu \in \mathbb{F}\}$. Zato je

$$\phi(\mu(x,y)) = \rho(\mu)(x,\tau(y)), \quad \mu \in \mathbb{F}$$

oziroma

$$\phi(\mu x, \mu y) = (\rho(\mu)x, \rho(\mu)\tau(y)), \quad \mu \in \mathbb{F},$$

pri čemer je $\rho : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ bijekcija. Ker sta x in y v (2.3.3) poljubna, ju lahko zamenjamo z μx in μy za katerikoli $\mu \in \mathbb{F}$ ter dobimo

$$\phi(\mu x, \mu y) = (\mu x, \tau(\mu)\tau(y)), \quad \mu \in \mathbb{F}.$$

Iz zadnjih dveh enačb zaključimo, da sta ρ in τ identiteti. Torej je

$$\phi(x,y) = (x,y), \quad x,y \in \mathbb{F}$$

in smo izrek dokazali za $n=2$.

Naj bo sedaj $n \geq 3$ in predpostavimo, da izrek velja za $V = \mathbb{F}^{n-1}$. Dokazali bomo, da potem velja tudi za $V = \mathbb{F}^n$. Po komponiranju translacije

$$x \mapsto x - \phi(0)$$

s preslikavo ϕ lahko predpostavimo, da je $\phi(0) = 0$. Naj bodo $e_1, e_2, \ldots, e_n$ standardni bazni vektorji $\mathbb{F}^n$. Po posledici 2.3.7 so vektorji $\phi(e_1), \phi(e_2), \ldots, \phi(e_n)$ linearno neodvisni. Potem obstaja bijektivna linearna preslikava $V \to V$, ki preslika te vektorje zaporedoma v vektorje $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Po komponiranju te preslikave s preslikavo ϕ lahko predpostavimo, da je

$$\phi(e_i) = e_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Vpeljimo množico

$$V_{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) : x_j \in \mathbb{F} \text{ za } j = 1, \ldots, n-1\}.$$

Potem je V_{n-1} $(n-1)$-razsežen afin podprostor v $\mathbb{F}^n$, ki vsebuje točke $0, e_1, \ldots, e_{n-1}$. Po lemi 2.3.6 je takšen afin podprostor tudi $\phi(V_{n-1})$. Iz trditve 2.3.1 sedaj sledi, da je $\phi(V_{n-1}) = V_{n-1}$. Tako ϕ inducira bijektivno preslikavo $V_{n-1} \to V_{n-1}$, ki slika premice v premice. Po indukcijski predpostavki obstajajo skalarji $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{F}$ in bijektivna semilinearna preslikava $A : \mathbb{F}^{n-1} \to \mathbb{F}^{n-1}$ s pripadajočim avtomorfizmom $\sigma : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, tako da je

$$\phi(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = (A \oplus \sigma)(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) + (a_1, \ldots, a_{n-1}, 0).$$

Ker je $\phi(0) = 0$, imamo $a_i = 0$ za $i = 1, \ldots, n-1$. Ko komponiramo semilinearno preslikavo $(A \oplus \sigma)^{-1}$ s ϕ, lahko predpostavimo, da je

$$\phi(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0).$$

Na enak način kot v dokazu za $n=2$ lahko sedaj dokažemo, da je

$$\phi(x) = x, \quad x \in \mathbb{F}^n,$$

vendar bomo podrobnosti izpustili. □

2.4 Osnovni izrek projektivne geometrije

Premice, ki vsebujejo 0, so natanko enorazsežni vektorski podprostori v V. Imenujemo jih tudi *žarki*, množici le-teh pa pravimo projektivni prostor in jo označimo s

$$\mathbb{P}V = \{[x] \,:\, x \in V \setminus \{0\}\}.$$

Naj bo W še en vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ in $A : V \to W$ bijektivna semilinearna preslikava. Potem A inducira bijektivno preslikavo $\tau : \mathbb{P}V \to \mathbb{P}W$, podano s predpisom $\tau([x]) = [Ax]$, $x \in V \setminus \{0\}$. Lepa lastnost tako dobljene preslikava je ta, da ohranja komplanarnost žarkov: žarki $[x], [y], [z] \in \mathbb{P}V$ ležijo v istem 2-razsežnem podprostoru natanko tedaj, ko isto velja za žarke $\tau([x]), \tau([y]), \tau([z]) \in \mathbb{P}W$. Osnovni izrek projektivne geometrije pove, da v primeru $\dim W \geq 3$ velja tudi obrat te ugotovitve: vse bijektivne preslikave med žarki, ki ohranjajo komplanarnost, so porojene z bijektivno semilinearno preslikavo. Cilj razdelka je dokazati ta izrek, kot reference pa navedimo [1, 2, 16]. V navedeni literaturi lahko najdemo splošnejše oblike izreka, navedli in dokazali pa bomo le verzijo, ki jo bomo potrebovali pri naših kasnejših problemih. Služila nam bo kot glavno orodje pri karakterizaciji ohranjevalcev na raznih prostorih matrik in operatorjev. Najprej pa dokažimo tehnično lemo.

Lema 2.4.1. *Naj bo $A : V \to W$ taka aditivna preslikava, da $A(V)$ vsebuje vsaj dva linearno neodvisna vektorja. Če je $A([x]) \subseteq [Ax]$ za vsak $x \in V$, potem obstaja tak homomorfizem obsega $\sigma : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, da je $A(\lambda x) = \sigma(\lambda) Ax$, $\lambda \in \mathbb{F}$, $x \in V$.*

Dokaz. Naj bo $\lambda \in \mathbb{F}$ neničelen skalar in definirajmo preslikavo $A_2 : V \to W$ s predpisom $A_2 x := A(\lambda x)$, $x \in V$. Potem za vsak $x \in V$ velja $A_2 x \in A([x]) \subseteq [Ax]$, torej sta $A_2 x$ in Ax linearno odvisna. Po lemi 2.2.3 obstaja tak skalar $\sigma(\lambda) \in \mathbb{F}$, da je $A(\lambda x) = \sigma(\lambda) Ax$, $x \in V$. Ko postavimo $\sigma(0) = 0$, dobimo preslikavo $\sigma : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$. Iz enakosti

$$\sigma(\lambda + \mu) Ax = A((\lambda + \mu) x) = (\sigma(\lambda) + \sigma(\mu)) Ax, \quad x \in V,$$

in

$$\sigma(\lambda\mu) Ax = A(\lambda\mu x) = \sigma(\lambda) \sigma(\mu) Ax, \quad x \in V,$$

zaključimo, da je σ homomorfizem obsega. □

Izrek 2.4.2 (Osnovni izrek projektivne geometrije)**.** *Naj bosta V in W vektorska prostora nad $\mathbb{F}$ dimenzije vsaj 3, $\tau : \mathbb{P}V \to \mathbb{P}W$ pa takšna bijektivna preslikava, da za poljubne paroma različne $[x], [y], [z] \in \mathbb{P}V$ velja*

$$[x] \subset [y] + [z] \iff \tau([x]) \subset \tau([y]) + \tau([z]) . \tag{2.4.1}$$

Potem obstaja bijektivna semilinearna preslikava $A : V \to W$, za katero je

$$\tau([x]) = [Ax] , \quad x \in V \setminus \{0\}.$$

Pred dokazom izreka bomo dokazali še dve lemi, ki ju bomo potrebovali. Od sedaj naprej naj veljajo oznake in predpostavke iz izreka.

Lema 2.4.3. *Naj bodo* $x_1, x_2, x_3 \in V \setminus \{0\}$ *in* $y_1, y_2, y_3 \in W \setminus \{0\}$ *takšni, da so izpolnjeni pogoji*

(i) $\tau([x_1]) = [y_1]$, $\tau([x_2]) = [y_2]$ *in* $\tau([x_3]) = [y_3]$,

(ii) $\tau([x_1 + x_2]) = [y_1 + y_2]$ *in* $\tau([x_1 + x_3]) = [y_1 + y_3]$,

(iii) y_1, y_2, y_3 *so linearno neodvisni.*

Potem je $\tau([x_2 + x_3]) = [y_2 + y_3]$ *in* $\tau([x_1 + x_2 + x_3]) = [y_1 + y_2 + y_3]$.

Dokaz. Iz $[x_1 + x_2 + x_3] \subset ([x_1 + x_2] + [x_3]) \cap ([x_1 + x_3] + [x_2])$ in (2.4.1) sklepamo, da je

$$\tau([x_1 + x_2 + x_3]) \subset ([y_1 + y_2] + [y_3]) \cap ([y_1 + y_3] + [y_2]).$$

Ker so y_1, y_2, y_3 linearno neodvisni, je presek na desni enak $[y_1 + y_2 + y_3]$, posledično pa je $\tau([x_1 + x_2 + x_3]) = [y_1 + y_2 + y_3]$. Podobno dobimo

$$\tau([x_2 + x_3]) \subset ([y_2] + [y_3]) \cap ([y_1] + [y_1 + y_2 + y_3]),$$

iz česar zaključimo $\tau([x_2 + x_3]) = [y_2 + y_3]$. □

Lema 2.4.4. *Naj bosta* $[x], [y] \in \mathbb{P}V$, *z pa naj bo tak vektor iz* $[x] + [y]$, *da* $z \notin [y]$. *Potem obstaja enolično določen vektor* $y' \in [y]$, *za katerega je* $[x] = [z + y']$.

Dokaz. Fiksirajmo neničelna vektorja $x \in [x]$ in $y \in [y]$. Potem obstajata natanko določena skalarja $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ in $\mu \in \mathbb{F}$, za katera je $z = \lambda x + \mu y$. Od tod dobimo $x = \frac{1}{\lambda}(z - \mu y)$, torej $y' = -\mu y$. □

Dokaz izreka 2.4.2. Fiksirajmo tri linearno neodvisne vektorje $a_1, a_2, a_3 \in V$. Ker premice $[a_1]$, $[a_2]$ in $[a_3]$ ne ležijo v isti ravnini, po (2.4.1) tudi premice $\tau([a_1])$, $\tau([a_2])$ in $\tau([a_3])$ ne ležijo v isti ravnini.

Najprej bomo pokazali, da obstajajo $b_1, b_2, b_3 \in W \setminus \{0\}$, tako da je $\tau([a_i]) = [b_i]$ za vsak i in $\tau([a_i + a_j]) = [b_i + b_j]$ za $i \neq j$. Izberimo vektor $b_1 \in W \setminus \{0\}$, za katerega je $\tau([a_1]) = [b_1]$. Iz $[a_1] \subset [a_1 + a_2] + [a_2]$ dobimo $b_1 \in \tau([a_1]) \subset \tau([a_1 + a_2]) + \tau([a_2])$. Po lemi 2.4.4 obstaja $b_2 \in \tau([a_2])$, tako da je $\tau([a_1 + a_2]) = [b_1 + b_2]$. Očitno $b_2 \neq 0$, saj $\tau([a_1 + a_2]) \neq \tau([a_1])$. Podobno obstaja neničelen $b_3 \in \tau([a_3])$, za katerega je $\tau([a_1 + a_3]) = [b_1 + b_3]$. Enakost $\tau([a_2 + a_3]) = [b_2 + b_3]$ sledi iz leme 2.4.3.

Sedaj bomo definirali preslikavo $A : V \to W$. Najprej postavimo $A(0) = 0$. Naj bo nadalje $x \in V \setminus \{0\}$. Izberimo tak $i \in \{1, 2, 3\}$, da $[x] \neq [a_i]$. Potem je $[a_i] \subset [a_i + x] + [x]$ in posledično $b_i \in \tau([a_i]) \subset \tau([a_i + x]) + \tau([x])$. Po lemi 2.4.4 obstaja enolično določen neničelen vektor $Ax \in \tau([x])$, za katerega je $\tau([a_i + x]) = [b_i + Ax]$.

V naslednjem koraku bomo dokazali, da definicija vektorja Ax ni odvisna od izbire vektorja a_i. Naj bo $x \in V \setminus \{0\}$ tak, da $[a_1] \neq [x] \neq [a_2]$. Potem obstaja tak neničelen vektor $Ax \in \tau([x])$, da je $\tau([a_1 + x]) = [b_1 + Ax]$. Dokazati moramo, da velja tudi $\tau([a_2 + x]) = [b_2 + Ax]$. Če so b_1, b_2 in Ax linearno neodvisni, želeni rezultat sledi iz leme 2.4.3. Sicer pa morajo biti linearno neodvisni vektorji b_1,

b_3, Ax in b_3, b_2, Ax, iz česar dobimo najprej $\tau([a_3+x]) = [b_3+Ax]$, nato pa še $\tau([a_2+x]) = [b_2+Ax]$.

Pokažimo, da je A aditivna, torej $A(x+y) = Ax + Ay$ za $x, y \in V$. Obravnavajmo najprej primer, ko sta x in y linearno neodvisna. Potem $\tau([x]) \neq \tau([y])$, zato sta tudi Ax in Ay linearno neodvisna. Ker $\tau([a_1])$, $\tau([a_2])$ in $\tau([a_3])$ ne ležijo v isti ravnini, obstaja tak $i \in \{1,2,3\}$, da $\tau([a_i]) \not\subset \tau([x]) + \tau([y])$. Iz enakosti $\tau([a_i+x]) = [b_i+Ax]$, $\tau([a_i+y]) = [b_i+Ay]$ in leme 2.4.3 sklepamo, da je $\tau([x+y]) = [Ax+Ay]$ in $\tau([a_i+x+y]) = [b_i+Ax+Ay]$. Ker pa je po drugi strani $\tau([a_i+x+y]) = [b_i + A(x+y)]$, mora biti $A(x+y) = Ax+Ay$. Oglejmo si še primer, ko sta x in y linearno odvisna. Če je $x = 0$ ali $y = 0$, ni kaj dokazovati, sicer pa izberimo tak $z \in V$, da sta y in z linearno neodvisna. Potem velja bodisi $y = -x$ bodisi sta $x+y$ in z linearno neodvisna. V obeh primerih dobimo $A(x+y+z) = A(x+y) + Az$. Ker sta x in $y+z$ linearno neodvisna, velja $A(x+y+z) = Ax + A(y+z) = Ax + Ay + Az$, iz česar zaključimo $A(x+y) = Ax+Ay$.

Po definiciji preslikave A imamo $[A(\lambda x)] = \tau([\lambda x]) = \tau([x]) = [Ax]$ za poljubna $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ in $x \in V \setminus \{0\}$, torej je $A([x]) \subseteq [Ax]$. Po lemi 2.4.1 obstaja tak homomorfizem obsega $\sigma : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, da je $A(\lambda x) = \sigma(\lambda) Ax$ za vse $\lambda \in \mathbb{F}$ in $x \in V$. Dokažimo, da je A bijektivna, iz česar direktno sledi, da je tudi σ bijektiven. Očitno je enačba (2.4.1) izpolnjena tudi za τ^{-1}. Po že dokazanem obstajata aditivna preslikava $B : W \to V$ in homomorfizem obsega ω, tako da je $B(\lambda y) = \omega(\lambda) By$, $y \in W$, $\lambda \in \mathbb{F}$, in $\tau^{-1}([y]) = [By]$, $y \in W \setminus \{0\}$. To pomeni, da za poljuben $x \in V \setminus \{0\}$ velja

$$[x] = \tau^{-1}([Ax]) = [BAx],$$

za poljuben $y \in W \setminus \{0\}$ pa

$$[y] = \tau([By]) = [ABy].$$

Po lemi 2.2.3 sta tako AB in BA večkratnika identitete. Zato ima A levi in desni inverz ter je posledično bijektivna. $\square$

Kasneje bomo potebovali še drugo obliko osnovnega izreka o projektivni geometriji. Preden jo dokažemo kot posledico tega izreka, pa navedimo nekaj opažanj.

Naj bo $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor nad $\mathbb{F}$. Spomnimo se delne urejenosti $\leq$ na $\mathcal{B}_s(\mathcal{H})$ iz (1.1.1). Naslednja lema nam da geometrijsko in algebraično interpretacijo te delne urejenosti na množici projektorjev $\mathcal{P}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}_s(\mathcal{H})$.

Lema 2.4.5. *Naj bosta $P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$. Potem imamo*

$$P \leq Q \iff \operatorname{im} P \subseteq \operatorname{im} Q \iff QP = P.$$

Dokaz. Predpostavimo najprej, da je $P \leq Q$, torej je $Q - P$ pozitivno semidefiniten. Potem za vsak $x \in \operatorname{im} P$ velja $Px = x$ in posledično

$$\|Qx - x\|^2 = \langle Qx, Qx\rangle - \langle x, Qx\rangle - \langle Qx - x, x\rangle = -\langle (Q-P)x, x\rangle \leq 0$$

oziroma $Qx = x$. Zato je $\operatorname{im} P \subseteq \operatorname{im} Q$. Od tod nadalje sledi, da za vsak $x \in \mathcal{H}$ velja $Px \in \operatorname{im} Q$, kar nam da $QPx = Px$ oziroma $QP = P$. Če pa predpostavimo $QP = P$, potem po adjungiranju dobimo tudi $PQ = P$. Sedaj lahek račun pokaže, da je $Q - P$ projektor in zato pozitivno semidefiniten. S tem je dokaz zaključen. $\square$

Za vsak podprostor $U \in \operatorname{Lat} \mathcal{H}$ naj P_U označuje projektor s sliko U.

Posledica 2.4.6. *Naj bo n naravno število večje od 2 in $\phi : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ urejenostni avtomorfizem. Potem obstaja bijektivna semilinearna preslikava $A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$, za katero je*

$$\phi(P) = P_{A(\operatorname{im} P)}, \quad P \in \mathcal{P}_n.$$

Dokaz. Z indukcijo lahko dokažemo, da ϕ ohranja rang, saj za poljubna $P \in \mathcal{P}_n$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ velja, da je množica $\{Q \in \mathcal{P}_n : Q \leq P, \operatorname{rang} Q \geq k\}$ singleton natanko tedaj, ko je $\operatorname{rang} P = k$. Torej preslikava ϕ inducira preslikavo $\tau : \mathbb{PF}^n \to \mathbb{PF}^n$ s predpisom $\tau([x]) = \operatorname{im} \phi \left(P_{[x]}\right)$ za $[x] \in \mathbb{PF}^n$. Ker je ϕ bijektivna, je tudi τ bijektivna. Naj bodo nadalje $[x], [y], [z] \in \mathbb{PF}^n$ paroma različni. Trdimo, da velja (2.4.1). Res, imamo

$$[x] \subset [y] + [z] \iff P_{[x]} \leq P_{[y]+[z]} \iff \phi\left(P_{[x]}\right) \leq \phi\left(P_{[y]+[z]}\right).$$

Ker je $\phi\left(P_{[x]}\right) = P_{\tau([x])}$, moramo dokazati le še, da je $\phi\left(P_{[y]+[z]}\right) = P_{\tau([y])+\tau([z])}$. To pa drži, saj sta $\phi\left(P_{[y]+[z]}\right)$ in $P_{\tau([y])+\tau([z])}$ projektorja ranga 2, katerih sliki vsebujeta $\tau([y])$ in $\tau([z])$. Izrek 2.4.2 nam sedaj pove, da obstaja bijektivna semilinearna preslikava $A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$, za katero je $\tau([x]) = [Ax]$, $[x] \in \mathbb{PF}^n$. To pomeni, da je $\phi(Q) = P_{A(\operatorname{im} Q)}$ za vsak $Q \in \mathcal{P}_n^1$. Naj bosta $P \in \mathcal{P}_n$ in $x \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}$. Potem je $x \in \operatorname{im} \phi(P) \iff P_{[x]} \leq \phi(P)$. Ker pa je $P_{[x]} = \phi\left(P_{[A^{-1}x]}\right)$, dobimo $x \in \operatorname{im} \phi(P) \iff A^{-1}x \in \operatorname{im} P$. Torej, $\phi(P) = P_{A(\operatorname{im} P)}$. $\square$

Kot še eno pomembno posledico izreka 2.4.2 navedimo še Uhlhornov izrek [71]. V ta namen uvedimo najprej pojem: operatorju $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ pravimo antiunitaren, če je konjugirano linearen, izometrija in surjektiven. Iz trditve 2.2.6 vemo, da za vsak takšen operator U obstaja adjungirani operator U^*.

Izrek 2.4.7 (Uhlhornov izrek)**.** *Naj bo $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor nad $\mathbb{F}$, $\dim \mathcal{H} \geq 3$ in $\phi : \mathcal{P}^1(\mathcal{H}) \to \mathcal{P}^1(\mathcal{H})$ bijektivna preslikava, za katero velja*

$$PQ = 0 \iff \phi(P)\phi(Q) = 0, \quad P, Q \in \mathcal{P}^1(\mathcal{H}). \tag{2.4.2}$$

- *Če je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, potem obstaja bodisi unitaren bodisi antiunitaren operator $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, za katerega velja*

$$\phi(P) = UPU^*, \quad P \in \mathcal{P}^1(\mathcal{H}).$$

- *Če je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, potem obstaja ortogonalen operator $O : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, za katerega velja*

$$\phi(P) = OPO^*, \quad P \in \mathcal{P}^1(\mathcal{H}).$$

Opomba 2.4.8. *Za $P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ imamo* $\operatorname{sl}(PQ) = \operatorname{sl}(PQ(PQ)^*)$. *Ker je operator $PQ(PQ)^*$ pozitivno semidefiniten, je njegova sled enaka 0 natanko tedaj, ko je sam operator enak ničelen. Iz $\|PQ(PQ)^*\| = \|PQ\|^2$ pa zaključimo, da je*

$$\operatorname{sl}(PQ) = 0 \iff PQ = 0.$$

Dokaz. Preslikava ϕ inducira bijektivno preslikavo $\tau : \mathbb{P}\mathcal{H} \to \mathbb{P}\mathcal{H}$ s predpisom $\tau([x]) = \operatorname{im}\phi\left(P_{[x]}\right)$. Za to preslikavo velja

$$[x] \perp [y] \iff \tau([x]) \perp \tau([y]), \quad [x], [y] \in \mathbb{P}\mathcal{H}.$$

Če so $[x], [y], [z] \in \mathbb{P}\mathcal{H}$ paroma različni, potem imamo $[x] \subset [y] + [z]$ natanko tedaj, ko je vsak element $\mathbb{P}\mathcal{H}$, ki je pravokoten na $[y]$ in $[z]$, pravokoten tudi na $[x]$. Posledično je za preslikavo τ izpolnjena enačba (2.4.1). Po izreku 2.4.2 obstaja bijektivna semilinearna preslikava $V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, za katero je $\tau([x]) = [Vx]$. Naj bo $\sigma : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ pripadajoč avtomorfizem obsega. Če je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, je znano, da mora biti σ kar identiteta, v primeru $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ pa dokažimo, da je σ bodisi identiteta bodisi kompleksno konjugiranje. Naslenji računi veljajo za splošen primer $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, če upoštevamo $\overline{\mu} = \mu$ za $\mu \in \mathbb{R}$. Naj bosta $x, y \in \mathcal{H}$ poljubna pravokotna enotska vektorja. Za vsak $\lambda \in \mathbb{R}$ velja

$$\lambda x + y \perp x - \lambda y.$$

Ker je $\sigma(-1) = -1$, sledi

$$\sigma(\lambda) Vx + Vy \perp Vx - \sigma(\lambda) Vy$$

in nadalje

$$\sigma(\lambda) \|Vx\|^2 = \overline{\sigma(\lambda)} \|Vy\|^2. \tag{2.4.3}$$

To pomeni, da je $\sigma(\lambda)^2 = \frac{|\sigma(\lambda)|^2 \|Vy\|^2}{\|Vx\|^2} \geq 0$, kar nam da $\sigma(\lambda) \in \mathbb{R}$. Tako je $\sigma|_{\mathbb{R}}$ endomorfizem obsega $\mathbb{R}$, torej identiteta. Ker je $\sigma(i) \in \{i, -i\}$, zaključimo, da mora biti σ v primeru $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ enak bodisi identiteti bodisi kompleksnemu konjugiranju.

Preostane dokazati, da je V skalarni večkratnik izometrije. Enačba (2.4.3) nam pove, da za poljubna pravokotna enotska vektorja x, y velja $\|Vx\| = \|Vy\|$. Če pa sta x in y poljubna enotska vektorja, lahko izberemo vektor z, ki je pravokoten na oba, zato velja $\|Vx\| = \|Vz\| = \|Vy\|$. Fiksirajmo enotski $x_0 \in \mathcal{H}$ in naj bo $U = \frac{1}{\|Vx_0\|} V$. Potem po pravkar dokazanem za vsak $x \in \mathcal{H}$ velja

$$\|Ux\| = \frac{\|x\|}{\|Vx_0\|} \left\| V\left(\frac{1}{\|x\|} x\right) \right\| = \frac{\|x\|}{\|Vx_0\|} \|Vx_0\| = \|x\|, \tag{2.4.4}$$

torej je U izometrija. Posledično je U unitaren ali antiunitaren operator v primeru $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ in ortogonalen operator v primeru $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Prevedimo dobljeni rezultat še nazaj v jezik operatorjev. Če je $P = \frac{1}{\|x\|^2} x \otimes x^*$ projektor na $[x]$, potem je

$$\phi(P) = P_{[Vx]} = P_{[Ux]} = \frac{1}{\|Ux\|^2} Ux \otimes (Ux)^* = \frac{1}{\|x\|^2} Ux \otimes (Ux)^* = UPU^*.$$

□

Poglavje 3

Ohranjevalci matričnih parov s fiksno vrednostjo skalarnega produkta

Uvod

Naj bo n naravno število. Označimo množico $n \times n$ efektov z $\mathcal{E}_n$, torej

$$\mathcal{E}_n = \{A \in M_n(\mathbb{F}) \,:\, 0 \leq A \leq I\}\,.$$

Opomnimo, da lahko $\mathcal{E}_n$ označuje bodisi $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ bodisi $\mathcal{E}_n(\mathbb{C})$, torej množico realnih ali kompleksnih efektov. Večkrat bomo obravnavali oba primera naenkrat. Kadar temu ne bo tako, bo pomen $\mathcal{E}_n$ jasen iz konteksta.

Naj bo c realno število. Proučevali bomo bijektivne preslikave ϕ, ki delujejo na kateri od množic $\mathcal{H}_n, \mathcal{S}_n, \mathcal{E}_n$ in $\mathcal{P}_n^1$ ter zadoščajo pogoju

$$\text{sl}\,(AB) = c \iff \text{sl}\,(\phi(A)\,\phi(B)) = c. \tag{3.0.1}$$

Motivacija pri tem je dvojna. Najprej se spomnimo klasičnega Wignerjevega izreka.

Izrek 3.0.1 (Wignerjev izrek)**.** *Naj bo $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor nad $\mathbb{F}$ in $\phi : \mathcal{P}^1(\mathcal{H}) \to \mathcal{P}^1(\mathcal{H})$ bijektivna preslikava, za katero velja*

$$\text{sl}\,(PQ) = \text{sl}\,(\phi(P)\,\phi(Q))\,, \quad P, Q \in \mathcal{P}^1(\mathcal{H})\,. \tag{3.0.2}$$

- *Če je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, potem obstaja bodisi unitaren bodisi antiunitaren operator $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, za katerega velja*

$$\phi(P) = UPU^*, \quad P \in \mathcal{P}^1(\mathcal{H})\,.$$

- *Če je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, potem obstaja tak ortogonalen operator $O : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, da je*

$$\phi(P) = OPO^*, \quad P \in \mathcal{P}^1(\mathcal{H})\,.$$

Ta razultat ima tudi geometrijski pomen. Projektorje ranga 1 lahko namreč identificiramo z enorazsežnimi podprostori (žarki) v $\mathcal{H}$ tako, da projektor $P = \frac{1}{\|x\|^2} x \otimes x^*$ identificiramo z njegovo sliko $\operatorname{im} P = [x]$. Količino sl (PQ) lahko potem interpretiramo kot kvadrat kosinusa kota med žarkoma $[x] = \operatorname{im} P$ in $[y] = \operatorname{im} Q$, saj lahko iz lastnosti v lemi 2.1.1 preprosto izpeljemo

$$\text{sl}\,(PQ) = \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|x\|^2 \|y\|^2}.$$

Wignerjev izrek lahko torej formuliramo na naslednji način. Vsaka bijektivna preslikava na žarkih v $\mathcal{H}$, ki ohranja kote med njimi, je inducirana bodisi z unitarnim bodisi z antiunitarnim operatorjem na $\mathcal{H}$. Pomembna posplošitev tega izreka je Uhlhornov izrek 2.4.7. Ta nam skupaj z opombo 2.4.8 namreč pove, da v primeru $\dim \mathcal{H} \geq 3$ isti zaključek velja pod milejšo predpostavko, da se ohranja le pravokotnost med žarki.

Omenimo še, da v matematičnih temeljih kvantne mehanike projektorje ranga ena imenujejo čista stanja (pure states), količina sl (PQ) pa predstavlja prehodno verjetnost (transition probability) med P in Q. Pojavi se naravno vprašanje, kaj se zgodi, če prehodno verjetnost 0 v (2.4.2) zamenjamo s kako drugo fiksno vrednostjo c, $0 < c < 1$. Več informacij o matematičnem in fizikalnem ozadju tega problema lahko bralec najde v Molnárjevi knjigi [47].

Druga motivacija pride iz proučevanja 2-lokalnih avtomorfizmov algeber operatorjev [41, 47]. Naj bo $\mathcal{A}$ algebra. Preslikavi $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ pravimo 2-lokalni avtomorfizem, če za vsak par $a, b \in \mathcal{A}$ obstaja tak avtomorfizem $\phi_{a,b} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ (odvisen od a in b), da je $\phi(a) = \phi_{a,b}(a)$ in $\phi(b) = \phi_{a,b}(b)$. Glavni korak karakterizacije 2-lokalnih avtomorfizmov določenih standardnih algeber operatorjev je opis splošne oblike preslikav ϕ na matričnih algebrah, ki zadoščajo pogoju

$$\text{sl}\,(\phi(A)\,\phi(B)) = \text{sl}\,(AB) \tag{3.0.3}$$

za vse matrike A, B (glej poglavje 3.4 v [47], posebej (3.4.2) na strani 189). Molnárjev pristop k proučevanja 2-lokalnih avtomorfizmov s pomočjo preslikav, ki zadoščajo (3.0.3), je sprožil nastanek veliko člankov, ki se ukvarjajo s sorodnimi spektralnimi pogoji, na primer [13, 14, 18, 26, 27]. V tem poglavju pa problem (3.0.3) posplošimo tako, da proučujemo preslikave, ki ohranjajo le sledi produktov z dano fiksno vrednostjo.

Na študij naših problemov lahko gledamo tudi kot na poseben primer študija nelinearnih (splošnih) ohranjevalcev, ki se ukvarja s proučevanjem preslikav na matrikah ali operatorjih s posebnimi lastnostmi. Na primer, za dano funkcijo f na matrikah ali operatorjih iščemo karakterizacijo preslikav ϕ, za katere velja $f(\phi(A)\,\phi(B)) = f(AB)$ za vse matrike A, B iz definicijskega območja ϕ; glej npr. [12] in tamkajšnje reference. V veliko primerih se izkaže, da so takšne prelikave kompozicija multiplikativne preslikave in kakšne presproste operacije, na primer množenja s skalarjem. V našem primeru obravnavamo funkcijo na matrikah $f(A) = \text{sl}\, A$ in pogoj $f(AB) = c \iff f(\phi(A)\,\phi(B)) = c$, ki je šibkejši od pogoja $f(AB) = f(\phi(A)\,\phi(B))$ za vse pare (A, B). Zanimivo je, da naši rezultati pokažejo tudi, da so naše iskane preslikave močno povezane z multiplikativnimi preslikavami. Vemo, da je $\text{sl}\, A$ vsota lastnih vrednosti matrike A. Zato lahko na naš študij gledamo kot na posplošitev študija ohranjevalcev lastnih vrednosti produktov matrik; glej [13] in tamkajšnje reference. Nadalje lahko opazujemo tudi posebne podmnožice $\mathcal{S}$ matrik ali operatorjev in proučujemo preslikave ϕ, za katere imamo $AB \in \mathcal{S} \Longrightarrow \phi(A)\,\phi(B) \in \mathcal{S}$ ali pa $AB \in \mathcal{S} \iff \phi(A)\,\phi(B) \in \mathcal{S}$; glej na primer [39]. V našem primeru je $\mathcal{S}$ množica vseh matrik s sledjo c.

Bolj splošno, za binarno operacijo $*$ na matrikah ali operatorjih, na primer $A * B = A + B, A - B, AB, ABA, AB + BA, AB - BA$ ali Schurov produkt (po komponentah) $A \circ B$, obstaja interes za karakterizacijo preslikav ϕ, za katere velja kateri od naslednjih pogojev:

1) $f(\phi(A) * \phi(B)) = f(A * B)$ za vse pare (A, B),

2) $f(\phi(A) * \phi(B)) = c \Longrightarrow$ (oz. $\iff$) $f(A * B) = c$,

3) $A * B \in \mathcal{S} \Longrightarrow$ (oz. $\iff$) $\phi(A) * \phi(B) \in \mathcal{S}$;

glej razdelek 1.2 in pa članke [14, 15, 18, 25, 26, 27, 37, 38] ter tamkajšnje reference.

Naj na kratko razložimo glavne rezultate. Proučujemo bijektivne preslikave ϕ, ki delujejo na kateri od množic $\mathcal{H}_n$, $\mathcal{S}_n$, $\mathcal{E}_n$ ali $\mathcal{P}_n^1$ in izpolnjujejo pogoj (3.0.1). Primera, ko ϕ deluje na $\mathcal{H}_n$ ali $\mathcal{S}_n$, sta najlažja. Najprej opazimo, da imamo na realnih vektorskih prostorih $\mathcal{H}_n$ in $\mathcal{S}_n$ definiran običajen skalarni produkt s predpisom $\langle A, B\rangle = \mathrm{sl}\,(AB)$. Ortogonalne transformacije na $\mathcal{H}_n$ ($\mathcal{S}_n$) očitno zadoščajo pogoju (3.0.1). Z uporabo osnovnega izreka afine geometrije lahko dokažemo, da v primeru $c \neq 0$ ni drugih preslikav s to lastnostjo. Če je $c = 0$, potem vsaka ortogonalna transformacija pomnožena s skalarno povsod neničelno funkcijo zadošča pogoju (3.0.1). Spet lahko dokažemo, da so take preslikave edine, ki izpolnjujejo naše predpostavke. Tokrat dokaz temelji na osnovnem izreku projektivne geometrije.

Problem postane veliko bolj kompliciran, ko obravnavamo preslikave na množici efektov. Najprej je preprosto videti, da velja $\mathrm{sl}\,(AB) \leq \mathrm{sl}\,A$ za vse $A, B \in \mathcal{E}_n$. Zato nam predpostavka (3.0.1) ne pove ničesar o obnašanju preslikave ϕ na množici efektov s sledjo manjšo od c. Naj bo $0 < c \leq 1$ in $\phi : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ bijektivna preslikava, za katero velja (3.0.1). Pokazali bomo, da je množica vseh efektov s sledjo največ c invariantna za ϕ. Obnašanje ϕ na množici efektov s sledjo manjšo c je poljubno. Na množici efektov s sledjo večjo kot c pa ima ϕ pričakovano lepo obliko. V primeru efektov ni le rezultat zanimivejši, ampak je tudi dokaz precej bolj zapleten kot v primerih $\mathcal{H}_n$ in $\mathcal{S}_n$.

Zaradi ozadja v kvantni mehaniki je primer, ko proučujemo preslikave na $\mathcal{P}_n^1$, najbolj zanimiv. Reševanje tega problema se izkaže za precejšnji izziv. Nekaj razultatov nam je uspelo dobiti le v primeru $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Ko opazujemo preslikave na projektorjih ranga 1, je enačba (3.0.1) smiselna le za $0 \leq c < 1$. Tudi v realnem primeru problem še ni rešen dokončno. Z našimi tehnikami smo uspeli rešiti le primer, ko je $c \geq \frac{1}{2}$. Spet dobimo pričakovani rezultat, da je ϕ porojena z ortogonalno transformacijo na $\mathbb{R}^n$.

Na tem področju ostaja torej še precej odprtih vprašanj. Omenimo najpomembnejša: primer $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ pri proučevanju preslikav na $\mathcal{P}_n^1$, ostale vrednosti za c, ko delamo s preslikavami na efektih ali pa projektorjih ranga 1 in študija preslikav na operatorjih na neskončno razsežnih Hilbertovih prostorih.

Vsebina tega poglavja je povzeta po [36].

3.1 Preslikave na $\mathcal{H}_n$ in $\mathcal{S}_n$

Splošno obliko bijektivnih preslikav, ki zadoščajo (3.0.1), je veliko lažje poiskati na $\mathcal{H}_n$ in $\mathcal{S}_n$ kot na njunih podmnožicah $\mathcal{E}_n$ in $\mathcal{P}_n^1$. Razlog se skriva v tem, da sta $\mathcal{H}_n$ in $\mathcal{S}_n$ realna vektorska prostora. Dokazali bomo bolj splošen rezultat z geometrijskim pristopom. Začnimo s primerom $c = 0$ in formulirajmo problem v jeziku linearnih funkcionalov. Za vektorski prostor V naj V' označuje njegov dualni prostor, adjungirano preslikavo linearne preslikave $\alpha : V \to V$ pa označimo z $\alpha' : V' \to V'$.

Lema 3.1.1. *Naj bo V končno razsežen realen vektorski prostor dimenzije vsaj 3, $\tau : V \to V$ in $\sigma : V' \to V'$ pa naj bosta preslikavi. Potem sta naslednji trditvi ekvivalentni:*

- *τ in σ sta bijektivni ter za vsak par $x \in V$, $f \in V'$ velja*
$$f(x) = 0 \iff \sigma(f)(\tau(x)) = 0, \tag{3.1.1}$$
- *obstaja bijektivna linearna preslikava $\varphi : V \to V$ in funkciji $\xi : V \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\zeta : V' \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tako da imamo*
$$\tau(x) = \xi(x)\varphi(x), \quad x \in V,$$
$$\sigma(f) = \zeta(f)\left(\varphi^{-1}\right)'(f), \quad f \in V',$$
funkciji $t \mapsto t\xi(tx)$ in $t \mapsto t\zeta(tf)$ pa sta bijekciji iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$ za vsak $x \in V \setminus \{0\}$ oziroma vsak $f \in V' \setminus \{0\}$.

Dokaz. Predpostavimo najprej, da je izpolnjen drugi pogoj. Potem enačba (3.1.1) očitno drži, zato je potrebno utemeljiti le bijektivnost preslikav τ in σ. Dokažimo bijektivnost τ, dokaz za σ pa je analogen. Začnimo z dokazom injektivnosti. Če sta $x, y \in V$ takšna, da je $\tau(x) = \tau(y)$, potem je $\varphi(\xi(x)x) = \varphi(\xi(y)y)$, od koder iz injektivnosti φ sledi $\xi(x)x = \xi(y)y$. Od tod dobimo $y = tx$ za $t = \frac{\xi(x)}{\xi(y)} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. To nam nadalje da $\xi(x)x = t\xi(tx)x$. Če je $x = 0$, imamo tudi $y = 0$, sicer pa iz predpostavke dobimo $t = 1$. V vsakem primeru zaključimo $y = x$. Dokažimo še surjektivnost. Naj bo $y \in V \setminus \{0\}$. Ker je φ surjektivna, obstaja tak $x \in V \setminus \{0\}$, da je $\varphi(x) = y$. Po predpostavki vemo, da obstaja tak $t \in \mathbb{R}$, da je $t\xi(tx) = 1$, od koder sklepamo $\tau(tx) = t\xi(tx)\varphi(x) = \varphi(x) = y$.

Predpostavimo sedaj, da je izpolnjen prvi pogoj. Ko v (3.1.1) vstavimo $x = 0$, dobimo $\tau(0) = 0$, vstavljanje $f = 0$ pa nam da $\sigma(0) = 0$. Označimo $k = \dim V$. Funkcionali $f_1, \ldots, f_k \in V'$ so linearno neodvisni, če in samo če je presek njihovih jeder trivialen, kar pomeni, da za vsak $x \in V$ velja $f_1(x) = \ldots = f_k(x) = 0 \iff x = 0$. Ker lahko vsako linearno nedvisno podmnožico v V' razširimo do baze V', sledi, da so funkcionali $g_1, \ldots, g_m \in V'$ linearno neodvisni natanko tedaj, ko so $\sigma(g_1), \ldots, \sigma(g_m)$ linearno neodvisni. Podobno se prepričamo, da je podmnožica V linearno neodvisna natanko tedaj, ko je množica iz τ-slik njenih vektorjev linearno neodvisna.

Naj bo $x \in V$ neničelen vektor. Potem obstajajo linearno neodvisni funkcionali $f_1, \ldots, f_{k-1}$, tako da je $f_1(x) = \ldots = f_{k-1}(x) = 0$. Imamo $[x] = \{z \in V \ : \ f_1(z) =$

$\ldots = f_{k-1}(z) = 0\}$. Zato je $\tau([x]) = \{z \in V : \sigma(f_1)(z) = \ldots = \sigma(f_{k-1})(z) = 0\} = [\tau(x)]$. Torej τ inducira bijektivno preslikavo $\mathbb{P}\tau : \mathbb{P}V \to \mathbb{P}V$ s predpisom $\mathbb{P}\tau([x]) = [\tau(x)]$, $x \in V \setminus \{0\}$. Podobno σ na naraven način inducira preslikavo $\mathbb{P}\sigma$ na projektivnem prostoru $\mathbb{P}V'$.

Pokazali bomo, da za poljubne paroma linearno neodvisne $x, y, z \in V$ velja (2.4.1). Ker ima preslikava τ^{-1} enake lastnosti kot τ, je dovolj pokazati samo eno smer, $[x] \subset [y] + [z] \Rightarrow \tau([x]) \subset \tau([y]) + \tau([z])$. Iz linearne neodvisnosti y in z sklepamo, da lahko najdemo linerno neodvisne funkcionale $f_1, \ldots, f_{k-2}$, za katere je $f_1(y) = f_1(z) = \ldots = f_{k-2}(y) = f_{k-2}(z) = 0$. Sledi, da $f_1(x) = \ldots = f_{k-2}(x) = 0$. Jasno sta $\tau([y])$ in $\tau([z])$ različna enodimenzionalna podprostora v V, ki razpenjata prostor $W = \{w \in V : \sigma(f_1)(w) = \ldots = \sigma(f_{k-2})(w) = 0\}$. Ker pa je $\tau([x]) \subset W$, imamo $\tau([x]) \subset \tau([y]) + \tau([z])$, kot smo želeli.

Po izreku 2.4.2 obstaja bijektivna linearna preslikava $\varphi : V \to V$, tako da je $\mathbb{P}\tau([x]) = [\varphi(x)]$, $x \in V \setminus \{0\}$. Podobno obstaja bijektivna linearna preslikava $\eta : V' \to V'$, za katero je $\mathbb{P}\sigma([f]) = [\eta(f)]$, $f \in V' \setminus \{0\}$. Očitno imamo

$$f(x) = 0 \iff \eta(f)(\varphi(x)) = 0, \quad x \in V, \quad f \in V'.$$

Torej za vsak $f \in V'$ velja $\ker f = \ker(\eta(f) \circ \varphi)$ in tako sta f ter $\eta(f) \circ \varphi$ linearno odvisna. Če uporabimo lemo 2.2.3 za vektorski prostor V' in preslikavi $\mathrm{id}_{V'}$ ter $f \mapsto \eta(f) \circ \varphi$, sklepamo, da obstaja neničelno realno število a, za katero je

$$\eta(f)(\varphi(x)) = af(x), \quad x \in V, \quad f \in V'.$$

Po množenju preslikave η z neničelnim skalarjem lahko predpostvimo, da je $a = 1$, kar nam da $\eta = (\varphi^{-1})'$.

Poleg tega obstaja funkcija $\xi : V \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, za katero je $\tau(x) = \xi(x)\varphi(x)$, $x \in V$. Iz bijektivnosti preslikave τ sledi, da je pri kateremkoli neničelnem $x \in V$ funkcija $t \mapsto t\xi(tx)$, $t \in \mathbb{R}$, bijekcija množice $\mathbb{R}$ same nase. Podobno obstaja funkcija $\zeta : V' \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tako da je $\sigma(f) = \zeta(f)\eta(f)$, $f \in V'$. Funkcija $t \mapsto t\zeta(tf)$, $t \in \mathbb{R}$, je bijekcija iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$ za vsak $f \in V' \setminus \{0\}$. $\square$

Dobljeni rezultat bomo sedaj uporabili za primer vektorskih prostorov $\mathcal{H}_n$ in $\mathcal{S}_n$.

Izrek 3.1.2. *Naj bo n naravno število večje od 1 in $\phi : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n$ preslikava. Potem sta naslednji trditvi ekvivalentni:*

- *ϕ je bijektivna in za vsak par $A, B \in \mathcal{H}_n$ imamo*

$$\mathrm{sl}\,(AB) = 0 \iff \mathrm{sl}\,(\phi(A)\phi(B)) = 0,$$

- *obstaja ortogonalna (glede na običajen skalarni produkt) transformacija $\varphi : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n$ in funkcija $\xi : \mathcal{H}_n \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tako da je*

$$\phi(A) = \xi(A)\varphi(A), \quad A \in \mathcal{H}_n,$$

funkcija

$$t \mapsto t\xi(tA), \quad t \in \mathbb{R},$$

pa je bijekcija iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$ za vsak $A \in \mathcal{H}_n \setminus \{0\}$.

Dokaz. Uporabili bomo lemo 3.1.1 za n^2-razsežen realen vektorski prostor $\mathcal{H}_n$. Zato se moramo najprej spomniti, kako izgledajo linearni funkcionali na tem prostoru. Za vsak $A \in \mathcal{H}_n$ definirajmo $f_A \in \mathcal{H}_n'$ s predpisom $f_A(B) = \langle A, B\rangle = \mathrm{sl}\,(AB)$, $B \in \mathcal{H}_n$. Iz Rieszovega izreka vemo, da je vsak linearen funkcional na $\mathcal{H}_n$ takšne oblike.

Oglejmo si bijektivni preslikavi $\tau = \phi : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n$ in $\sigma : \mathcal{H}_n' \to \mathcal{H}_n'$, ki je definirana s predpisom $\sigma(f_A) = f_{\phi(A)}$. Lema 3.1.1 nam pove, da je pogoj $f_A(B) = 0 \iff \sigma(f_A)(\phi(B))$, $A, B \in \mathcal{H}_n$, izpolnjen natanko tedaj, ko obstajata bijektivna linearna preslikava $\varphi : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n$ in funkcija $\xi : \mathcal{H}_n \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tako da velja:

- $\phi(A) = \xi(A)\varphi(A)$, $A \in \mathcal{H}_n$,
- funkcija $t \mapsto t\xi(tA)$, $t \in \mathbb{R}$, je bijekcija iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$ za vsak $A \in \mathcal{H}_n \setminus \{0\}$,
- σ je produkt skalarne funkcije in $(\varphi^{-1})'$.

Preostane dokazati, da lahko zadnji pogoj zamenjamo z močnejšim pogojem $(\varphi^{-1})'(A) = f_{\varphi(A)}$, $A \in \mathcal{H}_n$, ki pomeni, da je φ ortogonalna. Res, iz zadnjega pogoja sledi, da sta za vsak $A \in \mathcal{H}_n$ linearna funkcionala $f_{\varphi(A)}$, in $(\varphi^{-1})'(f_A)$ linearno odvisna. Lema 2.2.3 zagotovi, da je $(\varphi^{-1})'$ skalarni večkratnik preslikave $f_A \mapsto f_{\varphi(A)}$, $A \in \mathcal{H}_n$, multiplikativno konstanto pa lahko absorbiramo v funkcijo ξ. □

S praktično enakim dokazom dobimo rezultat v realnem primeru.

Izrek 3.1.3. *Naj bo n naravno število večje od 1 in $\phi : \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n$ preslikava. Potem sta naslednji trditvi ekvivalentni:*

- *ϕ je bijektivna in za vsak par $A, B \in \mathcal{S}_n$ imamo*
$$\mathrm{sl}\,(AB) = 0 \iff \mathrm{sl}\,(\phi(A)\phi(B)) = 0,$$
- *obstaja ortogonalna (glede na običajen skalarni produkt) transformacija $\varphi : \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n$ in funkcija $\xi : \mathcal{S}_n \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tako da je*
$$\phi(A) = \xi(A)\varphi(A), \quad A \in \mathcal{S}_n,$$
funkcija
$$t \mapsto t\xi(tA), \quad t \in \mathbb{R},$$
je pa bijekcija iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$ za vsak neničelen $A \in \mathcal{S}_n$.

Da dokončno rešimo problem za $\mathcal{H}_n$ in $\mathcal{S}_n$, moramo obravnavati še primer, ko je $c \neq 0$. Spet bomo dokazali splošnejši rezultat z obravnavo parov preslikav, ki delujejo na realnem vektorskem prostoru in njegovem dualu.

Lema 3.1.4. *Naj bo V končno razsežen realen vektorski prostor dimenzije vsaj 2, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in $\tau : V \to V$ ter $\sigma : V' \to V'$ bijektivni preslikavi. Potem sta naslednji trditvi ekvivalentni:*

- *za vsak par $x \in V$, $f \in V'$ imamo*
$$f(x) = c \iff \sigma(f)(\tau(x)) = c, \tag{3.1.2}$$

- *τ in σ sta linearni ter $\sigma = (\tau^{-1})'$.*

Dokaz. Ena smer je jasna. Predpostavimo torej, da je prvi pogoj izpolnjen. Potem opazimo, da velja $\tau(0) = 0$. Če bi namreč veljalo $\tau(0) \neq 0$, bi lahko našli funkcional $g \in V'$, tako da je $g(\tau(0)) = c$. To nas skupaj z bijektivnostjo σ in enačbo (3.1.2) privede do protislovne enakosti $\sigma^{-1}(g)(0) = c$. Na analogen način se prepričamo, da je $\sigma(0) = 0$.

Nadalje pokažimo, da za linearno neodvisne vektorje $x_1, \ldots, x_r \in V$ velja, da so tudi $\tau(x_1), \ldots, \tau(x_r)$ linearno neodvisni. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $r = k := \dim V$. Potem obstaja natanko en $g \in V'$, za katerega je $g(x_m) = c$ za $m = 1, \ldots, k$. Upoštevajoč (3.1.2) vidimo, da je $f = \sigma(g)$ edini linearen funkcional z lastnostjo $f(\tau(x_1)) = \ldots = f(\tau(x_k)) = c$ in posledično so tudi $\tau(x_1), \ldots, \tau(x_k)$ linearno neodvisni. Na enak način vidimo, da iz linearne neodvisnosti $f_1, \ldots, f_m \in V'$ sledi linearna neodvisnost $\sigma(f_1), \ldots, \sigma(f_m)$. Očitno enačba (3.1.2) velja, če namesto τ in σ pišemo τ^{-1} in σ^{-1}. Tako zaključimo, da so $x_1, \ldots, x_r \in V$ linearno neodvisni natanko tedaj, ko so $\tau(x_1), \ldots, \tau(x_r)$ linearno neodvisni. Analogen sklep velja za preslikavo σ.

Naj bosta $x, u \in V$ linearno neodvisna. Pokazali bomo, da za premico $p = [u] + x \subset V$ obsataja $k-1$ linearno neodvisnih funkcionalov $f_1, \ldots, f_{k-1} \in V'$, tako da za vsak $z \in V$ velja

$$z \in p \iff f_m(z) = c, \quad m = 1, \ldots, k-1.$$

Ker sta x in u linearno neodvisna, namreč lahko najdemo funkcional $f_1 \in V'$, za katerega je $f_1(x) = c$ in $f_1(u) = 0$. Nadalje lahko najdemo linearno neodvisne $g_2, \ldots, g_{k-1} \in V'$, tako da $g_j(x) = g_j(u) = 0$. Funkcionali $f_1, f_2 = f_1 + g_2, \ldots, f_{k-1} = f_1 + g_{k-1}$ so linearno neodvisni. Jasno za $z \in p$ velja $f_m(z) = c$, $m = 1, \ldots, k-1$. Predpostavimo zdaj, da $f_m(z) = c$, $m = 1, \ldots, k-1$. Potem $g_2(z) = \ldots = g_{k-1}(z) = 0$. Ker je $k-2$ funkcionalov g_j linearno neodvisnih, je presek njihovih jeder 2-dimenzionalen. Tako je ta presek ravno $[x, u]$. Sledi, da je $z = sx + tu$ za neki realni števili s in t. Iz $f_1(z) = c$ sklepamo, da mora biti $s = 1$. Zato pridemo do želenega rezultata $z \in p$.

Po drugi strani lahko, če so $f_1, \ldots, f_{k-1} \in V'$ linearno neodvisni funkcionali, najdemo $x \in V$, tako da je $f_1(x) = \ldots = f_{k-1}(x) = c$ in neničelen vektor u, ki razpenja enodimenzionalen presek jeder teh funkcionalov. Seveda sta x in u linearno neodvisna in množica vseh vektorjev $z \in V$, ki zadošča pogoju $f_1(z) = \ldots = f_{k-1}(z) = c$ je natanko premica $[u] + x$.

Naj bo $p \subset V$ premica, ki ne vsebuje izhodišča V. Iz prejšnjih treh odstavkov sledi, da je tudi $\tau(p)$ premica v V, za katero velja $0 \notin \tau(p)$. Vemo še, da sta vektorja $x, y \in V$ linearno odvisna natanko tedaj, ko sta $\tau(x)$ in $\tau(y)$ linearno odvisna. Tako τ preslika vsako premico skozi izhodišče v premico istega tipa.

Izrek 2.3.8 nam sedaj skupaj z dejstvom, da je identiteta edini avtomorfizem obsega realnih števil, pove, da je τ linearna preslikava. Podobno zaključimo, da je tudi σ linearna preslikava. Iz linearnosti in (3.1.2) pa sledi, da za poljubna $x \in V$, $f \in V'$ velja $\sigma(f)(\tau(x)) = f(x)$, kar pomeni $\sigma = (\tau^{-1})'$. $\square$

Želeni opis bijektivnih ohranjevalcev matričnih parov s fiksno neničelno vrednostjo skalarnega produkta, delujočih na $\mathcal{H}_n$ in $\mathcal{S}_n$, je spet direktna posledica leme in

Rieszove reprezentacije linearnih funkcionalov s skalarnim produktom.

Izrek 3.1.5. *Naj bo n naravno število večje od 1, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in $\phi : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n$ preslikava. Potem sta naslednji trditvi ekvivalentni:*

- *ϕ je bijektivna in za vsak par $A, B \in \mathcal{H}_n$ imamo*
$$\mathrm{sl}\,(AB) = c \iff \mathrm{sl}\,(\phi(A)\,\phi(B)) = c,$$
- *ϕ je ortogonalna transformacija na $\mathcal{H}_n$ glede na običajen skalarni produkt.*

Izrek 3.1.6. *Naj bo n naravno število večje od 1, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in $\phi : \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n$ preslikava. Potem sta naslednji trditvi ekvivalentni:*

- *ϕ je bijektivna in za vsak par $A, B \in \mathcal{S}_n$ imamo*
$$\mathrm{sl}\,(AB) = c \iff \mathrm{sl}\,(\phi(A)\,\phi(B)) = c,$$
- *ϕ je ortogonalna transformacija na $\mathcal{S}_n$ glede na običajen skalarni produkt.*

3.2 Preslikave na $\mathcal{E}_n$

V tem poglavju bomo $n \times n$ matrike identificirali z linearnimi operatorji, ki delujejo na $\mathbb{F}^n$, prostoru vseh $n \times 1$ matrik. Realen in kompleksen primer bomo obravnavali simultano. Zavoljo poenostavitve bomo uporabljali le izraz unitarna matrika (unitaren operator), ki bo predstavljal unitarno matriko (operator) v kompleksnem in ortogonalno matriko (operator) v realnem primeru.

Začeli bomo s posebnim primerom $c = 0$. Tako nas zanimajo bijektivne preslikave $\phi : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ z lastnostjo

$$\mathrm{sl}\,(AB) = 0 \iff \mathrm{sl}\,(\phi(A)\,\phi(B)) = 0. \tag{3.2.1}$$

Najprej opazimo, da je za $A, B \in \mathcal{E}_n$ pogoj $\mathrm{sl}\,(AB) = 0$ ekvivalenten s pogojem $AB = 0$. Predpostavimo namreč, da je $\mathrm{sl}\,(AB) = 0$. Ker za poljubno unitarno $n \times n$ matriko U velja $\mathrm{sl}\,(AB) = \mathrm{sl}\,(U^*AUU^*BU)$, lahko brez škode za splošnost privzamemo, da je $A = \mathrm{diag}\,(t_1, \ldots, t_r, 0, \ldots, 0)$, pri čemer so števila t_j pozitivna in $r = \mathrm{rang}\,A$. Če označimo $B = [b_{ij}]$, mora biti $b_{ii} \geq 0$ za vsak $i = 1, \ldots, n$. Zato iz $\sum_{j=1}^{r} t_j b_{jj} = \mathrm{sl}\,(AB) = 0$ sledi $b_{11} = \ldots = b_{rr} = 0$. Ker so za vsak par $i \neq j$ matrike oblike

$$\begin{bmatrix} b_{ii} & b_{ij} \\ \overline{b_{ij}} & b_{jj} \end{bmatrix},$$

pozitivno semidefinitne, mora biti $b_{ij} = 0$ vselej, ko vsaj eden od indeksov i, j ne presega r. S tem smo pokazali, da za vsak par $A, B \in \mathcal{E}_n$ velja

$$\mathrm{sl}\,(AB) = 0 \iff AB = 0 \iff \mathrm{im}\,A \perp \mathrm{im}\,B. \tag{3.2.2}$$

Jasno je za katerokoli $n \times n$ unitarno matriko U preslikava $A \mapsto UAU^*$ bijekcija množice $\mathcal{E}_n$ nase, ki zadošča pogoju (3.2.1). Isto velja za preslikavo $A \mapsto A^t$. Naj bo sedaj $\varphi : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ katerakoli bijektivna preslikava, ki ohranja sliko, torej $\mathrm{im}\,\varphi(A) = \mathrm{im}\,A$ za vse $A \in \mathcal{E}_n$. Iz (3.2.2) sledi, da tudi vsaka taka preslikava izpolnjuje (3.2.1).

Izrek 3.2.1. *Naj bo n naravno število večje od 2, $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, $\phi:\mathcal{E}_n\to\mathcal{E}_n$ pa preslikava. Potem sta naslednja pogoja ekvivalentna:*

- *ϕ je bijektivna in za vsak par $A,B\in\mathcal{E}_n$ imamo*
$$\mathrm{sl}\,(AB)=0 \iff \mathrm{sl}\,(\phi(A)\,\phi(B))=0,$$
- *obstaja unitarna $n\times n$ matrika U in bijektivna preslikava $\varphi:\mathcal{E}_n\to\mathcal{E}_n$, ki ohranja sliko, tako da velja*
  - *bodisi $\phi(A)=U\varphi(A)\,U^*$, $A\in\mathcal{E}_n$,*
  - *bodisi $\phi(A)=U\varphi(A)^t\,U^*$, $A\in\mathcal{E}_n$.*

Izrek 3.2.2. *Naj bo n naravno število večje od 2, $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, $\phi:\mathcal{E}_n\to\mathcal{E}_n$ pa preslikava. Potem sta naslednja pogoja ekvivalentna:*

- *ϕ je bijektivna in za vsak par $A,B\in\mathcal{E}_n$ imamo*
$$\mathrm{sl}\,(AB)=0 \iff \mathrm{sl}\,(\phi(A)\,\phi(B))=0,$$
- *obstaja ortogonalna $n\times n$ matrika O in bijektivna preslikava $\varphi:\mathcal{E}_n\to\mathcal{E}_n$, ki ohranja sliko, tako da velja $\phi(A)=O\varphi(A)\,O^t$, $A\in\mathcal{E}_n$.*

Opomnimo, da v kompleksnem primeru preslikava $A\mapsto A^t, A\in\mathcal{E}_n$, predstavlja kompleksno konjugiranje elementov matrike. Zato ni presenetljivo, da imamo pri opisu splošne oblike bijektivnih preslikav, ki ohranjajo ničelno sled produkta, dve možnosti v kompleksnem primeru, v realnem pa le eno.

Opazimo še, da je trivialno opisati splošno obliko bijektivnih preslikav, ki ohranjajo sliko. Uvedimo ekvivalenčno relacijo na $\mathcal{E}_n$ s predpisom $A\sim B \iff \mathrm{im}\,A=\mathrm{im}\,B$. Iskane preslikave so potem natanko tiste, ki delujejo kot bijekcija na vsakem od $\sim$ ekvivalenčnih razredov.

Dokaz izrekov 3.2.1 in 3.2.2. Oba izreka bomo dokazali simultano.

Dokazati moramo le, da iz prvega pogoja sledi drugi. Po (3.2.2) imamo $A\sim B$ natanko tedaj, ko za vsak $C\in\mathcal{E}_n$ velja $AC=0 \iff BC=0$. Iz predpostvk izreka sedaj sledi $A\sim B$, če in samo če $\phi(A)\sim\phi(B)$.

V vsakem ekvivalenčnem razredu $\sim$ obstaja natanko en projektor P. Sledi, da ϕ inducira bijektivno preslikavo $\psi:\mathcal{P}_n\to\mathcal{P}_n$ z lastnostjo, da za vsaka $P,Q\in\mathcal{P}_n$ velja $PQ=0 \iff \psi(P)\,\psi(Q)=0$. Za vsak $P\in\mathcal{P}_n$ definiramo $P^\perp=\{Q\in\mathcal{P}_n : PQ=0\}$. Jasno je $\psi\left(P^\perp\right)=\psi(P)^\perp$. Ker je $P^\perp=\mathcal{P}_n$ natanko tedaj, ko je $P=0$, imamo $\psi(0)=0$. Za neničelen $P\in\mathcal{P}_n$ je množica $P^\perp$ maksimalna med ortogonalnimi komplementi neničelnih projektorjev natanko tedaj, ko je P projektor ranga 1. Zato velja $\psi(\mathcal{P}_n^1)=\mathcal{P}_n^1$ in zožitev $\psi|_{\mathcal{P}_n^1}$ ohranja pravokotnost. Po izreku 2.4.7 obstaja bodisi unitaren bodisi antiunitaren operator U (v realnem primeru imamo le eno možnost, namreč da je U ortogonalen), za katerega velja $\psi(P)=UPU^*$ za vse $P\in\mathcal{P}_n^1$. V primeru, ko je $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, U pa antiunitaren, lahko operator U zapišemo kot $U=VJ$, pri čemer je V unitaren operator, $J:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ pa je kompleksno konjugiranje po komponentah. Tako dobimo $UPU^* = (VJ)P(VJ)^* = V(JPJ)V^* = VP^tV^*$.

Po tem, ko po potrebi ϕ komponiramo z unitarno podobnostjo in transpozicijo, če je to potrebno, lahko privzamemo, da ψ preslika vsak projektor ranga 1 vase. Z uporabo dejstva, da ψ ohranja pravokotnost na $\mathcal{P}_n$, zaključimo, da je $\psi(P) = P$ za vsak $P \in \mathcal{P}_n$. Za poljuben $A \in \mathcal{E}_n$ naj bo sedaj $P_A \in \mathcal{P}_n$ projektor s sliko $\operatorname{im} A$. Potem je $\operatorname{im} A = \operatorname{im} P_A = \operatorname{im} \psi(P_A) = \operatorname{im} \phi(A)$, to pa pomeni, da ϕ ohranja sliko. □

Pred formuliracijo glavnega rezultata tega razdelka uvedimo še nekaj oznak. Naj bo c realno število, $0 < c \leq 1$. Postavimo $\mathcal{E}_n(c^-) = \{A \in \mathcal{E}_n : \operatorname{sl} A < c\}$, $\mathcal{E}_n(c^+) = \{A \in \mathcal{E}_n : \operatorname{sl} A > c\}$ in $\mathcal{E}_n(c) = \{A \in \mathcal{E}_n : \operatorname{sl} A = c\}$. Za $A \in \mathcal{E}_n$ definiramo $A(c) = \{B \in \mathcal{E}_n : \operatorname{sl}(AB) = c\}$. Če je $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}_n$ množica, $A \in \mathcal{E}_n$ pa matrika, potem označimo $\mathcal{P}(c, A) = A(c) \cap \mathcal{P} = \{P \in \mathcal{P} : \operatorname{sl}(AP) = c\}$, $\operatorname{Lin} \mathcal{P}$ pa naj označuje realno linearno ogrinjačo množice $\mathcal{P}$.

Začnimo z dvema tehničnima lemama. Označimo standardno bazo vektorskega prostora $M_n(\mathbb{F})$ z $\{E_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$. Vsekozi bosta $c \in (0, 1]$ in $\phi : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ bijektivna preslikava z lastnostjo

$$\operatorname{sl}(AB) = c \iff \operatorname{sl}(\phi(A)\phi(B)) = c.$$

Lema 3.2.3. *Naj bo n naravno število večje od 2. Predpostavimo, da za množico $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}_n$ velja*

- *$U\mathcal{P}U^* = \mathcal{P}$ za katerokoli unitarno $n \times n$ matriko U,*
- *$\phi(P) = P$ za vsak $P \in \mathcal{P}$.*

Bodita $D \in \mathcal{E}_n$ diagonalna matrika in $0 < c \leq 1$. Privzemimo, da $\mathcal{P}(c, D)$ vsebuje

(i) takšno matriko $Q = [q_{ij}]$, da je $q_{ij} \neq 0$ za vsak par $i \neq j$,

(ii) matrike $Q_1, \ldots, Q_n$, katerih vektorji diagonal so linearno neodvisni.

Potem je $\phi(UDU^*) = UDU^*$ za vse $n \times n$ unitarne matrike U.

Dokaz. Najprej opazimo, da iz $DU = UD$ sledi $U\mathcal{P}(c, D)U^* = \mathcal{P}(c, D)$ za vsako $n \times n$ diagonalno unitarno matriko U. Posledično je $U \operatorname{Lin} \mathcal{P}(c, D) U^* = \operatorname{Lin} \mathcal{P}(c, D)$.

Korak 1. $\operatorname{Lin} \mathcal{P}(c, D)$ *vsebuje vse matrike z ničelno diagonalo.*

Naj bosta $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ različna. Dovolj je dokazati, da $\operatorname{Lin} \mathcal{P}(c, D)$ vsebuje vse matrike oblike $\mu E_{ij} + \overline{\mu} E_{ji}$, $\mu \in \mathbb{F}$. Brez škode za splošnost privzemimo $(i, j) = (1, 2)$. Izberimo $n \times n$ unitarni matriki $U_1 = \operatorname{diag}(1, -1, \ldots, -1)$ in $U_2 = \operatorname{diag}(1, 1, -1, \ldots, -1)$. Vemo, da je $U_1 Q U_1 \in \mathcal{P}(c, D)$, torej $X = Q - U_1 Q U_1 \in \operatorname{Lin} \mathcal{P}(c, D)$ in $Y = X + U_2 X U_2 \in \operatorname{Lin} \mathcal{P}(c, D)$. Izračunamo, da je $Y = \gamma E_{12} + \overline{\gamma} E_{21}$, pri čemer je $\gamma = 4q_{12} \neq 0$. Torej za $U_3 = \operatorname{diag}(\nu, 1, \ldots, 1)$, pri čemer je $|\nu| = 1$, dobimo $U_3 Y U_3^* = \nu\gamma E_{12} + \overline{\nu\gamma} E_{21} \in \operatorname{Lin} \mathcal{P}(c, D)$.

Korak 2. $\phi(D) = D$

Iz prvega koraka in pogoja (ii) sledi, da je

- $\operatorname{Lin}\mathcal{P}(c,D)=\mathcal{H}_n$, če $\mathbb{F}=\mathbb{C}$,
- $\operatorname{Lin}\mathcal{P}(c,D)=\mathcal{S}_n$, če $\mathbb{F}=\mathbb{R}$.

Naj bo sedaj H poljubna hermitska matrika (oziroma simetrična v primeru $\mathbb{F}=\mathbb{R}$). Po pravkar dokazanem je $H=\sum_i t_iP_i$ za neko končno množico $\{t_i\}\subset\mathbb{R}$ in neke $P_i\in\mathcal{P}(c,D)$. Ker ϕ deluje kot identiteta na množici $\mathcal{P}$, je

$$\mathrm{sl}\,(DH)=\sum_i t_i\,\mathrm{sl}\,(DP_i)=\sum_i t_i\,c=\sum_i t_i\,\mathrm{sl}\,(\phi(D)\,P_i)=\mathrm{sl}\,(\phi(D)\,H)\,.$$

Ker je bila H poljubna, sledi $\phi(D)=D$.

Korak 3. $\phi(UDU^*)=UDU^*$ *za vsako unitarno* $n\times n$ *matriko* U.

Naj bo U poljubna unitarna matrika. Definirajmo preslikavo $\psi:\mathcal{E}_n\to\mathcal{E}_n$ s predpisom $\psi(A)=U^*\phi(UAU^*)\,U$, $A\in\mathcal{E}_n$. Ker preslikava ψ izpolnjuje vse predpostavke v lemi, po prejšnjem koraku velja $\psi(D)=D$, iz česar sledi $\phi(UDU^*)=UDU^*$. □

Lema 3.2.4. *Naj bo n naravno število večje od 2 in $0<c\le 1$. Če je $\phi(P)=P$ za katerikoli $P\in\mathcal{P}_n\setminus\{0\}$, potem je $\phi(A)=A$ za vsak $A\in\mathcal{E}_n(c^+)$.*

Dokaz leme bomo zaključili v štirih korakih.

Korak 1. $\phi(\lambda P)=\lambda P$ *za vsak* λP *iz množice*

$$\Lambda=\left\{\lambda P\,:\,P\in\mathcal{P}_n,\ \operatorname{rang}P=n-1,\ \frac{c}{n-1}<\lambda\le 1,\ \frac{c}{\lambda}\notin\mathbb{N}\right\}\subset\mathcal{E}_n\left(c^+\right).$$

Dokaz. Uporabili bomo lemo 3.2.3 za množico $\mathcal{P}=\mathcal{P}_n$. V ta namen izberimo $P=\operatorname{diag}(0,1,\ldots,1)$ in takšen $\lambda<1$, da je $\lambda P\in\Lambda$. Postavimo $m=\left\lceil\frac{c}{\lambda}\right\rceil\le n-1$ (pri tem je $\lceil t\rceil=\min\{k\in\mathbb{Z}\,:\,k\ge t\}$) in opazimo, da je $0<m-\frac{c}{\lambda}<1$. Naj bo $Q=[q_{ij}]$ katerikoli projektor ranga m, za katerega je $q_{11}=m-\frac{c}{\lambda}$. Potem je $\mathrm{sl}\,(\lambda PQ)=\lambda\mathrm{sl}\,(Q-(I-P)\,Q)=\lambda\,(m-q_{11})=c$, torej $Q\in\mathcal{P}_n(c,\lambda P)$. Jasno lahko Q izberemo tako, da ima poljuben nediagonalen element neničelen. Lahko tudi najdemo projektorje $Q_1,\ldots,Q_n\in\mathcal{P}_n(c,\lambda P)$ z linerno neodvisnimi vektorji diagonale. Zaključek sledi iz leme 3.2.3. □

Za dano matriko $A\in\mathcal{E}_n$ označimo njene lastne vrednosti z $\lambda_1(A)\ge\ldots\ge\lambda_n(A)$. Naj bo nadalje $\mathcal{I}=\left[\frac{c}{n-1},1\right]I=\left\{\lambda I\,:\,\frac{c}{n-1}\le\lambda\le 1\right\}$.

Korak 2. $\phi(A)=A$ *za vse* A *iz množice*

$$\mathcal{A}=\left\{A\in\mathcal{E}_n\left(c^+\right)\,:\,\sum_{j=2}^{n}\lambda_j(A)\ge c\right\}\setminus\mathcal{I}.$$

Dokaz. Uporabimo lemo 3.2.3 za množico $\mathcal{P}=\Lambda$. Naj bo $A=\operatorname{diag}(a_1,\ldots,a_n)$, kjer je $1\ge a_1\ge\ldots\ge a_n\ge 0$, $a_1>a_n$ in $\sum_{j=2}^{n}a_j\ge c$. Uvedimo množico $\mathcal{S}=\{x\in(0,1)^n\,:\,\|x\|=1\}\subset\mathbb{F}^n$ enotskih vektorjev s pozitivnimi kompnentami. Naj bo $x\in\mathcal{S}$ poljuben, λ pa tak, da je $X=\lambda(I-xx^t)\in\Lambda$. Potem je $X\in\Lambda(c,A)$ natanko tedaj, ko je

$$\mathrm{sl}\,A-\sum_{j=1}^{n}a_jx_j^2=\frac{c}{\lambda}. \tag{3.2.3}$$

Opazimo, da je $\frac{c}{\lambda} \in (c, n-1) \setminus \mathbb{N}$ in $\operatorname{sl} A - \sum_{j=1}^n a_j x_j^2 \in \left(\sum_{j=2}^n a_j, \sum_{j=1}^{n-1} a_j\right) \subset (c, n-1)$. Opazujmo funkcijo $f : \mathcal{S} \to \left(\sum_{j=2}^n a_j, \sum_{j=1}^{n-1} a_j\right)$, dano s predpisom

$$f(x) = \operatorname{sl} A - \sum_{j=1}^n a_j x_j^2.$$

Uvedimo množico

$$U = f^{-1}\left(\left(\sum_{j=2}^n a_j, \sum_{j=1}^{n-1} a_j\right) \setminus \mathbb{N}\right),$$

ki očitno ni prazna. Ker je f zvezna, je U odprta v $\mathcal{S}$ in posledično tudi v sferi $\{\|x\| = 1\}$. Dokazali smo, da za vsak x iz odprte množice U obstaja $\lambda \in \left(\frac{c}{n-1}, 1\right)$, tako da $\frac{c}{\lambda} \notin \mathbb{N}$ in velja (3.2.3). Zdaj je jasno, da lahko najdemo matrike $X_1, \ldots, X_n \in \Lambda(c, A)$ s samimi neničelnimi elementi in linearno neodvisnimi vektorji diagonale. Po lemi 3.2.3 deluje ϕ kot identiteta na $\mathcal{A}$. □

Korak 3. *$\phi(B) = B$ za vse B iz množice*

$$\mathcal{B} = \left\{B \in \mathcal{E}_n\left(c^+\right) \,:\, \sum_{j=2}^n \lambda_j(B) < c\right\}.$$

Dokaz. Naj bo $B = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n) \in \mathcal{B}$ diagonalna, tako da je $b_1 \geq \ldots \geq b_n$. Postavimo $A = I - axx^t \in \mathcal{A}$, pri čemer je $x = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{F}^n$ enotski vektor z nenegativnimi komponentami in $0 < a \leq 1$. Potem je $A \in \mathcal{A}(c, B)$, če in samo če

$$a \sum_{j=1}^n b_j x_j^2 = \sum_{j=1}^n b_j - c = b_1 - \left(c - \sum_{j=2}^n b_j\right). \tag{3.2.4}$$

Opazimo, da je

$$\sum_{j=1}^n b_j x_j^2 = b_1 \left(\sum_{j=1}^n \frac{b_j}{b_1} x_j^2\right) \leq b_1,$$

kjer enakost velja v primeru $x_1 = 1$. Če izberemo komponento x_1 dovolj veliko, lahko pri poljubni izbiri števil $x_2, \ldots, x_n$ najdemo $a \in (0, 1]$, ki izpolnjuje (3.2.4). Zato obstajajo matrike $A, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}(c, B)$, tako da ima A same neničelne elemente, vektorji diagonal matrik $A_1, \ldots, A_n$ pa so linearno neodvisni. Torej je $\phi|_{\mathcal{B}} = \operatorname{id}_{\mathcal{B}}$. □

Korak 4. *$\phi(\lambda I) = \lambda I$ za vse $\lambda I \in \mathcal{I}$.*

Dokaz. Dokazali smo, da je $\phi(A) = A$ za vsak A iz množice $\mathcal{D} = \mathcal{E}_n(c^+) \setminus \mathcal{I}$. Za poljuben $\lambda \in \left[\frac{c}{n-1}, 1\right)$ pa imamo $\mathcal{D}(c, \lambda I) = \left\{A \in \mathcal{E}_n(c^+) \,:\, \operatorname{sl} A = \frac{c}{\lambda}\right\} \setminus \left\{\frac{c}{\lambda n} I\right\}$. Po lemi 3.2.3 je $\phi(\lambda I) = \lambda I$. □

Izrek 3.2.5. *Naj bo n naravno število večje od 2, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $c \in (0, 1]$ in $\phi : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ preslikava. Potem sta naslednja pogoja ekvivalentna:*

- *ϕ je bijektivna in za vsak par $A, B \in \mathcal{E}_n$ imamo*

$$\mathrm{sl}\,(AB) = c \iff \mathrm{sl}\,(\phi(A)\,\phi(B)) = c, \tag{3.2.5}$$

- *ϕ preslika $\mathcal{E}_n(c^-)$ bijektivno na $\mathcal{E}_n(c^-)$, ϕ preslika $\mathcal{E}_n(c)$ bijektivno na $\mathcal{E}_n(c)$ in obstaja unitarna $n \times n$ matrika U, tako da velja bodisi*
  - *$\phi(A) = UAU^*$ za vsak $A \in \mathcal{E}_n(c^+)$ in $\mathrm{im}\,\phi(A) = \mathrm{im}\,UAU^*$ za vse $A \in \mathcal{E}_n(c)$ bodisi*
  - *$\phi(A) = UA^tU^*$ za vsak $A \in \mathcal{E}_n(c^+)$ in $\mathrm{im}\,\phi(A) = \mathrm{im}\,UA^tU^*$ za vse $A \in \mathcal{E}_n(c)$.*

Izrek 3.2.6. *Naj bo n naravno število večje od 2, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $c \in (0,1]$ in $\phi : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ preslikava. Potem sta naslednja pogoja ekvivalentna:*

- *ϕ je bijektivna in za vsak par $A, B \in \mathcal{E}_n$ imamo*

$$\mathrm{sl}\,(AB) = c \iff \mathrm{sl}\,(\phi(A)\,\phi(B)) = c,$$

- *ϕ preslika $\mathcal{E}_n(c^-)$ bijektivno na $\mathcal{E}_n(c^-)$, ϕ preslika $\mathcal{E}_n(c)$ bijektivno na $\mathcal{E}_n(c)$ in obstaja ortogonalna $n \times n$ matrika O, tako da velja $\phi(A) = OAO^t$ za vsak $A \in \mathcal{E}_n(c^+)$ in $\mathrm{im}\,\phi(A) = \mathrm{im}\,OAO^t$ za vse $A \in \mathcal{E}_n(c)$.*

Dokaz izrekov 3.2.5 in 3.2.6. Izreka bomo dokazali simultano.

Začnimo s predpostavko, da ϕ izpolnjuje prvi pogoj. Najprej utemeljimo, da je množica $\mathcal{E}_n(c^-)$ invariantna za ϕ. Naj bosta $A, B \in \mathcal{E}_n$. Ko računamo $\mathrm{sl}\,(AB)$, lahko vedno privzamemo, da je A diagonalna. Seveda so diagonalni elementi matrike A enaki največ 1. Sledi, da je $\mathrm{sl}\,(AB) \leq \mathrm{sl}\,B$. Zato je $B \in \mathcal{E}_n(c^-)$ natanko tedaj, ko ne obstaja noben $A \in \mathcal{E}_n$, za katerega je $\mathrm{sl}\,(AB) = c$. Posledično ϕ preslika množico $\mathcal{E}_n(c^-)$ bijektivno nase. To je tudi edini pogoj, kateremu mora zadoščati $\phi|_{\mathcal{E}_n(c^-)}$.

Nadaljujmo z raziskavo obnašanja preslikave ϕ na množici projektorjev. Pokazali bomo, da ϕ na naraven način inducira bijektivno preslikavo ψ na $\mathcal{P}_n$. Pri tem bodo zelo pomembne množice naslednje oblike. Za vsak neničelen projektor $P \in \mathcal{P}_n$ uvedimo množico $\mathcal{E}_n(P) = \{A \in \mathcal{E}_n : AP = P\}$. Tako je $\mathcal{E}_n(P)$ množica vseh efektov A, ki delujejo kot identiteta na $\mathrm{im}\,P$. Ker pa zanje velja tudi $PA = P$, dobimo še, da A preslika $\ker P$ vase. Torej je efekt $A \in \mathcal{E}_n$ vsebovan v $\mathcal{E}_n(P)$ natanko tedaj, ko je $Ax = x$ za vsak $x \in \mathrm{im}\,P$ in $Ax \in \ker P$ za vse $x \in \ker P$.

Spomnimo se, da je za poljuben $A \in \mathcal{E}_n$ množica $A(c)$ definirana kot $A(c) = \{B \in \mathcal{E}_n : \mathrm{sl}\,(AB) = c\}$. V tem koraku utemeljimo povezavo med slednjo množico in projektorji. Naj bo A katerikoli element množice $\mathcal{E}_n(c)$. S P_A označimo projektor na sliko A. Trdimo, da je

$$A(c) = \mathcal{E}_n(P_A). \tag{3.2.6}$$

Res, naj bo $B \in \mathcal{E}_n$. Potem je $B \in A(c)$ tatanko tedaj, ko je $\mathrm{sl}\,(A(I-B)) = 0$. Iz (3.2.2) najprej dobimo, da je ta pogoj ekvivalenten z $\mathrm{im}\,A \perp \mathrm{im}\,(I-B)$, ker pa je $\mathrm{im}\,P_A = \mathrm{im}\,A$, je ekvivalenten tudi s pogojem $(I-B)\,P_A = 0$. To pa pomeni natanko $B \in \mathcal{E}_n(P_A)$.

Če je $A \in \mathcal{E}_n(c)$ obrnlijva, potem nam (3.2.6) da $A(c) = \{I\}$. Pokazali bomo, da so takšni efekti A edini z lastnostjo, da je $A(c)$ singleton. Naj bo torej $A \in \mathcal{E}_n$ tak, da ima $A(c)$ natanko en element. Potem je $\operatorname{sl} A \geq c$. Lahko privzamemo, da je A diagonalna. Direktno se lahko prepričamo, da iz kateregakoli od pogojev '$\operatorname{sl} A > c$' in 'A ima kak ničelen diagonalni element' sledi obstoj neskončno mnogo matrik v $A(c)$. Zato je A obrnljiva matrika s sledjo c. Sledi, da ϕ preslika množico takih matrik nase, kar implicira $\phi(I) = I$, to pa nam nadalje da $\phi(\mathcal{E}_n(c)) = \mathcal{E}_n(c)$.

Spomnimo se, da za $A, B \in \mathcal{E}_n$ pišemo $A \sim B \iff \operatorname{im} A = \operatorname{im} B$. Če sta $A, B \in \mathcal{E}_n(c)$, potem iz (3.2.6) sledi, da je $A \sim B$ natanko tedaj, ko je $A(c) = B(c)$. Z uporabo (3.2.5) pa sedaj zaključimo

$$A \sim B \iff \phi(A) \sim \phi(B), \quad A, B \in \mathcal{E}_n(c).$$

Sledi, da lahko definiramo preslikavo $\psi : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ na naslednji način. Postavimo $\psi(0) = 0$, za poljuben neničelen $P \in \mathcal{P}_n$ pa izberemo $A \in \mathcal{E}_n(c)$, za katerega je $P = P_A$ in definiramo $\psi(P) = P_{\phi(A)}$. Očitno je ψ bijektivna. Jasno imamo $P \leq Q$ za $P, Q \in \mathcal{P}_n$ natanko tedaj, ko je $\mathcal{E}_n(Q) \subset \mathcal{E}_n(P)$. Ker je vsak $\mathcal{E}_n(P)$, $P \in \mathcal{P}_n \setminus \{0\}$, enak $A(c)$ za nek $A \in \mathcal{E}_n(c)$, velja $\phi(\mathcal{E}_n(P)) = \mathcal{E}_n(\psi(P))$ in posledično za vsak par $P, Q \in \mathcal{P}_n$ dobimo

$$P \leq Q \iff \psi(P) \leq \psi(Q).$$

Po posledici 2.4.6 obstaja taka bijektivna semilinearna preslikava $L : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$, da je

$$\psi(Q) = P_{L(\operatorname{im} Q)}, \quad Q \in \mathcal{P}_n.$$

Sledi, da je

$$\phi(\mathcal{E}_n(Q)) = \mathcal{E}_n\left(P_{L(\operatorname{im} Q)}\right), \quad Q \in \mathcal{P}_n \setminus \{0\}. \tag{3.2.7}$$

Naš naslednji cilj je dokazati, da je množica $\mathcal{P}_n \setminus \{0\}$ invariantna za ϕ. Ta cilj bomo dosegli v nekaj korakih. Ločimo dva primera.

Primer 1. $c = 1$

Naj bosta $P, Q \in \mathcal{P}_n$ neničelna projektorja, za katera je $\operatorname{rang} P + \operatorname{rang} Q = n + 1$. Bodita nadalje $A \in \mathcal{E}_n(P)$ in $B \in \mathcal{E}_n(Q)$. Trdimo, da je $\operatorname{sl}(AB) = 1$ natanko tedaj, ko velja $A = P$, $B = Q$, P in Q komutirata ter je PQ projektor ranga 1. Označimo namreč $R = I - Q$. Potem je $\operatorname{rang} R = \operatorname{rang} P - 1$. Iz $A \in \mathcal{E}_n(P)$ in $B \in \mathcal{E}_n(Q)$ sklepamo, da je $A = P + A_1$ in $B = Q + B_1$ za neki matriki $A_1, B_1 \in \mathcal{E}_n$, za kateri velja $PA_1 = A_1P = 0$ ter $QB_1 = B_1Q = 0$. Zato je

$$\operatorname{sl}(AB) = \operatorname{sl}(PQ + A_1Q + PB_1 + A_1B_1) \geq \operatorname{sl}(PQ),$$

pri čemer imamo namesto znaka $\geq$ enačaj natanko tedaj, ko je $\operatorname{sl}(A_1Q + PB_1 + A_1B_1) = 0$, kar je ekvivalentno z $A_1Q = PB_1 = A_1B_1 = 0$. Nadalje je

$$\begin{aligned}\operatorname{sl}(PQ) &= \operatorname{sl}(P(I - R)) = \operatorname{rang} P - \operatorname{sl}(PR) \\ &\geq \operatorname{rang} P - \operatorname{sl} R = \operatorname{rang} P - \operatorname{rang} R = 1,\end{aligned}$$

kjer $\geq$ predstavlja enačaj, če in samo če je $\operatorname{sl}(PR) = \operatorname{sl} R$, to pa je ekvivalentno z $R \leq P$. Zdaj je jasno, da iz pogoja $\operatorname{sl}(AB) = 1$ sledi, da P in Q komuirata in je

PQ projektor ranga 1. Iz $PA_1 = 0$ in $I - Q \leq P$ nadalje sklepamo, da je $A_1 = QA_1$. Ker pa je $QA_1 = 0$, dobimo $A_1 = 0$. Podobno iz $QB_1 = 0$, $I - P \leq Q$ in $PB_1 = 0$ zaključimo $B_1 = 0$. Tako je res $A = P$ in $B = Q$. Obrat je trivialen.

Naša naslednja trditev pravi, da ϕ preslika neničelne projektorje v neničelne projektorje in da za vsak par takih projektorjev P, R velja $P \leq R$ natanko tedaj, ko je $\phi(P) \leq \phi(R)$. Da bi dokazali to trditev, izberimo $P \in \mathcal{P}_n \setminus \{0\}$. Naj bo Q tak projektor, ki komutira s P, zanj pa sta izpolnjena pogoja, da je PQ projektor ranga 1 in $\operatorname{rang} P + \operatorname{rang} Q = n + 1$. Potem je $\mathrm{sl}\,(\phi(P)\,\phi(Q)) = 1$. Ker je

$$\phi(P) \in \mathcal{E}_n\left(P_{L(\operatorname{im} P)}\right) \quad \text{in} \quad \phi(Q) \in \mathcal{E}_n\left(P_{L(\operatorname{im} Q)}\right),$$

iz prejšnjega odstavka sledi, da je $\phi(P) = P_{L(\operatorname{im} P)}$ projektor. Še več, $\phi(P)$ in $\phi(Q)$ komutirata in velja $\operatorname{rang}\,(\phi(P)\,\phi(Q)) = 1$. Jasno je tudi, da velja $P \leq R$ natanko tedaj, ko $\phi(P) \leq \phi(R)$, $P, R \in \mathcal{P}_n$. Vidimo še, da ϕ preslika vsak projektor ranga 1 v projektor ranga 1. Nadalje bomo pokazali, da sta za $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_n^1$ pogoja $P_1P_2 = 0$ in $\phi(P_1)\,\phi(P_2) = 0$ ekvivalentna. Dovolj je preveriti, da iz $P_1P_2 = 0$ sledi $\phi(P_1)\,\phi(P_2) = 0$. Naj bo P tak projektor ranga 2, da je $P_1 \leq P$ in $P_2 \leq I - P$. Oglejmo si sedaj projektorje Q, ki so ranga $n-1$ in izpolnjujejo pogoja $PQ = QP$ ter $\operatorname{rang}\,(PQ) = 1$. Takšni projektorji so natanko tisti, ki se dajo zapisati v obliki $Q = Q_1 + (I - P)$, pri čemer je $Q_1 \leq P$ projektor ranga 1, iz česar sledi, da za vsak tak Q velja $P_2 \leq Q$. Po že dokazanem velja $\phi(P_2) \leq Q'$ za vse projektorje Q' ranga $n-1$, ki zadoščajo pogojema $\phi(P)\,Q' = Q'\phi(P)$ in $\operatorname{rang}\,(\phi(P)\,Q') = 1$. Sledi $\phi(P_2) \leq I - \phi(P)$ in zaradi $\phi(P_1) \leq \phi(P)$ dobimo želeni rezultat $\phi(P_1)\,\phi(P_2) = 0$.

Z uporabo izreka 2.4.7 vidimo, da obstaja bodisi unitaren bodisi antiunitaren operator $U : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$, za katerega velja $\phi(P) = UPU^*$ za vsak $P \in \mathcal{P}_n^1$. V dokazu izreka 3.2.1 smo videli, da imamo v primeru, ko je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ in U antiunitaren $\phi(P) = VP^tV^*$, $P \in \mathcal{P}_n^1$, za nek unitaren operator V. Po komponiranju preslikave ϕ z unitarno podobnostjo in transpozicijo, če je potrebno, lahko privzamemo, da je $\phi(P) = P$ za vse $P \in \mathcal{P}_n^1$. Iz $P \leq Q \iff \phi(P) \leq \phi(Q)$, $P, Q \in \mathcal{P}_n \setminus \{0\}$ sledi, da je $\phi(P) = P$ za vsak neničelen projektor iz $\mathcal{E}_n$. Če sta $A \in \mathcal{E}_n(1)$ in $P \in \mathcal{P}_n$, potem iz (3.2.6), da je $P \in A(1)$ natanko tedaj, ko je $P \in \mathcal{E}_n(P_A)$, kar pomeni

$$\mathrm{sl}\,(AP) = 1 \iff \operatorname{im} A \subseteq \operatorname{im} P, \quad A \in \mathcal{E}_n(1), \quad P \in \mathcal{P}_n. \tag{3.2.8}$$

Sledi, da je $\operatorname{im} \phi(A) = \operatorname{im} A$ za vsak $A \in \mathcal{E}_n(1)$. Lema 3.2.4 nam pa pove, da je $\phi(A) = A$ za vse $A \in \mathcal{E}_n(1^+)$.

Primer 2. $0 < c < 1$

Naj bo $P \in \mathcal{P}_n^1$ in $Q \in \mathcal{P}_n$ projektor ranga $n - 1$. Dokažimo, da sta naslednji trditvi ekvivalentni:

- $\mathrm{sl}\,(PQ) = c$
- par P, Q je edini par matrik $A \in \mathcal{E}_n(P)$ in $B \in \mathcal{E}_n(Q)$, za katerega je $\mathrm{sl}\,(AB) = c$.

Res, naj bosta $A \in \mathcal{E}_n(P)$, $A = P + A_1$, in $B \in \mathcal{E}_n(Q)$, $B = Q + B_1$. Potem imamo

$$\mathrm{sl}\,(AB) = \mathrm{sl}\,(PQ) + \mathrm{sl}\,(A_1Q + PB_1 + A_1B_1).$$

Ločimo tri možnosti. Če je sl $(PQ) > c$, očitno ne more biti sl $(AB) = c$. Druga možnost je sl $(PQ) < c$. Potem imamo $P + t(I-P) \in \mathcal{E}_n(P)$ za vsak $t \in [0,1]$ in $Q + s(I-Q) \in \mathcal{E}_n(Q)$ za vsak $s \in [0,1]$. Enačba

$$c = \text{sl}\,((P + t(I-P))(Q + s(I-Q))) = \text{sl}\,(PQ) + tc_1 + sc_2 + tsc_3$$

je izpolnjena za neskončno mnogo parov realnih števil $t, s \in [0,1]$, ker je sl $(PQ) < c$, $c_1 = \text{sl}\,((I-P)Q) = n - 1 - \text{sl}\,(PQ) > n - 2 \geq 1$, $c_2 = \text{sl}\,(P(I-Q)) = 1 - \text{sl}\,(PQ) > 0$ in $c_3 = \text{sl}\,((I-P)(I-Q)) \geq 0$. Tretja možnost pa je sl $(PQ) = c$. Če je sl $(AB) = c$, potem je $A_1 Q = PB_1 = A_1 B_1 = 0$. Trdimo, da mora biti $A_1 = 0$. Predpostavimo nasprotno. Imamo $\operatorname{im} P \perp \operatorname{im} A_1$, ker pa je $P \in \mathcal{E}_n(1)$ in sl $(PQ) < 1$, iz (3.2.8) sledi $\operatorname{im} P \not\subseteq \operatorname{im} Q$. Zato je $\operatorname{im} A_1 \not\perp \operatorname{im} Q$ oziroma $A_1 Q \neq 0$, protislovje. Torej $A_1 = 0$. Na enak način dobimo $B_1 = 0$, kar pomeni, da je P, Q edini par matrik $A \in \mathcal{E}_n(P)$ in $B \in \mathcal{E}_n(Q)$ z lastnostjo sl $(AB) = c$.

Postavimo $a = \sqrt{1-c} \in (0,1)$. Bodita $x, y \in \mathbb{F}^n$ katerakoli enotska vektorja, za katera je $|\langle x, y\rangle| = a$, $P = xx^*$ pa naj bo projektor ranga ena. Dokazali bomo, da je tudi $\phi(P)$ projektor ranga ena. Definirajmo $Q = I - yy^*$. Potem je P, Q edini par matrik iz $\mathcal{E}_n(P)$ in $\mathcal{E}_n(Q)$ z lastnostjo sl $(PQ) = c$. Iz (3.2.7) sledi, da je $\phi(P) \in \mathcal{E}_n\left(P_{L(\operatorname{im} P)}\right)$ in $\phi(Q) \in \mathcal{E}_n\left(P_{L(\operatorname{im} Q)}\right)$ edini par, katerega sled produkta je enaka c. Torej je

$$\phi(P) = P_{L(\operatorname{im} P)} = \frac{1}{\|Lx\|^2}(Lx)(Lx)^*. \tag{3.2.9}$$

Sedaj bomo dokazali, da je L bodisi linearna bodisi konjugirano linearna. Označimo avtomorfizem obsega $\mathbb{F}$, ki pripada semilinearni preslikavi L, s σ. Potem semilinearni preslikavi L^{-1} pripada avtomorfizem σ^{-1}. Po trditvi 2.2.5 obstaja semilinearna preslikava $(L^{-1})^* : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$, za katero je $\langle L^{-1}x, y\rangle = \sigma^{-1}\left(\left\langle x, (L^{-1})^* y\right\rangle\right)$, $x, y \in \mathbb{F}^n$, kar je ekvivalentno s

$$\sigma(\langle x, y\rangle) = \left\langle Lx, \left(L^{-1}\right)^* y\right\rangle, \quad x, y \in \mathbb{F}^n. \tag{3.2.10}$$

Naj bodo $x, y \in \mathbb{F}^n$ in $P, Q \in \mathcal{P}_n$ kot na zadnje, torej $\|x\| = \|y\| = 1$, $|\langle x, y\rangle| = a$, $P = xx^*$ in $Q = I - yy^*$. Po (3.2.10) je $L\left([y]^\perp\right) = \left[(L^{-1})^* y\right]^\perp$, kar nam da

$$\phi(Q) = P_{L(\operatorname{im} Q)} = P_{L\left([y]^\perp\right)} = I - \frac{1}{\|(L^{-1})^* y\|^2}\left(\left(L^{-1}\right)^* y\right)\left(\left(L^{-1}\right)^* y\right)^*.$$

Iz sl $(\phi(P)\,\phi(Q)) = c$ sledi

$$\left|\left\langle \frac{1}{\|Lx\|} Lx, \frac{1}{\|(L^{-1})^* y\|}\left(L^{-1}\right)^* y\right\rangle\right| = a,$$

od koder z uporabo (3.2.10) dobimo

$$\frac{|\sigma(\langle x, y\rangle)|}{\|Lx\|\ \|(L^{-1})^* y\|} = a. \tag{3.2.11}$$

Vemo, da v primeru $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ velja, da je σ identiteta. Predpostavimo sedaj, da je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Dokazali bomo, da je σ bodisi identiteta bodisi kompleksno konjugiranje.

Izberimo $y = (1, 0, \ldots, 0)^t$ in $x(t) = \left(a, \sqrt{1-a^2}e^{it}, 0, \ldots, 0\right)^t$. Po (3.2.11) ima norma

$$\left\|Lx(t)\right\| = \left\|u + \sigma\left(e^{it}\right)v\right\|$$

konstantno vrednost, ko variiramo $t \in \mathbb{R}$. Tukaj smo označili

$$u = L\left((a, 0, \ldots, 0)^t\right) \quad \text{in} \quad v = L\left(\left(0, \sqrt{1-a^2}, 0, \ldots, 0\right)^t\right).$$

Od tod sklepamo, da je množica $\{\sigma(e^{it}) : t \in \mathbb{R}\}$ omejena. Ker je σ avtomorfizem obsega $\mathbb{C}$, je za vsak realen t množica $\left\{(\sigma(e^{it}))^n : n \in \mathbb{Z}\right\}$ enaka $\{\sigma(e^{int}) : n \in \mathbb{Z}\}$. Ker je ta množica omejena, je

$$\left|\sigma\left(e^{it}\right)\right| = 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Torej za vsak realen t obstaja tak $s \in \mathbb{R}$, da je $\sigma(\cos t + i \sin t) = \cos s + i \sin s$. Toda potem je

$$\sigma(\cos t - i \sin t) = \sigma\left((\cos t + i \sin t)^{-1}\right) = (\cos s + i \sin s)^{-1} = \cos s - i \sin s$$

in zato $\sigma(\cos t) \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$. Ker je $\sigma(n\lambda) = n\sigma(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, sklepamo, da je $\sigma(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Tako je $\sigma|_{\mathbb{R}}$ endomorfizem obsega $\mathbb{R}$, torej identiteta. Iz $\sigma(i)^2 = -1$ dobimo, da je $\sigma(i) \in \{i, -i\}$, torej je σ bodisi identiteta bodisi kompleksno konjugiranje.

V naslednjem koraku dokažemo, da je L skalarni večkratnik izometrije. Iz (3.2.11) sledi, da za poljubna enotska $x, y \in \mathbb{F}^n$, za katera je $|\langle x, y\rangle| = a$, velja

$$\|Lx\| \left\|\left(L^{-1}\right)^* y\right\| = 1.$$

Če sta torej x_1, x_2 enotska vektorja, za katera obstaja $y \in \mathbb{F}^n$, ki izpolnjuje zahtevo $|\langle x_1, y\rangle| = |\langle x_2, y\rangle| = a$, potem je $\|Lx_1\| = \|Lx_2\|$. Za katerakoli enotska vektorja $x, z \in \mathbb{F}^n$ lahko najdemo verigo enotskih vektorjev $x = x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = z$ in $y_1, \ldots, y_{n-1}$, tako da je

$$|\langle x_k, y_k\rangle| = |\langle x_{k+1}, y_k\rangle| = a, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Dobimo, da je $\|Lx\| = \|Lz\|$, kadarkoli je $\|x\| = \|z\| = 1$. Na enak način kot v (2.4.4) dobimo, da je $L = pU$ za nek neničelen $p \in \mathbb{F}$ in nek unitaren ali antiunitaren operator U. Zato obstaja unitaren operator U, tako da je bodisi

$$\phi(P) = UPU^*, \ P \in \mathcal{P}_n^1, \quad \text{bodisi} \quad \phi(P) = UP^tU^*, \ P \in \mathcal{P}_n^1.$$

Po komponiranjaju preslikave ϕ z unitarno podobnostjo in transponiranjem, če je potrebno, lahko predpostavimo, da je

$$\phi(P) = P, \quad P \in \mathcal{P}_n^1.$$

Dokažimo, da isto velja tudi za projektorje višjega ranga. Uporabili bomo lemo 3.2.3 za množico $\mathcal{P} = \mathcal{P}_n^1$. Naj bo $1 < r < n$ in $P = I_r \oplus 0_{n-r}$ projektor ranga r.

Oglejmo si $Q = xx^t \in \mathcal{P}_n^1$, pri čemer je $x = (x_1, \ldots, x_n)^t$ enotski vektor z nenegativnimi komponentami. Potem je $Q \in \mathcal{P}_n^1 (c, P)$ natanko tedaj, ko je $\sum_{j=1}^r x_j^2 = c$. Torej je jasno, da lahko najdemo $Q, Q_1, \ldots, Q_n \in \mathcal{P}_n^1 (c, P)$, tako da ima Q same neničelne elemente, vektorji diagonal matrik $Q_1, \ldots, Q_n$ pa so linearno neodvisni. Iz leme 3.2.3 sledi, da ϕ deluje kot identiteta na množici projektorjev ranga r. Po lemi 3.2.4 je $\phi(A) = A$, $A \in \mathcal{E}_n (c^+)$. Iz (3.2.6) sklepamo še, da za $A \in \mathcal{E}_n (c)$ in $P \in \mathcal{P}_n$ velja $\mathrm{sl}\,(PA) = c \iff \mathrm{im}\, A \subseteq \mathrm{im}\, P$. Posledično imamo $\mathrm{im}\, \phi(A) = \mathrm{im}\, A$ za vsak $A \in \mathcal{E}_n (c)$.

Dokazali smo, da iz prvega pogoja v izreku sledi drugi. Oglejmo si še obratno smer. Naj torej preslikava ϕ zadošča drugemu pogoju v izreku, dokazati pa moramo, da velja (3.2.5). Dovolj je, če dokažemo, da je ta pogoj izpolnjen za preslikavo, ki deluje kot identiteta na $\mathcal{E}_n (c^+)$ in ohranja sliko na $\mathcal{E}_n (c)$. Naj bosta torej $A, B \in \mathcal{E}_n$. Enačba (3.2.5) je očitno izpolnjena, če velja kateri od naslednjih dveh pogojev:

- $\mathrm{sl}\, A < c$ ali $\mathrm{sl}\, B < c$,
- $\mathrm{sl}\, A > c$ in $\mathrm{sl}\, B > c$.

Naj bo sedaj $A \in \mathcal{E}_n (c)$. Ker ϕ ohranja slike na $\mathcal{E}_n (c)$, imamo po (3.2.6)

$$A(c) = \mathcal{E}_n (P_A) = \mathcal{E}_n \left(P_{\phi(A)}\right) = (\phi(A))(c).$$

Če je $\mathrm{sl}\, B > c$, želeni rezultat sedaj sledi iz $\phi(B) = B$. Oglejmo si še primer, ko je $\mathrm{sl}\, B = c$. Potem imamo

$$c = \mathrm{sl}\, A = \mathrm{sl}\,(AB) = \mathrm{sl}\, B, \tag{3.2.12}$$

kar nam da $A = AB = B$. Torej mora biti $A = B$ projektor. Iz (3.2.12) nadalje sledi, da je to možno le, če je $c = 1$ in $\mathrm{rang}\, A = 1$. Iz $\mathrm{im}\, \phi(A) = \mathrm{im}\, A$ in $\mathrm{sl}\, \phi(A) = 1$ pa dobimo $\phi(A) = A$, torej (3.2.5) spet velja. $\square$

3.3 Preslikave na $\mathcal{P}_n^1$

V tem poglavju bomo karakterizirali bijektivne preslikave ϕ, ki delujejo na $\mathcal{P}_n^1$ in zadoščajo pogoju

$$\mathrm{sl}\,(PQ) = c^2 \iff \mathrm{sl}\,(\phi(P)\,\phi(Q)) = c^2,$$

pri čemer bomo dodatno predpostavili, da je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $n \geq 5$ in $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq c < 1$.

Kot smo videli že v uvodu v to poglavje, lahko ta problem prevedemo v jezik projektivne geometrije. Za $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ bodita $P = \frac{1}{\|x\|^2} xx^t$ in $Q = \frac{1}{\|y\|^2} yy^t$ projektorja na žarka $[x]$ in $[y]$. Potem je

$$\mathrm{sl}\,(PQ) = \frac{1}{\|x\|^2 \|y\|^2} \mathrm{sl}\,\left(xx^t yy^t\right) = \frac{\langle y, x\rangle}{\|x\|^2 \|y\|^2} \mathrm{sl}\,\left(xy^t\right) = \frac{\langle x, y\rangle^2}{\|x\|^2 \|y\|^2}.$$

Za poljubna $[x], [y] \in \mathbb{PR}^n$ definiramo $\{[x], [y]\} = \frac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\|\|y\|}$. Torej ϕ inducira bijektivno preslikavo ψ, ki deluje na $\mathbb{PR}^n$ in zadošča pogoju

$$\{[x], [y]\} = c \iff \{\psi([x]), \psi([y])\} = c, \quad [x], [y] \in \mathbb{PR}^n. \tag{3.3.1}$$

Ta pogoj nam pove, da ψ ohranja fiksen kot $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ med žarki v projektivnem prostoru.

Naj bo $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ortogonalna transformacija in $P = \frac{1}{\|x\|^2} x x^t$ projektor. Potem je $\operatorname{im} OPO^t = O(\operatorname{im} P)$, zato imamo $\phi(P) = OPO^t$ natanko tedaj, ko je $\psi([x]) = [Ox]$.

Za poljubno podmnožico $\mathcal{S} \subset \mathbb{PR}^n$ in $a \in [0,1]$ označimo

$$\mathcal{S}^a = \{[z] \in \mathbb{PR}^n \ : \ \{[x], [z]\} = a \text{ za vsak } [x] \in S\}$$

in za $[x] \in \mathbb{PR}^n$ naj bo $[x]^a := \{[x]\}^a$.

Od sedaj naprej bomo za vektor x, ki razpenja žarek $[x]$, vedno izbrali enotski vektor.

Začnimo z nekaj tehničnimi lemami.

Lema 3.3.1. *Naj bo n naravno število večje od 3, $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq c < 1$ in $[x], [y] \in \mathbb{PR}^n$.*

- *Če je $c > \frac{1}{\sqrt{2}}$, potem je*

$$\{[x], [y]\} = 2c^2 - 1 \iff \#\left([x]^c \cap [y]^c\right) = 1,$$

- *če je $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$, potem je*

$$\{[x], [y]\} = 2c^2 - 1 = 0 \iff \#\left([x]^c \cap [y]^c\right) = 2.$$

Opomba 3.3.2. *Če postavimo $c = \cos\varphi$ za ustrezen kot $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$, potem je $2c^2 - 1$ natančno $\cos(2\varphi)$.*

Dokaz. Po delovanju z ortogonalno transformacijo lahko predpostavimo, da je $x = (1, 0, \ldots, 0)^t$ in $y = (y_1, y_2, 0, \ldots, 0)^t$ za neka $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ za lastnostjo $y_1^2 + y_2^2 = 1$. Po morebitnem množenju z -1 lahko nadalje privzamemo, da je $y_2 \geq 0$. Naj bo $[z] \in \mathbb{PR}^n$, kjer je $z = (z_1, \ldots, z_n)^t$ tak enotski vektor, da je $z_1 \geq 0$. Potem je $[z] \in [x]^c \cap [y]^c$ natanko tedaj, ko je $z_1 = c$ in $|cy_1 + z_2 y_2| = c$. Če je $y_2 = 0$, je $[x] = [y]$, množica $[x]^c \cap [y]^c$ pa je posledično neskončna. Predpostavimo sedaj, da je $\sqrt{1 - y_1^2} = y_2 > 0$. Potem množica $[x]^c \cap [y]^c$ vsebuje natanko tiste elemente $[z]$, za katere je $z_1 = c$ in $z_2 = c\frac{\pm 1 - y_1}{y_2} = c\frac{\pm 1 - y_1}{\sqrt{1 - y_1^2}} \in \left\{c\sqrt{\frac{1 - y_1}{1 + y_1}}, -c\sqrt{\frac{1 + y_1}{1 - y_1}}\right\}$. Definirajmo števili $a := c^2 + c^2\frac{1 - y_1}{1 + y_1} = \frac{2c^2}{1 + y_1}$ in $b := c^2 + c^2\frac{1 + y_1}{1 - y_1} = \frac{2c^2}{1 - y_1}$. Če je vsaj eno od števil a in b manjše od 1, potem iz $n \geq 4$ sledi, da je množica $[x]^c \cap [y]^c$ neskončna. Ta množica je prazna, če je $a, b > 1$. Označimo $z = \left(c, \sqrt{1 - c^2}, 0, \ldots, 0\right)^t$ in $z' = \left(c, -\sqrt{1 - c^2}, 0, \ldots, 0\right)^t$. Če je $a > b = 1$, je $[x]^c \cap [y]^c = \{[z']\}$, če je $b > a = 1$, je $[x]^c \cap [y]^c = \{[z]\}$, če pa je $a = b = 1$, je $[x]^c \cap [y]^c = \{[z], [z']\}$. Dokaz zaključimo z opazko, da je eno od števil a, b enako, drugo pa večje od 1, natanko tedaj, ko je $|y_1| = 2c^2 - 1 > 0$, medtem ko je pogoj $a = b = 1$ ekvivalenten s pogojem $|y_1| = 2c^2 - 1 = 0$. $\square$

Posledica 3.3.3. *Naj bo n naravno število večje od 3, $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq c < 1$ in $\psi : \mathbb{PR}^n \to \mathbb{PR}^n$ bijektivna preslikava, ki zadošča (3.3.1). Potem je*

$$\{[x], [y]\} = 2c^2 - 1 \iff \{\psi([x]), \psi([y])\} = 2c^2 - 1, \quad [x], [y] \in \mathbb{PR}^n.$$

Za dano naravno število večje od 2 in realno število $0 < c < 1$ označimo

$$\mathcal{C} = \left\{ [c, \mathbf{v}] \in \mathbb{PR}^n \,:\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-1}, \|\mathbf{v}\| = \sqrt{1 - c^2} \right\}.$$

Opomnimo, da smo pri tem poenostavili zapis. Verjamemo, da je jasno, da $[c, \mathbf{v}]$ predstavlja žarek, napet na vektor, katerega prva koordinata je c, ostale koordinate pa sovpadajo s koordinatami vektorja $\mathbf{v}$.

Posledica 3.3.4. *Naj bo $\frac{1}{\sqrt{2}} < c < 1$, ψ kot v posledici 3.3.3 in $\psi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. Če je $\psi([c, \mathbf{v}]) = [c, \mathbf{w}]$ za $[c, \mathbf{v}] \in \mathcal{C}$, potem je*

$$\psi([c, -\mathbf{v}]) = [c, -\mathbf{w}].$$

Dokaz. Iz posledice 3.3.3 sledi, da je dovolj dokazati

$$[c, \mathbf{v}]^{2c^2-1} \cap \mathcal{C} = \{[c, -\mathbf{v}]\}.$$

Trivialno je preveriti, da je $[c, -\mathbf{v}] \in [c, \mathbf{v}]^{2c^2-1} \cap \mathcal{C}$. Naj bo $[c, \mathbf{z}] \in [c, \mathbf{v}]^{2c^2-1} \cap \mathcal{C}$. Potem je bodisi

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle = c^2 - 1 \quad \text{bodisi} \quad \langle \mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle = 1 - 3c^2.$$

Druga možnost ni mogoča, ker je $|1 - 3c^2| = 3c^2 - 1 > 1 - c^2 = \|\mathbf{z}\|\|\mathbf{v}\|$. Iz prve možnosti pa dobimo $\mathbf{z} = -\mathbf{v}$, kot smo želeli. □

Lema 3.3.5. *Naj bo $\frac{1}{2} < c < 1$ in $[c, \mathbf{v}_0], [c, \mathbf{v}] \in \mathcal{C}$. Potem je*

$$\{[c, \mathbf{v}_0], [c, \mathbf{v}]\} = c \iff \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v} \rangle = c - c^2.$$

Dokaz. Po definiciji imamo $\{[c, \mathbf{v}_0], [c, \mathbf{v}]\} = c \iff \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v} \rangle = \pm c - c^2$. Če bi $\pm$ na desni bil $-$, bi bilo $c + c^2 = |\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v} \rangle| \leq 1 - c^2$, kar nasprotuje $c > \frac{1}{2}$. □

Enotsko sfero v $\mathbb{R}^n$ označimo s S^{n-1}.

Lema 3.3.6. *Naj bo n naravno število večje od 2, $d \in [-1, 1]$ in $\tau : S^{n-1} \to S^{n-1}$ bijektivna preslikava, tako da je*

$$x \perp y \iff \langle \tau(x), \tau(y) \rangle = d, \quad x, y \in S^{n-1}.$$

Potem je $d = 0$.

Dokaz. Naj bo $m < n$ in $e_1, \ldots, e_m$ družina paroma pravokotnih vektorjev v S^{n-1}. Potem lahko najdemo vsaj dva vektorja $e_{m+1} \in S^{n-1}$ z lastnostjo, da je $e_{m+1} \perp e_j$ za $j = 1, \ldots, m$. Če je $m = n - 1$, potem obstajata natanko dva takšna vektorja e_n (recimo e in $-e$). Naj bo nadalje $e_1, \ldots, e_n$ ortonormiran sistem in označimo $f_j = -e_j$ za $j = 1, \ldots, n$, torej so vektorji $e_1, \ldots, e_{j-1}, f_j, e_{j+1}, \ldots, e_n$ paroma pravokotni. Potem so tudi vektorji $f_1, \ldots, f_n$ paroma pravokotni.

Naj bodo sedaj $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n \in S^{n-1}$ in si oglejmo naslednje pogoje:

$$\langle e_j, e_k \rangle = d, \quad k \neq j \tag{3.3.2}$$

$$\langle e_j, f_k \rangle = d, \quad k \neq j \tag{3.3.3}$$

$$\langle f_j, f_k \rangle = d, \quad k \neq j. \tag{3.3.4}$$

Predpostavimo, da veljajo naslednje trditve:

(i) obstajajo $e_1, \ldots, e_n$, ki zadoščajo (3.3.2),

(ii) za vsak $j \in \{1, \ldots, n\}$ obstaja natanko en $f_j \neq e_j$ tako, da velja (3.3.3),

(iii) za $f_1, \ldots, f_n$ iz (ii) velja (3.3.4).

Dokazali bomo, da se to lahko zgodi le, če je $d = 0$. Pri tem ločimo nekaj primerov.

Primer 1. $d = 1$

Dokaz. Ta možnost je očitno v protislovju s predpostavko o bijektivnosti τ. □

Primer 2. $-\frac{1}{n-1} < d < 1$

Dokaz. Po tem, ko vektorje $e_1, \ldots, e_n$ iz (3.3.2) po potrebi preslikamo z ortogonalno transformacijo, lahko dosežemo, da so naslednji:

$$\begin{aligned} e_1 &= (u_1, \mathbf{0})^t\,, \\ e_2 &= (d_1, u_2, \mathbf{0})^t\,, \\ e_3 &= (d_1, d_2, u_3, \mathbf{0})^t\,, \\ &\cdots \\ e_n &= (d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}, u_n)^t\,, \end{aligned}$$

pri čemer je

$$d_k = d\sqrt{\frac{1-d}{(1+(k-2)\,d)\,(1+(k-1)\,d)}}, \quad k = 1, \ldots, n-1,$$

in

$$u_k = \sqrt{\frac{(1-d)\,(1+(k-1)\,d)}{1+(k-2)\,d}}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Dokažimo, da velja (ii). Res, brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $j = n$ (sicer vektorje preslikamo z ortogonalno transformacijo) in f_n dobimo tako, da na zadnjo komponento postavimo $-u_n$ namesto u_n. Preostane pokazati, da je pogoj (3.3.4) lahko izpolnjen samo, če je $d = 0$. V ta namen označimo matriki

$$E = \left[\begin{array}{ccc} e_1 & \cdots & e_n \end{array}\right]$$

in

$$F = \left[\begin{array}{ccc} f_1 & \cdots & f_n \end{array}\right].$$

Iz (3.3.2) sledi

$$E^t E = \begin{bmatrix} 1 & d & \cdots & d \\ d & 1 & \cdots & d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d & d & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

iz (3.3.3) pa

$$E^t F = \begin{bmatrix} \langle e_1, f_1 \rangle & d & \cdots & d \\ d & \langle e_2, f_2 \rangle & \cdots & d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d & d & \cdots & \langle e_n, f_n \rangle \end{bmatrix} = F^t E.$$

Če hočemo, da velja tudi (3.3.4), mora biti

$$F^t F = E^t E.$$

Potem je

$$E^t (E - F) = \begin{bmatrix} 1 - \langle e_1, f_1 \rangle & & & \\ & 1 - \langle e_2, f_2 \rangle & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 - \langle e_n, f_n \rangle \end{bmatrix} = F^t (F - E).$$

Ker $e_j \neq f_j$, je zgornja matrika obrnljiva. Ker je tudi E obrnljiva, mora biti $E - F$ obrnljiva, kar nam da $F = -E$. Potem je $E^t F = -E^t E$, iz česar sledi $d = 0$. $\square$

Primer 3. $d = -\frac{1}{m}$ *za nek* $m \in \{1, \ldots, n-1\}$

Dokaz. Če so vektorji $e_1, \ldots, e_m$ takšni kot v prejšnjem primeru, potem obstaja natanko en $e \in S^{n-1}$, za katerega je $\langle e_j, e \rangle = -\frac{1}{m}$ za $j = 1, \ldots, m$. Zato vsaj eden od pogojev (i) in (ii) ni izpolnjen. $\square$

Primer 4. $-\frac{1}{m-1} < d < -\frac{1}{m}$ *za nek* $m \in \{2, \ldots, n-1\}$

Dokaz. V tem primeru ne obstaja noben vektor $e \in S^{n-1}$, za katerega je $\langle e_j, e \rangle = d$ za $j = 1, \ldots, m$. Torej (i) ne more veljati. $\square$

Naj bodo sedaj vektorji $x_1, \ldots, x_n \in S^{n-1}$ paroma pravokotni. Potem vektorji $e_j = \tau(x_j)$ in $f_j = \tau(-x_j)$ zadoščajo pogojem (i), (ii) in (iii). Zato je $d = 0$. $\square$

Lema 3.3.7. *Naj bo n naravno število večje od 2, $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\lambda, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ in $d > 0$, tako da je $|\lambda| < d\|x\|$. Če je*

$$\{z \in \mathbb{R}^n : \|z\| = d, \langle z, x \rangle = \lambda\} \subseteq \{z \in \mathbb{R}^n : \|z\| = d, \langle z, y \rangle \in \{\mu_1, \mu_2\}\},$$

potem:

- *obstaja tak $j \in \{1, 2\}$, da je*

$$\{z \in \mathbb{R}^n : \|z\| = d, \langle z, x \rangle = \lambda\} = \{z \in \mathbb{R}^n : \|z\| = d, \langle z, y \rangle = \mu_j\},$$

- *x in y sta linearno odvisna.*

Dokaz. Označimo

$$X = \{z \in \mathbb{R}^n \,:\, \|z\| = d,\, \langle z, x\rangle = \lambda\}\,,$$
$$Y_j = \{z \in \mathbb{R}^n \,:\, \|z\| = d,\, \langle z, y\rangle = \mu_j\}\,, \quad j = 1, 2.$$

Ker je funkcija $z \mapsto \langle z, y\rangle$ zvezna na povezani množici X, mora biti na tej množici konstantna. Zato obstaja tak $j \in \{1, 2\}$, da je $X \subseteq Y_j$. Ker sta X in Y_j $(n-1)$-razsežna afina podprostora v $\mathbb{R}^n$, morata biti enaka. Če je $\lambda = 0$, potem je tudi $\mu_j = 0$ in zato $[x]^\perp = [y]^\perp$ oziroma x in y sta linearno odvisna. Če pa $\lambda \neq 0$, potem lahko izberemo bazo $\mathbb{R}^n$ iz množice X. Za vsak $z \in X$ pa velja $\langle z, \mu_j x - \lambda y\rangle = 0$, torej $\mu_j x = \lambda y$. □

Lema 3.3.8. *Naj bo n naravno število večje od 4 in $\frac{1}{\sqrt{2}} < c < 1$. Predpostavimo, da je $u \in \left(0, \sqrt{\frac{(1+2c)(1-c)}{1+c}}\right)$, $\psi : \mathbb{PR}^n \to \mathbb{PR}^n$ pa bijektivna preslikava, ki zadošča pogoju (3.3.1) in pogojema:*

- $\psi\left([1, 0, \ldots, 0]\right) = [1, 0, \ldots, 0]$,
- $\psi\left([c, u, \mathbf{u}]\right) = [c, u, \mathbf{u}]$ *za vsak* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n-2}$ *z normo* $\sqrt{1 - c^2 - u^2}$.

Potem je $\psi\left([c, t, \mathbf{t}]\right) = [c, t, \mathbf{t}]$ za katerikoli $[c, t, \mathbf{t}] \in \mathcal{C}$, za katerega je

$$0 \le t < \frac{\sqrt{(1+2c)\left(1 - c^2 - u^2\right)} - cu}{1 + c}. \tag{3.3.5}$$

Opomba 3.3.9. *Preprosto je preveriti, da je $\sqrt{\frac{(1+2c)(1-c)}{1+c}} < \sqrt{1-c^2}$. Posledično je $c^2 + u^2 < 1$. Definirajmo funkcijo $f : \left[0, \sqrt{1-c^2}\right] \to \mathbb{R}$ s pedpisom $f(u) = \frac{\sqrt{(1+2c)(1-c^2-u^2)} - cu}{1+c}$. Ker je f padajoča, iz $0 < u < \sqrt{\frac{(1+2c)(1-c)}{1+c}}$ in $f(0) = \sqrt{\frac{(1+2c)(1-c)}{1+c}}$ sledi*

$$0 < f(u) < \sqrt{1 - c^2}. \tag{3.3.6}$$

Dokaz. Očitno iz predpostavk v lemi sledi $\psi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. Po predpostavki deluje ψ kot identiteta na množici

$$A = \left\{[c, u, \mathbf{u}] \in \mathbb{PR}^n \,:\, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n-2}, \|\mathbf{u}\| = \sqrt{1 - c^2 - u^2}\right\} \subset \mathcal{C},$$

po posledici 3.3.4 pa deluje kot identiteta tudi na množici

$$B = \left\{[c, -u, \mathbf{u}] \in \mathbb{PR}^n \,:\, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n-2}, \|\mathbf{u}\| = \sqrt{1 - c^2 - u^2}\right\} \subset \mathcal{C}.$$

Fiksirajmo sedaj t, za katerega velja (3.3.5), iz (3.3.6) pa potem sledi, da je $c^2 + t^2 < 1$. Vpeljimo množico

$$D = \left\{[c, t, \mathbf{t}] \in \mathbb{PR}^n \,:\, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^{n-2},\, \|\mathbf{t}\| = \sqrt{1 - c^2 - t^2}\right\} \subset \mathcal{C}.$$

Naš cilj je pokazati, da ψ preslika vsak element iz D vase. To bo preprosto sledilo, ko dokažemo, da za $[c, t, \mathbf{t}] \in D$ velja

$$\left([c, t, \mathbf{t}]^c \cap (A \cup B)\right)^c \cap \mathcal{C} = \left\{[c, t, \mathbf{t}]\right\}. \tag{3.3.7}$$

Jasno je $[c,t,\mathbf{t}] \in ([c,t,\mathbf{t}]^c \cap (A \cup B))^c \cap \mathcal{C}$.

Da bi dokazali obratno inkluzijo, najprej pokažimo, da sta množici $[c,t,\mathbf{t}]^c \cap A$ in $[c,t,\mathbf{t}]^c \cap B$ neskončni. Naj bo $[c,\pm u,\mathbf{u}] \in A \cup B$. Po lemi 3.3.5 imamo $[c,\pm u,\mathbf{u}] \in [c,t,\mathbf{t}]^c$ natanko tedaj, ko je

$$\langle \mathbf{t},\mathbf{u}\rangle = c - c^2 \mp tu. \tag{3.3.8}$$

Vse, kar moramo preveriti, je

$$\left|c - c^2 \mp tu\right| < \|\mathbf{t}\| \, \|\mathbf{u}\| = \sqrt{(1-c^2-t^2)(1-c^2-u^2)}.$$

Ko to neenačbo kvadriramo, dobimo

$$\left(1-c^2\right) t^2 \mp 2c(1-c)\, ut + \left(1-c^2\right) u^2 - (1-c)^2 (1+2c) < 0,$$

kar je po deljenju z $1-c$ ekvivalentno s

$$\frac{\pm cu - \sqrt{(1+2c)(1-c^2-u^2)}}{1+c} < t < \frac{\pm cu + \sqrt{(1+2c)(1-c^2-u^2)}}{1+c}.$$

Ta neenakost pa drži, saj je leva stran vedno negativna po (3.3.6), druga neenakost pa sledi iz (3.3.5).

Naj bo nadalje

$$[c,z,\mathbf{z}] \in ([c,t,\mathbf{t}]^c \cap (A \cup B))^c = ([c,t,\mathbf{t}]^c \cap A)^c \cap ([c,t,\mathbf{t}]^c \cap B)^c,$$

pri čemer je $|z| \le \sqrt{1-c^2}$ in $\|\mathbf{z}\| = \sqrt{1-c^2-z^2}$. Iz $[c,z,\mathbf{z}] \in ([c,t,\mathbf{t}]^c \cap A)^c$ in (3.3.8) sledi, da za vsak $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n-2}$ z normo $\sqrt{1-c^2-u^2}$, za katerega je

$$\langle \mathbf{t},\mathbf{u}\rangle = c - c^2 - tu, \quad \text{velja} \quad \langle \mathbf{z},\mathbf{u}\rangle = c - c^2 - zu.$$

Z uporabo leme 3.3.7 sklepamo, da je $\mathbf{z} = a\mathbf{t}$ za nek $a \in \mathbb{R}$. Če fiksiramo $\mathbf{u}$ kot zgoraj, tako dobimo

$$a\left(c - c^2 - tu\right) = \langle a\mathbf{t},\mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{z},\mathbf{u}\rangle = c - c^2 - zu. \tag{3.3.9}$$

Ker pa je tudi $[c,z,\mathbf{z}] \in ([c,t,\mathbf{t}]^c \cap B)^c$, za vsak $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n-2}$ z $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{1-c^2-u^2}$

$$\text{iz} \quad \langle \mathbf{z},\mathbf{w}\rangle = c - c^2 + zu \quad \text{sledi} \quad \langle \mathbf{t},\mathbf{w}\rangle = c - c^2 + tu.$$

Z vstavljanjem $\mathbf{z} = a\mathbf{t}$ v ti dve enačbi dobimo

$$a\left(c - c^2 + tu\right) = c - c^2 + zu.$$

To nam skupaj z (3.3.9) da $a = 1$ in $z = t$, s čimer zaključimo dokaz. □

Lema 3.3.10. *Naj bo n naravno število večje od 3, $\frac{1}{\sqrt{2}} < c < 1$ in $\psi : \mathbb{PR}^n \to \mathbb{PR}^n$ bijektivna preslikava, ki zadošča pogoju (3.3.1) in zanjo velja:*

- $\psi([1,\mathbf{0}]) = [1,\mathbf{0}]$,

- *$\psi([c,\mathbf{v}]) = [c,\mathbf{v}]$ za katerikoli $[c,\mathbf{v}] \in \mathcal{C}$.*

Potem je $\psi([x]) = [x]$ za vsak $[x] \in \mathbb{PR}^n$.

Dokaz. Postavimo $c = \cos\varphi$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$. Za vsako naravno število $k \geq 2$ vpeljimo množico

$$A_k = \left\{[\cos\alpha, \mathbf{x}] \in \mathbb{PR}^n \,:\, 0 \leq \alpha < k\varphi,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1},\ \|\mathbf{x}\| = |\sin\alpha|\right\}.$$

Opazimo, da za $k\varphi > \frac{\pi}{2}$ dobimo $A_k = \mathbb{PR}^n$. Z indukcijo bomo pokazali, da ϕ deluje kot identiteta na A_k za vsak $k \geq 2$.

Začnimo s $k = 2$. Izberimo poljuben element $[\cos\alpha, \mathbf{x}]$ iz A_2, različen od $[1,\mathbf{0}]$, to pomeni $0 < \alpha < 2\varphi$. Baza indukcije bo dokazana, ko pokažemo, da je

$$\left([\cos\alpha, \mathbf{x}]^{\cos\varphi} \cap \mathcal{C}\right)^{\cos\varphi} = \{[\cos\alpha, \mathbf{x}], [1,\mathbf{0}]\}.$$

V ta namen uvedimo množico

$$V = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-1} \,:\, \|\mathbf{v}\| = \sin\varphi,\ \langle\mathbf{v},\mathbf{x}\rangle = \cos\varphi\,(1-\cos\alpha)\}.$$

Ta množica je neskončna, saj iz $-\varphi < \alpha - \varphi < \varphi$ sledi $\cos\varphi < \cos(\alpha-\varphi)$, kar nam da $0 < \cos\varphi\,(1-\cos\alpha) < \sin\varphi\sin\alpha = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{x}\|$.

Jasno je, da množica $\left([\cos\alpha, \mathbf{x}]^{\cos\varphi} \cap \mathcal{C}\right)^{\cos\varphi}$ vsebuje $[\cos\alpha,\mathbf{x}]$ in $[1,\mathbf{0}]$. Naj bo sedaj $[\cos\beta, \mathbf{z}] \in \left([\cos\alpha, \mathbf{x}]^{\cos\varphi} \cap \mathcal{C}\right)^{\cos\varphi}$, pri čemer je $0 < \beta \leq \frac{\pi}{2}$, $\mathbf{z}$ pa je vektor iz $\mathbb{R}^{n-1}$ z normo $\sin\beta$. Za vsak $\mathbf{v} \in V$ je $[\cos\varphi, \mathbf{v}] \in [\cos\alpha, \mathbf{x}]^{\cos\varphi} \cap \mathcal{C}$ in posledično

$$\cos\varphi\cos\beta + \langle\mathbf{v},\mathbf{z}\rangle = \pm\cos\varphi.$$

Ampak v resnici mora biti na desni strani te enačbe $+$. Sicer bi imeli

$$|\langle\mathbf{v},\mathbf{z}\rangle| = \cos\varphi\,(1+\cos\beta) \geq \cos\varphi$$

in zaradi $\varphi < \frac{\pi}{4}$

$$\cos\varphi > \sin\varphi \geq \sin\varphi\sin\beta = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{z}\|,$$

protislovje. Zato je

$$\langle\mathbf{v},\mathbf{z}\rangle = \cos\varphi\,(1-\cos\beta), \quad \mathbf{v} \in V.$$

Po lemi 3.3.7 obstaja tak $a \in \mathbb{R}$, da je $\mathbf{z} = a\mathbf{x}$. Ko vstavimo to v zgornjo enačbo, dobimo

$$a\,(1-\cos\alpha) = 1 - \cos\beta.$$

Od tod sklepamo, da je $a \geq 0$, zato je

$$\sin\beta = \|\mathbf{z}\| = a\|\mathbf{x}\| = a\sin\alpha.$$

Iz zadnjih dveh enačb izpeljemo

$$\begin{gathered}(1-\cos\beta)\sin\alpha = (1-\cos\alpha)\sin\beta\\ \sin\alpha - \sin\beta = \sin(\alpha-\beta)\\ 2\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2} - \cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right) = 0\\ \sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\beta}{2} = 0.\end{gathered}$$

Ker je $0 < \alpha, \beta \leq \frac{\pi}{2}$, sledi $\beta = \alpha$ in posledično $a = 1$.

Nadaljujemo z indukcijskim korakom. Naj bo $k \geq 2$. Privzamemo lahko, da je $k\varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (sicer je $A_k = A_{k+1} = \mathbb{PR}^n$). Predpostavimo, da je $\psi([x]) = [x]$ za vsak $[x] \in A_k$. Naš cilj je dokazati, da je $\psi([y]) = [y]$ za vsak $[y] \in A_{k+1}$.

Naj bo $[\cos\alpha, \mathbf{x}] \in A_{k+1} \setminus A_k$, to pomeni $k\varphi \leq \alpha < (k+1)\varphi$. Fiksirajmo nadalje poljuben $\gamma \in (\alpha - \varphi, k\varphi)$ in definirajmo

$$Y = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-1} \ : \ \|\mathbf{y}\| = \sin\gamma, \ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \cos\varphi - \cos\alpha\cos\gamma \right\}.$$

Imamo $\cos\varphi < \cos(\alpha - \gamma)$ in zato je $\cos\varphi - \cos\alpha\cos\gamma < \sin\alpha\sin\gamma$. Ker velja tudi

$$\cos\varphi - \cos\alpha\cos\gamma \geq \cos\varphi - \cos(k\varphi)\cos\gamma > \cos\varphi - \cos\varphi\cos\gamma > 0,$$

je Y neskončna množica.

Naj bo $[\cos\beta, \mathbf{z}] \in \left([\cos\alpha, \mathbf{x}]^{\cos\varphi} \cap A_k\right)^{\cos\varphi}$, pri čemer je $0 \leq \beta \leq \pi$ in $\|\mathbf{z}\| = \sin\beta$. Ker za vsak $\mathbf{y} \in Y$ velja $[\cos\gamma, \mathbf{y}] \in [\cos\alpha, \mathbf{x}]^{\cos\varphi} \cap A_k$, imamo

$$\cos\gamma\cos\beta + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \pm\cos\varphi, \quad \mathbf{y} \in Y.$$

Po lemi 3.3.7 je $\mathbf{z} = a\mathbf{x}$ za nek $a \in \mathbb{R}$. To nam skupaj z zgornjo enačbo pove, da za vsak $\gamma \in (\alpha - \varphi, k\varphi)$ velja

$$\cos\gamma(\cos\beta - a\cos\alpha) \in \{(1-a)\cos\varphi, (-1-a)\cos\varphi\}.$$

To je možno le, če je $\cos\beta = a\cos\alpha$ in $a = \pm 1$. Posledično je $[\cos\beta, \mathbf{z}] = [\cos\alpha, \mathbf{x}]$ in zato

$$\left([\cos\alpha, \mathbf{x}]^{\cos\varphi} \cap A_k\right)^{\cos\varphi} = \{[\cos\alpha, \mathbf{x}]\},$$

kar nam da želeni rezultat. $\square$

Preidimo sedaj h glavnemu izreku tega razdelka.

Izrek 3.3.11. *Naj bo n naravno število večje od 4, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq c < 1$ in $\phi : \mathcal{P}_n^1 \to \mathcal{P}_n^1$ preslikava. Potem sta nasednji trditvi ekvivalentni:*

- *ϕ je bijektivna in za vsak par $P, Q \in \mathcal{P}_n^1$ imamo*

$$\mathrm{sl}(PQ) = c^2 \iff \mathrm{sl}(\phi(P)\phi(Q)) = c^2,$$

- *obstaja taka ortogonalna $n \times n$ matrika, da je*

$$\phi(P) = OPO^t, \quad P \in \mathcal{P}_n^1$$

.

Dokaz. Prvi pogoj trivialno sledi iz drugega, zato bomo dokazali le obratno smer. Delali bomo s preslikavo $\psi : \mathbb{PR}^n \to \mathbb{PR}^n$, ki jo inducira ϕ.

Najprej obravnavajmo primer, ko je $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Posledica 3.3.3 nam pove, da je

$$\{[x], [y]\} = 0 \iff \{\psi([x]), \psi([y])\} = 0, \quad [x], [y] \in \mathbb{PR}^n.$$

Zaključek potem sledi iz izreka 2.4.7. Nadaljujmo z zanimivejšim primerom, to je $c > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je

$$\psi\left([1,0,0,\ldots,0]\right) = [1,0,0,\ldots,0]\,. \tag{3.3.10}$$

To lahko namreč dosežemo tako, da ψ komponiramo z ustrezno preslikavo, porojeno iz ortogonalne transformacije. Sledi, da je $\psi\left(\mathcal{C}\right) = \mathcal{C}$.

V naslednjem koraku bomo našli takšne skalarje c_1, c_2, c_3, c_4, da ψ preslika vsak element oblike $[c_1, c_2, *]$ v element oblike $[c_3, c_4, *]$. Postavimo

$$\psi\left(\left[2c-1, 2\sqrt{c\,(1-c)}, 0, \ldots, 0\right]\right) = [a_1, \ldots, a_n]\,.$$

Brez izgube splošnosti lahko privzamemo, da je $a_1 \geq 0$. Nadalje, ko ψ komponiramo s še eno preslikavo, ki je inducirana z ortogonalno transformacijo, lahko privzamemo, da je

$$\psi\left(\left[2c-1, 2\sqrt{c\,(1-c)}, 0, \ldots, 0\right]\right) = \left[a, \sqrt{1-a^2}, 0, \ldots, 0\right] \tag{3.3.11}$$

za nek $a \in [0,1)$.

Vpeljimo množico

$$A = \left\{\left[c, \sqrt{c\,(1-c)}, \mathbf{u}\right] \in \mathbb{PR}^n \;:\; \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n-2}, \|\mathbf{u}\| = \sqrt{1-c}\right\} \subset \mathcal{C}.$$

Opazimo, da imamo za vsak $\left[c, \sqrt{c\,(1-c)}, \mathbf{u}\right] \in A$

$$\left\{\left[c, \sqrt{c\,(1-c)}, \mathbf{u}\right], [1,0,\mathbf{0}]\right\} = c$$

in

$$\left\{\left[c, \sqrt{c\,(1-c)}, \mathbf{u}\right], \left[2c-1, 2\sqrt{c\,(1-c)}, \mathbf{0}\right]\right\} = c.$$

Ko uporabimo prvo enačbo in (3.3.1), vidimo, da je $\psi\left(\left[c, \sqrt{c\,(1-c)}, \mathbf{u}\right]\right) = [c, b_\mathbf{u}, \mathbf{v_u}]$ za nek $|b_\mathbf{u}| \leq \sqrt{1-c^2}$ in $\mathbf{v_u} \in \mathbb{R}^{n-2}$ z $\|\mathbf{v_u}\| = \sqrt{1-c^2-b_\mathbf{u}^2}$. Druga enačba zgoraj nam da $\left\{[c, b_\mathbf{u}, \mathbf{v_u}], \left[a, \sqrt{1-a^2}, \mathbf{0}\right]\right\} = c$ oziroma ekvivalentno

$$b_\mathbf{u} = c\frac{\pm 1 - a}{\sqrt{1-a^2}}. \tag{3.3.12}$$

Iz tega direktno dobimo

$$b_\mathbf{u}^2 + c^2 = \frac{2c^2}{1 \pm a},$$

vendar nam $c > \frac{1}{\sqrt{2}}$ in $b_\mathbf{u}^2 + c^2 \leq 1$ povesta, da mora biti $\pm$ v resnici $+$. Zato iz (3.3.12) sledi, da je $b_\mathbf{u} = c\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$ za vsak $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n-2}$ z $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1-c}$.

Tako smo dokazali, da je

$$\psi\left(\left[c, \sqrt{c\,(1-c)}, \mathbf{u}\right]\right) = \left[c, c\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}, \mathbf{v_u}\right] \tag{3.3.13}$$

za katerikoli $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n-2}$ z $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1-c}$. Potem je $\|\mathbf{v_u}\| = \sqrt{1-\frac{2c^2}{1+a}}$, kar mora biti pozitivno zaradi injektivnosti ψ.

Torej ψ inducira preslikavo $\tau : S^{n-3} \to S^{n-3}$ s predpisom

$$\tau\left(\frac{1}{\sqrt{1-c}}\mathbf{u}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2c^2}{1+a}}}\mathbf{v_u}.$$

Najprej se prepričajmo, da je τ bijektivna. Injektivnost je jasna, saj je ψ injektivna. Z namenom preveriti surjektivnost recimo, da je $\mathbf{v}$ poljuben vektor iz $\mathbb{R}^{n-2}$ z normo $\sqrt{1-\frac{2c^2}{1+a}}$. Ker je ψ surjektivna in $\psi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, obstajata tak $b \in \left[-\sqrt{1-c^2}, \sqrt{1-c^2}\right]$ in vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n-2}$ z normo $\sqrt{1-c^2-b^2}$, da je

$$\psi([c,b,\mathbf{u}]) = \left[c, c\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}, \mathbf{v}\right].$$

Sedaj sledi iz

$$\left\{\left[c, c\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}, \mathbf{v}\right], \left[a, \sqrt{1-a^2}, \mathbf{0}\right]\right\} = |ca + c(1-a)| = c$$

in iz (3.3.11), da je $\left\{[c,b,\mathbf{u}], \left[2c-1, 2\sqrt{c(1-c)}, \mathbf{0}\right]\right\} = c$. Direkten račun pokaže, da od tod dobimo $b \in \left\{\sqrt{c(1-c)}, -\sqrt{\frac{c^3}{1-c}}\right\}$. Preprosto je preveriti, da je $\sqrt{\frac{c^3}{1-c}} > \sqrt{1-c^2}$ in zato mora biti $b = \sqrt{c(1-c)}$. Posledično je τ surjektivna.

Iz leme 3.3.5 nadalje sledi, da je $\left\{\left[c, \sqrt{c(1-c)}, \mathbf{u}_1\right], \left[c, \sqrt{c(1-c)}, \mathbf{u}_2\right]\right\} = c$ natanko tedaj, ko sta $\mathbf{u}_1$ in $\mathbf{u}_2$ pravokotna. Podobno za vektorja $\mathbf{v}_1$ in $\mathbf{v}_2$ dobimo

$$\left\{\left[c, c\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}, \mathbf{v}_1\right], \left[c, c\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}, \mathbf{v}_2\right]\right\} = c \iff \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = c - \frac{2c^2}{1+a}.$$

Torej je

$$x \perp y \iff \langle \tau(x), \tau(y) \rangle = \frac{c - \frac{2c^2}{1+a}}{1 - \frac{2c^2}{1+a}} = c\frac{1+a-2c}{1+a-2c^2}, \quad x, y \in S^{n-3}.$$

Lema 3.3.6 nam sedaj pove, da je $a = 2c-1$ in posledično τ ohranja pravokotnost na S^{n-3}. Za katerikoli $x \in S^{n-3}$ imamo $\left([x]^\perp\right)^\perp \cap S^{n-3} = \{x, -x\}$, iz česar sklepamo, da iz $\tau(x) = y$ sledi $\tau(-x) = -y$. Zato τ inducira preslikavo $\sigma : \mathbb{PR}^{n-2} \to \mathbb{PR}^{n-2}$, ki ohranja pravokotnost. Po izreku 2.4.7 obstaja taka ortogonalna transformacija $O_1 : \mathbb{R}^{n-2} \to \mathbb{R}^{n-2}$, da je $\sigma([u]) = [O_1 u]$, $[u] \in \mathbb{PR}^{n-2}$. Z uporabo (3.3.13) vidimo, da lahko po komponiranju preslikave ψ s preslikavo $[x] \mapsto [(I_2 \oplus O_1^t)\, x]$ privzamemo

$$\psi\left(\left[c, \sqrt{c(1-c)}, \mathbf{u}\right]\right) = \left[c, \sqrt{c(1-c)}, \pm\mathbf{u}\right], \quad \left[c, \sqrt{c(1-c)}, \mathbf{u}\right] \in A. \qquad (3.3.14)$$

Opazimo še, da nam posledica 3.3.4 da

$$\psi\left(\left[c, -\sqrt{c\,(1-c)}, -\mathbf{u}\right]\right) = \left[c, -\sqrt{c\,(1-c)}, \mp\mathbf{u}\right]$$

in če v zadnji enačbi izberemo $-\mathbf{u}$ namesto $\mathbf{u}$, še

$$\psi\left(\left[c, -\sqrt{c\,(1-c)}, \mathbf{u}\right]\right) = \left[c, -\sqrt{c\,(1-c)}, \pm\mathbf{u}\right]$$

(opomnimo, da če vektorja $\mathbf{u}$ v zadnji enačbi in v (3.3.14) sovpadata, potem tudi znaka $\pm$ v teh dveh enačbah sovpadata). Pokazali bomo, da je znak $\pm$ v teh enačbah neodvisen od $\mathbf{u}$. Na poti do tega rezultata si bomo pomagali z množico

$$\mathcal{O} = \left\{[c, 0, \mathbf{v}] \,:\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-2},\ \|\mathbf{v}\| = \sqrt{1-c^2}\right\} \subset \mathcal{C}.$$

Izberimo poljuben $\mathbf{v}$ iz sfere $S = \left\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-2} \,:\, \|\mathbf{v}\| = \sqrt{1-c^2}\right\}$ in vpeljimo množico

$$U_{\mathbf{v}} = \left\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n-2} \,:\, \|\mathbf{u}\| = \sqrt{1-c},\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = c\,(1-c)\right\}.$$

Opomnimo, da je $U_{\mathbf{v}}$ neskončna, ker je $c\,(1-c) < \sqrt{(1-c)\,(1-c^2)}$. Fiksirajmo sedaj $\mathbf{u}_0 \in U_{\mathbf{v}}$. Če postavimo $\psi\,([c, 0, \mathbf{v}]) = [c, w, \mathbf{w}]$, potem iz

$$\left\{[c, 0, \mathbf{v}], \left[c, \sqrt{c\,(1-c)}, \mathbf{u}_0\right]\right\} = \left\{[c, 0, \mathbf{v}], \left[c, -\sqrt{c\,(1-c)}, \mathbf{u}_0\right]\right\} = c$$

sledi

$$\left\{[c, w, \mathbf{w}], \left[c, \sqrt{c\,(1-c)}, \pm\mathbf{u}_0\right]\right\} = \left\{[c, w, \mathbf{w}], \left[c, -\sqrt{c\,(1-c)}, \pm\mathbf{u}_0\right]\right\} = c,$$

iz česar sklepamo, da je $w = 0$. To nam skupaj s (3.3.14) da

$$\left\{[c, 0, \mathbf{w}], \left[c, \sqrt{c\,(1-c)}, \pm\mathbf{u}\right]\right\} = c$$

za vsak $\mathbf{u} \in U_{\mathbf{v}}$. To enačbo lahko ekvivalentno zapišemo kot

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{u}\rangle = \pm c\,(1-c)\,, \quad \mathbf{u} \in U_{\mathbf{v}}.$$

Po lemi 3.3.7 je izraz $\langle \mathbf{w}, \mathbf{u}\rangle$ konstanten, ko variiramo $\mathbf{u} \in U_{\mathbf{v}}$. To pomeni, da je znak $\pm$ v (3.3.14) neodvisen od $\mathbf{u} \in U_{\mathbf{v}}$. Opazimo, da je družina $\{U_{\mathbf{v}}\}_{\mathbf{v}\in S}$ pokritje sfere $\left\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n-2} \,:\, \|\mathbf{u}\| = \sqrt{1-c}\right\}$. Tako bo željeni zaključek, da je znak $\pm$ v (3.3.14) konstanten, sledil, ko dokažemo, da nam za katerikoli drugi $\mathbf{v}' \in S$ vektorji $\mathbf{u}$ iz $U_{\mathbf{v}'}$ dajo isti znak kot vektorji iz $U_{\mathbf{v}}$. To je res, saj lahko najdemo tak $\mathbf{z} \in S$, da je $U_{\mathbf{v}} \cap U_{\mathbf{z}} \neq \emptyset$ in $U_{\mathbf{v}'} \cap U_{\mathbf{z}} \neq \emptyset$ (to drži za katerikoli $\mathbf{z}$, ki je pravokoten na $\mathbf{v}$ in na $\mathbf{v}'$). Končno lahko privzamemo, da ψ preslika vsak element iz A vase (sicer pomnožimo O_1 z -1).

Naš naslednji cilj je dokazati, da ψ deluje kot identiteta na množici $\mathcal{C}$. Ta cilj bomo dosegli v nekaj korakih. Vpeljimo množico

$$B = \left\{[c, t, \mathbf{t}] \in \mathcal{C} \,:\, 0 \le t < \frac{\sqrt{1-c}}{1+c}\left(\sqrt{1+2c} - c\sqrt{c}\right)\right\}.$$

Lahko se jeprepričati, da velja $\sqrt{c(1-c)} < \sqrt{\frac{(1+2c)(1-c)}{1+c}}$. Če v lemi 3.3.8 izberemo $u = \sqrt{c(1-c)}$, tako dobimo, da je $\psi|_B$ identiteta.

V naslednjem koraku pokažemo, da ψ deluje kot identiteta na množici

$$E = \left\{ \left[c, c\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}, \mathbf{w} \right] \in \mathbb{PR}^n \ : \ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n-2}, \|\mathbf{w}\| = \sqrt{1 - \frac{2c^2}{1+c}} \right\} \subset \mathcal{C}.$$

Naj bo t takšno poljubno realno število, da je $0 \leq t < \frac{\sqrt{1-c}}{1+c}\left(\sqrt{1+2c} - c\sqrt{c}\right)$ in $0 < t < \sqrt{\frac{(1+2c)(1-c)}{1+c}}$. Naj bo nadalje funkcija f definirana kot v opombi 3.3.9. Ker je f zvezna in zanjo velja $f(0) > c\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}$, lahko izberemo tak t, ki zadošča tudi neenačbi $c\sqrt{\frac{1-c}{1+c}} < f(t)$. Po lemi 3.3.8 preslika ψ vsak element množice E vase.

Sedaj smo pripravljeni obravnavati celotno množico $\mathcal{C}$. Naj bo najprej $[c, v, \mathbf{v}] \in E^c \cap \mathcal{C}$. Po lemi 3.3.5 je $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = c - c^2 - vc\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}$ za vsak $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n-2}$ z normo $\sqrt{1 - \frac{2c^2}{1+c}}$. Po tem, ko izberemo $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$, zaključimo, da je $v = \sqrt{1-c^2}$. Zato je $E^c \cap \mathcal{C} = \left\{ \left[c, \sqrt{1-c^2}, \mathbf{0}\right] \right\}$ in posledično

$$\psi\left(\left[c, \sqrt{1-c^2}, \mathbf{0}\right]\right) = \left[c, \sqrt{1-c^2}, \mathbf{0}\right].$$

Iz posledice 3.3.4 sledi

$$\psi\left(\left[c, -\sqrt{1-c^2}, \mathbf{0}\right]\right) = \left[c, -\sqrt{1-c^2}, \mathbf{0}\right].$$

Z namenom dokazati, da ψ deluje kot identiteta na $\mathcal{C}$, izberimo poljuben $[c, v, \mathbf{v}] \in \mathcal{C} \setminus \left\{ \left[c, \sqrt{1-c^2}, \mathbf{0}\right], \left[c, -\sqrt{1-c^2}, \mathbf{0}\right] \right\}$. Posledica 3.3.4 pove, da lahko brez izgube splošnosti privzamemo $v \geq 0$. Pokazali bomo, da je

$$\left([c, v, \mathbf{v}]^c \cap E\right)^c \cap \mathcal{C} = \left\{ [c, v, \mathbf{v}], \left[c, \sqrt{1-c^2}, \mathbf{0}\right] \right\}. \tag{3.3.15}$$

Začnimo z dokazom, da obstaja neskončno mnogo vektorjev $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n-2}$ z normo $\sqrt{1 - \frac{2c^2}{1+c}}$, za katere je

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = c - c^2 - vc\sqrt{\frac{1-c}{1+c}} = c\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}\left(\sqrt{1-c^2} - v\right). \tag{3.3.16}$$

Res, imamo $v \geq 0$ in $\sqrt{1-c^2} - v > 0$. Potem je jasno

$$c\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}\left(\sqrt{1-c^2} - v\right) < \sqrt{\frac{(1+2c)(1-c)}{1+c}\left(\sqrt{1-c^2} - v\right)\left(\sqrt{1-c^2} + v\right)}$$

$$= \sqrt{\left(1 - \frac{2c^2}{1+c}\right)(1 - c^2 - v^2)} = \|\mathbf{w}\|\,\|\mathbf{v}\|,$$

kar nam da želeni rezultat.

Naj bo $[c, z, \mathbf{z}] \in \left([c, v, \mathbf{v}]^c \cap E\right)^c \cap \mathcal{C}$. Če $\mathbf{w}$ zadošča (3.3.16), potem je $\left[c, c\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}, \mathbf{w}\right] \in [c, v, \mathbf{v}]^c \cap E$ in zato imamo po lemi 3.3.5

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle = c\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}\left(\sqrt{1-c^2} - z\right). \tag{3.3.17}$$

Lema 3.3.7 nam sedaj pove, da je $\mathbf{z} = a\mathbf{v}$ za nek $a \in \mathbb{R}$. Iz enačb (3.3.16) in (3.3.17) sledi

$$\sqrt{1-c^2} - z = a\left(\sqrt{1-c^2} - v\right)$$

in posledično $a \geq 0$. Tako je $a = \frac{\|\mathbf{z}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sqrt{\frac{1-c^2-z^2}{1-c^2-v^2}}$, kar pomeni

$$\sqrt{1-c^2} - z = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{1-c^2} - z\right)\left(\sqrt{1-c^2} + z\right)\left(\sqrt{1-c^2} - v\right)}{\sqrt{1-c^2} + v}}.$$

Iz tega je preprosto izračunati, da je ali $z = \sqrt{1-c^2}$ ali $z = v$. V prvem primeru dobimo $a = 0$, v drugem pa $a = 1$.

Ker smo dokazali (3.3.15), lahko zaključimo, da je $\psi([c, \mathbf{v}]) = [c, \mathbf{v}]$ za vsak $[c, \mathbf{v}] \in \mathcal{C}$. Lema 3.3.10 nam da končen rezultat. $\square$

Poglavje 4

Preslikave na bistveno neskončnih idempotentih

Uvod

Kadar ne bo navedeno drugače, bo v tem poglavju $\mathcal{H}$ vedno neskončno razsežen Hilbertov prostor nad $\mathbb{F}$. Na množici idempotentnih operatorjev $\mathcal{I}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ in posledično na njenih podmnožicih lahko na naraven način definiramo delno urejenost s predpisom

$$P \leq Q \iff PQ = QP = P$$

za idempotenta P in Q. V matrični obliki si to delno urejenost lahko preprosto predstavljamo na naslednji način: $P \leq Q$ natanko tedaj, ko obstajajo taki $U_1, U_2, U_3 \in \operatorname{Lat}\mathcal{H}$, da imamo razcep $\mathcal{H} = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$, glede na katerega velja

$$P = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad Q = \begin{bmatrix} I & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}.$$

Tukaj I označuje identične operatorje na ustreznih podprostorih, na neoznačenih poljih so pa ničelni operatorji. Opomnimo, da je zgoraj omenjeni razcep enoličen, saj imamo v primeru njegovega obstoja $U_1 = \operatorname{im} Q$, $U_2 = \operatorname{im}(P - Q)$ in $U_3 = \ker P$.

Spomnimo se še, da lahko vsak idempotent P poistovetimo s parom $(U, V) \in \operatorname{Lat}\mathcal{H} \times \operatorname{Lat}\mathcal{H}$, za katerega velja $U \oplus V = \mathcal{H}$. V tej korespondenci imamo $U = \operatorname{im} P$ in $V = \ker P$. Preprosto razberemo še eno ekvivalentno definicijo urejenosti $\leq$, ki nam pove njeno geometrijsko interpretacijo. Imamo namreč

$$P \leq Q \iff \operatorname{im} P \subseteq \operatorname{im} Q \ \text{ in } \ \ker P \supseteq \ker Q.$$

Motiviran s problemi iz kvantne mehanike [24] je Ovchinnikov [52] opisal urejenostne avtomorfizme množice $\mathcal{I}(\mathcal{H})$.

Izrek 4.0.1 (Ovchinnikov)**.** *Če je $\phi : \mathcal{I}(\mathcal{H}) \to \mathcal{I}(\mathcal{H})$ urejenostni avtomorfizem, potem obstaja tak $A \in \operatorname{BCI}(\mathcal{H})$, da imamo bodisi*

$$\phi(P) = APA^{-1}, \quad P \in \mathcal{I}(\mathcal{H}),$$

bodisi

$$\phi(P) = AP^*A^{-1}, \quad P \in \mathcal{I}(\mathcal{H}).$$

Karakterizirali bomo urejenostne avtomorfizme množice $\mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$. Dokaz, ki ga bomo predstavili, ni le manjši popravek dokaza Ovchinnikova, ki temelji na idempotentih ranga 1. Še en soroden rezultat je predstavil Pankov, ki proučuje projektorje. Kot že vemo, lahko te poistovetimo z zaprtimi podprostori v $\mathcal{H}$, delna urejenost $\leq$ na projektorjih pa se ujema z inkluzijo $\subseteq$ na mreži zaprtih podprostorov. Avtomorfizme mreže zaprtih podprostorov realnega neskončno razsežnega normiranega prostora X je opisal Mackey [43], medtem ko sta Fillmore in Longstaff [17] rešila bolj kompliciran kompleksen primer.

Izrek 4.0.2 (Mackey, Fillmore, Longstaff)**.** *Naj bosta X in Y neskončno razsežna normirana prostora nad $\mathbb{F}$ in $\phi : \operatorname{Lat} X \to \operatorname{Lat} Y$ izomorfizem mrež. Potem obstaja tak linearen ali konjugirano linearen obrnljiv operator $A : X \to Y$, da sta A in A^{-1} omejena ter velja*

$$\phi(U) = A(U), \quad U \in \operatorname{Lat} X.$$

Pankov [53, 54] je nadalje opisal urejenostne avtomorfizme množice $\operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H}$, če je $\mathcal{H}$ separabilen.

Izrek 4.0.3 (Pankov)**.** *Naj bo $\mathcal{H}$ separabilen in $\phi : \operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H} \to \operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H}$ urejenostni avtomorfizem. Potem obstaja tak $A \in \operatorname{BCI}(\mathcal{H})$, da je*

$$\phi(U) = A(U), \quad U \in \operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H}.$$

Naš rezultat je torej analogija rezultata Pankova za idempotente, ki niso nujno sebi adjungirani, izpustimo pa tudi predpostavko o separabilnosti. Ko govorimo o ohranjevalcih na množici projektorjev z neskončno razsežno sliko in neskončno razsežnim jedrom $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{H})$, moramo omeniti tudi Šemrlov rezultat [68]. Ta opiše splošno obliko bijektivnih preslikav, ki ohranjajo pravokotnost v obe smeri na omenjeni množici. Pred formulacijo rezultata vpeljimo pojem pravokotnosti. Za idempotenta P in Q, pravimo, da sta pravokotna, če je $PQ = QP = 0$. To označimo s $P \perp Q$. V matrični obliki lahko pravokotna idempotenta predstavimo z razcepom $\mathcal{H} = \operatorname{im} P \oplus \operatorname{im} Q \oplus (\ker P \cap \ker Q)$, za katerega očitno velja

$$P = \begin{bmatrix} I & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ter} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & I & \\ & & 0 \end{bmatrix}.$$

Če sta P in Q projektorja, potem imamo $P \perp Q \iff \operatorname{im} P \perp \operatorname{im} Q$.

Izrek 4.0.4 (Šemrl)**.** *Naj bo $\phi : \mathcal{P}_\infty(\mathcal{H}) \to \mathcal{P}_\infty(\mathcal{H})$ takšna bijektivna preslikava, da velja*

$$P \perp Q \iff \phi(P) \perp \phi(Q), \quad P, Q \in \mathcal{P}_\infty(\mathcal{H}).$$

Potem obstaja bodisi unitaren bodisi antiunitaren operator $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, tako da je

$$\phi(P) = UPU^*, \quad P \in \mathcal{P}_\infty(\mathcal{H}).$$

Izkaže se, da sta relaciji $\leq$ in pravokotnost tesno povezani. Na primer, $P \leq Q$ natanko tedaj, ko je vsak idempotent, ki je pravokoten na Q, pravokoten tudi na P. Zato ni presenetljivo, da so bijektivne preslikave, ki ohranjajo pravokotnost v obe smeri na množici idempotentov, iste kot urejenostni avtomorfizmi. Ta rezultat je utemeljil Šemrl v [65], v istem članku pa je opisal tudi ohranjevalce komutativnosti v obe smeri na množici vseh idempotentov. Za formulacijo tega rezultata potrebujemo še naslednjo definicijo. Preslikavi $\xi : \mathcal{I}(\mathcal{H}) \to \mathcal{I}(\mathcal{H})$ pravimo *orto-permutacija*, če preslika vsak par $\{P, I-P\} \subset \mathcal{I}(\mathcal{H})$ bijektivno nase.

Izrek 4.0.5 (Šemrl)**.** *Naj bo $\phi : \mathcal{I}(\mathcal{H}) \to \mathcal{I}(\mathcal{H})$ takšna bijektivna preslikava, da je*

$$PQ = QP \iff \phi(P)\phi(Q) = \phi(Q)\phi(P), \quad P, Q \in \mathcal{I}(\mathcal{H}).$$

Potem obstajata taka orto-permutacija $\xi : \mathcal{I}(\mathcal{H}) \to \mathcal{I}(\mathcal{H})$ in $A \in \mathrm{BCI}(\mathcal{H})$, da imamo bodisi

$$\phi(P) = A\xi(P)A^{-1}, \quad P \in \mathcal{I}(\mathcal{H}),$$

bodisi

$$\phi(P) = A\xi(P)^* A^{-1}, \quad P \in \mathcal{I}(\mathcal{H}).$$

Motivirani z zadnjima dvema rezultatatoma bomo karakterizirali bijektivne preslikave ϕ, ki zadoščajo $P \perp Q \iff \phi(P) \perp \phi(Q)$ in tiste, ki zadoščajo $PQ = QP \iff \phi(P)\phi(Q) = \phi(Q)\phi(P)$, spet ne na celi množici $\mathcal{I}(\mathcal{H})$, ampak na podmnožici $\mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$. Omenimo, da so rezultati v [65] še bolj splošni, saj obravnavajo idempotente na Banachovih prostorih. Vendar se je med obravnavanjem naših problemov smiselno omejiti na Hilbertove prostore, saj obstajajo refleksivni Banachovi prostori X, ki se ne dajo zapisati kot direktna vsota dveh neskončno razsežnih podprostorov, zato je množica $\mathcal{I}_\infty(X)$ prazna [22].

Razložimo na kratko glavne rezultate tega poglavja. Trivialno je preveriti, da je $P \mapsto P^*$ bijekcija $\mathcal{I}_\infty(\mathcal{H}) \to \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$, ki ohranja urejenost, pravokotnost in komutativnost v obe smeri. Isto velja za preslikavo $P \mapsto APA^{-1}$, kjer je $A \in \mathrm{BCI}(\mathcal{H})$. Seveda tudi kompozicija dveh preslikav, ki ohranjata katero od proučevanih relacij, ohranja to relacijo. V prvem razdelku iščemo preslikave, ki ohranjajo urejenost. Pri tem uporabimo podobno splošno idejo kot v [53, 54], da dokažemo, da morajo biti takšne oblike, ki je opisana v tem odstavku. S tem rezultatom je preprosto sklepati, da isto velja za preslikave, ki ohranjajo pravokotnost. To bomo storili v drugem razdelku. Oglejmo si še preslikave, ki ohranjajo komutativnost. Jasno je vsaka orto-permutacija $\xi : \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H}) \to \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$ bijektivna in ohranja komutativnost v obe smeri. V tretjem razdelku bomo pokazali, da so navedeni primeri preslikav vsi s to lasnostjo.

Vsebina tega poglavja je povzeta po [57].

4.1 Urejenostni avtomorfizmi

Izrek 4.1.1. *Če je $\phi : \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H}) \to \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$ urejenostni avtomorfizem, potem obstaja tak $A \in \mathrm{BCI}(\mathcal{H})$, da imamo bodisi*

$$\phi(P) = APA^{-1}, \quad P \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H}),$$

bodisi

$$\phi(P) = AP^*A^{-1}, \quad P \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H}).$$

Med dokazovanjem tega izreka bomo potrebovali naslednjo posplošitev izreka 4.0.1.

Trditev 4.1.2. *Naj bosta $\mathcal{H}$ in $\mathcal{K}$ neskončno razsežna Hilbertova prostora nad $\mathbb{F}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{H})$ in $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{K})$ pa takšni množici, ki vsebujeta vse idempotente, ki imajo rang* 0, 1 *ali* 2. *Če je $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ urejenostni izomorfizem, potem obstaja tak $A \in \mathrm{BCI}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, da imamo bodisi*

$$\phi(P) = APA^{-1}, \quad P \in \mathcal{A},$$

bodisi

$$\phi(P) = AP^*A^{-1}, \quad P \in \mathcal{A}.$$

Dokaz. Glavna ideja v dokazu je ista kot v dokazu Ovchinnikova [52], medtem ko je druga polovica bistveno drugačna. Dokaz bomo razdelili na več korakov.

Korak 1. *$\phi(0) = 0$ in $\phi(\mathcal{I}_r(\mathcal{H})) = \mathcal{I}_r(\mathcal{K})$ za $r = 1, 2$.*

Dokaz. Naj bo r nenegativno celo število in $P \in \mathcal{I}(\mathcal{H})$. Potem je $\operatorname{rang} P = r$ natanko tedaj, ko obstaja natanko en $Q \in \mathcal{I}(\mathcal{H})$, za katerega je $Q \leq P$ in $\operatorname{rang} Q \geq r$. Če to trditev uporabimo zaporedoma za $r = 0, 1, 2$, dobimo želeni rezultat. □

Na množicah $\mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ in $\mathcal{I}_1(\mathcal{K})$ definiramo relacijo $\sim$ s predpisom $P \sim Q$ natanko tedaj, ko je bodisi $\operatorname{im} P = \operatorname{im} Q$ bodisi $\ker P = \ker Q$.

Korak 2. *Za vsak par $P, Q \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ imamo $P \sim Q \iff \phi(P) \sim \phi(Q)$.*

Dokaz. To je očitno res, če je $P = Q$, zato izberimo različna $P, Q \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$. Označimo $P = x \otimes u^*$ in $Q = y \otimes v^*$. Ker sta P in Q idempotenta, mora biti po lemi 2.1.1 in opombi po njej $\langle x, u\rangle = \langle y, v\rangle = 1$. Očitno je $\operatorname{im} P = [x]$, $\operatorname{im} Q = [y]$, $\ker P = [u]^\perp$ in $\ker Q = [v]^\perp$.

Želena trditev bo očitno sledila, ko dokažemo

$$P \not\sim Q \iff \text{obstaja največ en } R \in \mathcal{I}_2(\mathcal{H}), \text{ za katerega je } P \leq R \text{ in } Q \leq R.$$

Naj bo $P \not\sim Q$. Potem sta x in y linearno neodvisna, zato je $[x, y] \in \mathrm{Lat}_2\,\mathcal{H}$. Podobno je $[u, v]^\perp \in \mathrm{Lat}_{-2}\,\mathcal{H}$. Recimo, da obstaja tak $R \in \mathcal{I}_2(\mathcal{H})$, da je $P \leq R$ in $Q \leq R$. Ker je $\operatorname{im} R$ 2-razsežen in vsebuje $\operatorname{im} P$ ter $\operatorname{im} Q$, mora biti $\operatorname{im} R = [x, y]$. Analogno dobimo $\ker R = [u, v]^\perp$. Zato je R enolično določen s pogojema $P \leq R$ in $Q \leq R$.

Naj bo sedaj $P \sim Q$. To pomeni, da sta bodisi x in y linearno odvisna bodisi u in v linearno odvisna. Predpostavimo najprej, da je izpolnjen prvi pogoj. Iz $P \neq Q$ potem sledi, da sta u in v linearno neodvisna. Naj bo w poljuben vektor iz $[u, v]^\perp$ in $z_w = \|u\|^2 v - \langle v, u\rangle u + w$. Potem je očitno $\langle z_w, u\rangle = 0$ in $\langle z_w, v\rangle = \|u\|^2\|v\|^2 - |\langle u, v\rangle|^2$. Slednje je pozitivno, ker sta u in v linearno neodvisna. Očitno tudi iz $w_1 \neq w_2$ sledi, da sta z_{w_1} in z_{w_2} linearno neodvisna. Ker lahko izberemo neskončno mnogo paroma različnih vektorjev $w \in [u,v]^\perp$, obstaja neskončno mnogo paroma linearno neodvisnih vektorjev $z \in \mathcal{H}$, za katere je

$$z \perp u \quad \text{in} \quad z \not\perp v. \tag{4.1.1}$$

Fiksirajmo z, ki zadošča tema dvema pogojema. Ker je $z \perp u$ in $\langle x, u \rangle = 1$, sta x in z linearno neodvisna. Trivialno je preveriti tudi, da za vsak tak z velja $[x,z] \cap [u,v]^\perp = \{0\}$. To pomeni, da je $[x,z] \oplus [u,v]^\perp = \mathcal{H}$, zato obstaja $R_z \in \mathcal{I}_2(\mathcal{H})$, za katerega je $\operatorname{im} R_z = [x,z]$ in $\ker R_z = [u,v]^\perp$. Lahek račun pokaže, da z', ki zadošča (4.1.1) in je linearno neodvisen od z, ne more biti vsebovan v $[x,z]$. Posledično je $[x,z] \neq [x,z']$ in zato $R_z \neq R_{z'}$. Očitno za vsak tako dobljen idempotent R_z velja $P \leq R_z$ in $Q \leq R_z$.

Oglejmo si še primer, ko sta u in v linearno odvisna. Po lemi 2.1.1 imamo $P^* = u \otimes x^*$ in $Q^* = v \otimes y^*$. Po prejšnjem primeru obstajajo neskončno mnogo idempotentov $R_z \in \mathcal{I}_2(\mathcal{H})$, za katere je $P^* \leq R_z$ in $Q^* \leq R_z$. Za vsak tak idempotent velja $P \leq R_z^*$ in $Q \leq R_z^*$. □

Za vsak $[x] \in \mathbb{P}\mathcal{H}$ vpeljimo

$$\begin{aligned} L_{[x]} &= \{P \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \,:\, \operatorname{im} P = [x]\} = \{x \otimes y^* \,:\, \langle x, y \rangle = 1\}, \\ K_{[x]} &= \{P \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \,:\, \ker P = [x]^\perp\} = \{y \otimes x^* \,:\, \langle y, x \rangle = 1\}, \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Korak 3. *Za vsak $[x] \in \mathbb{P}\mathcal{H}$ obstaja tak $[u] \in \mathbb{P}\mathcal{K}$, da imamo bodisi $\phi\left(L_{[x]}\right) = L_{[u]}$ bodisi $\phi\left(L_{[x]}\right) = K_{[u]}$. Podobno imamo bodisi $\phi\left(K_{[x]}\right) = L_{[v]}$ bodisi $\phi\left(K_{[x]}\right) = K_{[v]}$ za nek $[v] \in \mathbb{P}\mathcal{K}$.*

Dokaz. Naj bo $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$. Dokažimo, da sta naslednji trditvi ekvivalentni:

- $\mathcal{S}$ je maksimalna podmnožica $\mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ z lastnostjo, da za vsak par $P, Q \in \mathcal{S}$ velja $P \sim Q$,
- obstaja tak $[x] \in \mathbb{P}\mathcal{H}$, da je bodisi $\mathcal{S} = L_{[x]}$ bodisi $\mathcal{S} = K_{[x]}$.

Iz drugega pogoja očitno sledi prvi. Naj bo sedaj izpolnjen prvi pogoj. Zaradi maksimalnosti je jasno, da $\mathcal{S}$ ni singleton. Izberimo torej različna $P, Q \in \mathcal{S}$. Ker je $P \sim Q$, imamo bodisi $\operatorname{im} P = \operatorname{im} Q$ bodisi $\ker P = \ker Q$. Lahko privzemo, da velja prvi pogoj, saj drugega obravnavamo povsem analogno. Naj bo $R \in \mathcal{S}$ različen od P in Q. Potem je $P \sim R$ in $Q \sim R$. Če bi imeli $\ker R = \ker Q$, bi iz $\operatorname{im} P = \operatorname{im} Q$ in $P \sim R$ sledilo $R = Q$, protislovje. Zato imamo $\ker R \neq \ker Q$, kar nam da želeni rezultat $\operatorname{im} R = \operatorname{im} Q = \operatorname{im} P$.

Dokaz zaključimo z uporabo koraka 2. □

Fiksirajmo sedaj $[u_0] \in \mathbb{P}\mathcal{K}$. Če uporabimo rezultat iz prejšnjega koraka za preslikavo $\phi^{-1} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, sklepamo, da obstaja tak $[x_0] \in \mathbb{P}\mathcal{H}$, da je bodisi $\phi\left(L_{[x_0]}\right) = L_{[u_0]}$ bodisi $\phi\left(K_{[x_0]}\right) = L_{[u_0]}$. Očitno je $L_{[x_0]} = \left\{P^* \,:\, P \in K_{[x_0]}\right\}$. Zato lahko predpostavimo, da velja $\phi\left(L_{[x_0]}\right) = L_{[u_0]}$. V nasprotnem primeru namreč uvedemo množico $\mathcal{A}^* = \{P^* \,:\, P \in \mathcal{A}\}$ in namesto ϕ obravnavamo urejenostni izomorfizem $\mathcal{A}^* \to \mathcal{B}$, podan s predpisom $P \mapsto \phi(P^*)$, $P \in \mathcal{A}^*$.

Korak 4. *Za poljubna* $[x], [y] \in \mathbb{P}\mathcal{H}$ *obstajata takšna* $[v], [w] \in \mathbb{P}\mathcal{K}$, *da je* $\phi\left(L_{[x]}\right) = L_{[v]}$ *in* $\phi\left(K_{[y]}\right) = K_{[w]}$.

Dokaz. Naj bo $[x] \in \mathbb{P}\mathcal{H}$ različen od $[x_0]$. Očitno imamo $L_{[x_0]} \cap L_{[x]} = \emptyset$. Po drugi strani, če obstaja kak idempotent v množici $L_{[x_0]} \cap K_{[x]}$, mora biti enak $\frac{1}{\langle x_0, x\rangle} x_0 \otimes x^*$. Zato je

$$L_{[x_0]} \cap K_{[x]} = \emptyset \iff x_0 \perp x. \tag{4.1.3}$$

Izberimo tak $z \in \mathcal{H}$, da je $z \not\perp x_0$ in $z \not\perp x$. Potem je $L_{[u_0]} \cap \phi\left(K_{[z]}\right) \neq \emptyset$ in $\phi\left(K_{[z]}\right) \cap \phi\left(L_{[x]}\right) \neq \emptyset$. Zato je $\phi\left(K_{[z]}\right) = K_{[z']}$ za nek $z' \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$ in $\phi\left(L_{[x]}\right) = L_{[v]}$ za nek $[v] \in \mathbb{P}\mathcal{K}$. Simetričen argument nam da željeni zaključek za $\phi\left(K_{[y]}\right)$. □

Iz zadnjega koraka sklepamo, da ϕ inducira bijektivni preslikavi $\tau, \sigma : \mathbb{P}\mathcal{H} \to \mathbb{P}\mathcal{K}$, določeni s predpisoma $\phi\left(L_{[x]}\right) = L_{\tau([x])}$, $[x] \in \mathbb{P}\mathcal{H}$, oziroma $\phi\left(K_{[y]}\right) = K_{\sigma([y])}$, $[y] \in \mathbb{P}\mathcal{K}$.

Korak 5. *Naj bo* $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ *in* $Q \in \mathcal{I}(\mathcal{H})$. *Potem imamo:*

- $x \in \operatorname{im} Q$ *natanko tedaj, ko obstaja takšen* $P \in L_{[x]}$, *da je* $P \leq Q$,
- $x \in (\ker Q)^{\perp}$ *natanko tedaj, ko obstaja takšen* $\exists P \in R_{[x]}$, *da je* $P \leq Q$.

Dokaz. Če obstaja takšen $P \in L_{[x]}$, da je $P \leq Q$, potem je $x \in \operatorname{im} P \subseteq \operatorname{im} Q$. Naj bo po drugi strani $x \in \operatorname{im} Q$. Ker $x \neq 0$, je $x \notin \ker Q = (\operatorname{im} Q^*)^{\perp}$. Zato obstaja tak $z \in \operatorname{im} Q^*$, da je $\langle x, z\rangle = 1$. Za $P = x \otimes z^*$ potem velja $P \in L_{[x]}$ in $P \leq Q$.

Za dokaz druge ekvivalence uporabimo prvo za idempotent Q^*. S tem namreč dobimo

$$x \in \operatorname{im} Q^* = (\ker Q)^{\perp} \iff \exists P \in L_{[x]} : P \leq Q^* \iff \exists P \in L_{[x]} : P^* \leq Q,$$

kar nam da natanko željeni rezultat. □

Korak 6. *Obstajata takšni bijektivni semilinearni preslikavi* $A, B : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$, *da imamo* $\tau([x]) = [Ax]$, $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, *in* $\sigma([y]) = [By]$, $y \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$.

Dokaz. Naj bodo $[x], [x_1], [x_2] \in \mathbb{P}\mathcal{H}$ paroma različni. Trdimo, da je

$$[x] \subset [x_1] + [x_2] \iff \exists P \in L_{[x]}, Q \in L_{[x_1]}, R \in L_{[x_2]}, S \in \mathcal{I}_2(\mathcal{H}) : P, Q, R \leq S.$$

Res, če je izpolnjen drugi pogoj v ekvivalenci, potem 2-razsežen prostor $\operatorname{im} S$ vsebuje $[x] = \operatorname{im} P$, $[x_1] = \operatorname{im} Q$ in $[x_2] = \operatorname{im} R$. Zato je $\dim[x, x_1, x_2] = 2$, kar nam da $[x] \subset [x_1] + [x_2]$. Naj bo sedaj $[x] \subset [x_1] + [x_2]$. Naj bo $S \in \mathcal{I}(\mathcal{H})$ poljuben idempotent z lastnostjo $\operatorname{im} S = [x_1] + [x_2]$. Ker so $x, x_1, x_2 \in \operatorname{im} S$, nam korak 5 pove, da obstajajo takšni $P \in L_{[x]}$, $Q \in L_{[x_1]}$, $R \in L_{[x_2]}$, da je $P, Q, R \leq S$.

Posledično je

$$[x] \subset [x_1] + [x_2] \iff \tau([x]) \subset \tau([x_1]) + \tau([x_2]).$$

Po izreku 2.4.2 obstaja preslikava $A : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ z zahtevanimi lastnostmi. Obstoj želene preslikave $B : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ utemeljimo z analognim argumentom. □

Korak 7. *$A \in \mathrm{BCI}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ in $A\left([x]^{\perp}\right) = [Bx]^{\perp}$ za vsak $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$.*

Dokaz. Naj bosta x in y poljubna vektorja iz $\mathcal{H} \setminus \{0\}$. Če uporabimo (4.1.3) za par x, y, dobimo $x \perp y \iff Ax \perp By$. Posledica 2.2.2 nam da želen rezultat. □

Korak 8. *Za vsak $P \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ imamo $\phi(P) = APA^{-1}$.*

Dokaz. Naj bo najprej $Q = x \otimes y^*$ poljuben idempotent ranga 1. Po definiciji preslikave τ imamo $\mathrm{im}\,\phi(Q) = \tau([x])$, kar je po koraku 6 enako $[Ax]$. Podobno je $\ker\phi(Q) = \sigma([y])^{\perp} = [By]^{\perp}$, to pa je po koraku 7 enako $A\left([y]^{\perp}\right)$. Tako imamo $\mathrm{im}\,\phi(Q) = A(\mathrm{im}\,Q)$ in $\ker\phi(Q) = A(\ker Q)$. Torej imata idempotenta $\phi(Q)$ in AQA^{-1} isto sliko ter isto jedro, zato sta enaka. □

Korak 9. *Če je $\phi(P) = APA^{-1}$, $P \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$, potem je $\phi(P) = APA^{-1}$, $P \in \mathcal{A}$.*

Dokaz. Naj bosta $P \in \mathcal{A}$ in $y \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$ poljubna. Po koraku 5 je $y \in \mathrm{im}\,\phi(P)$ natanko tedaj, ko obstaja tak $Q \in L_{[y]}$, da je $Q \leq \phi(P)$. Iz koraka 8 pa vemo, da je $\phi^{-1}(Q) = A^{-1}QA$, zato je pogoj $Q \leq \phi(P)$ ekvivalenten z $A^{-1}QA \leq P$ oziroma $Q \leq APA^{-1}$. S še eno uporabo koraka 5 sedaj dobimo $y \in \mathrm{im}\,\phi(P) \iff y \in \mathrm{im}\,APA^{-1}$ oziroma $\mathrm{im}\,\phi(P) = \mathrm{im}\,APA^{-1}$.

Uporaba druge trditve v koraku 5 pa nam da $y \in (\ker\phi(P))^{\perp}$ natanko tedaj, ko obstaja tak $Q \in R_{[y]}$, da je $Q \leq APA^{-1}$, od koder spet sklepamo $\ker\phi(P) = \ker APA^{-1}$ Torej je $\phi(P) = APA^{-1}$. □

Od zdaj naprej naj bodo izpolnjene predpostavke izreka 4.1.1. Za poljuben $P \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$ naj bo $P_{\leq} = \{Q \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H}) : Q \leq P\}$ in $P_{\geq} = \{Q \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H}) : Q \geq P\}$.

Lema 4.1.3. *Naj bo $P \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$. Potem je resnična natanko ena od naslednjih dveh trditev:*

(I) obstaja tak $A_P \in \mathrm{BCI}(\mathrm{im}\,P, \mathrm{im}\,\phi(P))$, da je

$$\phi(Q)\,x = A_P\left(Q\left(A_P^{-1}x\right)\right), \quad Q \in P_{\leq},\ x \in \mathrm{im}\,\phi(P),$$

(II) obstaja tak $A_P \in \mathrm{BCI}(\mathrm{im}\,P^*, \mathrm{im}\,\phi(P))$, da je

$$\phi(Q)\,x = A_P\left(Q^*\left(A_P^{-1}x\right)\right), \quad Q \in P_{\leq},\ x \in \mathrm{im}\,\phi(P).$$

Dokaz. Dokažimo najprej, da oba pogoja iz zaključka leme ne moreta biti izpolnjena. Predpostavimo nasprotno, da obstaja operator A, ki zadošča (I), in operator B, za katerega velja (II). Potem za vsak $Q \in P_{\leq}$ dobimo

$$A(\ker Q \cap \mathrm{im}\,P) = \ker\phi(Q) \cap \mathrm{im}\,\phi(P) = B(\ker Q^* \cap \mathrm{im}\,P^*). \tag{4.1.4}$$

Naj bo x poljuben vektor iz $\mathrm{im}\,P \setminus \{0\}$. Potem $x \notin \ker P$ in zato $(\ker P)^{\perp}$ vsebuje takšna linearno neodvisna y_1, y_2, ki ne ležita v $[x]^{\perp}$. Za $j = 1, 2$ definirajmo $Q_j = P - \frac{1}{\langle x, y_j\rangle} x \otimes y_j^*$. Ker je $\frac{1}{\langle x, y_j\rangle} x \otimes y_j^*$ idempotent s sliko $[x]$ in jedrom $[y_j]^{\perp}$, je $\frac{1}{\langle x, y_j\rangle} x \otimes y_j^* \leq P$ in posledično $Q_j \in P_{\leq}$. Preprosto je videti, da je $\ker Q_j \cap \mathrm{im}\,P = [x]$.

Ker je $Q_j^* = P^* - \frac{1}{\langle y_j, x\rangle} y_j \otimes x^*$, analogno dobimo $\ker Q_j^* \cap \operatorname{im} P^* = [y_j]$. Iz (4.1.4) tako sledi $A([x]) = B([y_j])$, kar je v protislovju z obrnljivostjo operatorja B.

Dokažimo še, da je eden izmed pogojev (I) in (II) res izpolnjen. Podprostora $\operatorname{im} P$ in $\operatorname{im} \phi(P)$ bomo obravnavali kot nova Hilbertova prostora. Elemente množice $\mathcal{I}(\operatorname{im} P)$ bomo označili s $\widetilde{Q}$ in za vsak tak element naj Q predstavlja enolično določen element iz $\mathcal{I}(\mathcal{H})$, za katerega velja $Q \le P$ in $Qx = \widetilde{Q}x$ za vse $x \in \operatorname{im} P$. Seveda lahko elemente množice $\mathcal{I}(\operatorname{im} \phi(P))$ predstavimo na isti način. Ker je

$$\widetilde{Q} \in \mathcal{I}^\infty(\operatorname{im} P) \iff \dim \operatorname{im}(P - Q) = \infty \iff P - Q \in P_{\le}, \tag{4.1.5}$$

ϕ inducira preslikavo $\psi : \mathcal{I}^\infty(\operatorname{im} P) \to \mathcal{I}^\infty(\operatorname{im} \phi(P))$, podano s predpisom

$$\psi\left(\widetilde{Q}\right) x = (\phi(P) - \phi(P - Q))\, x, \quad \widetilde{Q} \in \mathcal{I}^\infty(\operatorname{im} P), \quad x \in \operatorname{im} \phi(P).$$

Preprosto je preveriti, da je ψ urejenostni izomorfizem. Če uporabimo trditev 4.1.2 za množici $\mathcal{A} = \mathcal{I}^\infty(\operatorname{im} P) \subset \mathcal{I}(\operatorname{im} P)$ in $\mathcal{B} = \mathcal{I}^\infty(\operatorname{im} \phi(P)) \subset \mathcal{I}(\operatorname{im} \phi(P))$, dobimo $A \in \mathrm{BCI}(\operatorname{im} P, \operatorname{im} \phi(P))$, za katerega velja bodisi

$$\psi\left(\widetilde{Q}\right) = A\widetilde{Q}A^{-1}, \quad \widetilde{Q} \in \mathcal{I}^\infty(\operatorname{im} P), \tag{4.1.6}$$

bodisi

$$\psi\left(\widetilde{Q}\right) = A\widetilde{Q}^*A^{-1}, \quad \widetilde{Q} \in \mathcal{I}^\infty(\operatorname{im} P). \tag{4.1.7}$$

Opomnimo, da v zadnji enačbi $\widetilde{Q}^*$ predstavlja adjungiran operator operatorja $\widetilde{Q} : \operatorname{im} P \to \operatorname{im} P$. Sedaj ločimo dva primera. Če velja (4.1.6), potem iz definicije ψ in (4.1.5) preprosto sledi (I) za $A_P = A$. Oglejmo si še primer, ko velja (4.1.7). Definirajmo operator $T : \operatorname{im} P \to \operatorname{im} P^*$ s predpisom $Tx = P^*x$, $x \in \operatorname{im} P$. Trdimo, da je T obrnljiv. Preveriti moramo le bijektivnost T. Naj bo $T(Px) = 0$ za nek $x \in \mathcal{H}$. Potem je $P^*Px = 0$, kar nam da $\langle P^*Px, x\rangle = 0$ in posledično $Px = 0$. Torej je T injektiven. Surjektivnost pa sledi iz

$$\operatorname{im} P^* = P^*(\mathcal{H}) = P^*\left(\operatorname{im} P \oplus (\operatorname{im} P)^\perp\right) = P^*(\operatorname{im} P \oplus \ker P^*) = P^*(\operatorname{im} P).$$

Trdimo, da za vsak $\widetilde{Q} \in \mathcal{I}(\operatorname{im} P)$ velja

$$\widetilde{Q}^*x = T^{-1}(Q^*(Tx)), \quad x \in \operatorname{im} P.$$

Res, vzemimo poljubna $\widetilde{Q} \in \mathcal{I}(\operatorname{im} P)$ in $x \in \operatorname{im} P$. Glede na dekompozicijo $\mathcal{H} = \operatorname{im} P \oplus \ker P^*$ imamo

$$P^* = \begin{bmatrix} I & 0 \\ P_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad Q^* = \begin{bmatrix} \widetilde{Q}^* & 0 \\ Q_1 & 0 \end{bmatrix}$$

za ustrezna operatorja P_1 in Q_1. Iz $Q \le P$ sledi

$$Q^* \le P^*. \tag{4.1.8}$$

Tako je

$$Q^* (Tx) = Q^* P^* \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix},$$

kar je po (4.1.8) enako

$$Q^* \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{Q}^* x \\ Q_1 x \end{bmatrix}.$$

Iz (4.1.8) preprosto sledi, da je ta izraz enak

$$\begin{bmatrix} \widetilde{Q}^* x \\ P_1 \widetilde{Q}^* x \end{bmatrix} = P^* \begin{bmatrix} \widetilde{Q}^* x \\ 0 \end{bmatrix} = T\left(\widetilde{Q}^* x\right),$$

kar nam da želeni rezultat. Spet s pomočjo definicije preslikave ψ in (4.1.5) utemeljimo, da operator $A_P = AT^{-1}$ zadošča (II). $\square$

Lema 4.1.4. *Naj bosta $P, Q \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$. Če P zadošča* (I) *v lemi 4.1.3, potem:*

(i) Q zadošča (I)*,*

(ii) $A_P|_{\operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q} = \lambda A_Q|_{\operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q}$ za nek $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

Dokaz. Ločimo štiri primere.

Primer 1. *P in Q sta primerljiva.*

Dokažimo najprej (i). Pri tem ločimo dve možnosti. Če je $Q \le P$, potem imamo $Q_\le \subseteq P_\le$ in $\operatorname{im} Q \subseteq \operatorname{im} P$. Iz (I) nadalje sledi $\operatorname{im} \phi(Q) = A_P(\operatorname{im} Q)$, zato za Q velja (I) za $A_Q = A_P|_{\operatorname{im} Q}$. Naj bo sedaj $P \le Q$ in predpostavimo, da Q zadošča (II). Na isti način kot v prejšnjem primeru dobimo, da P zadošča (II) s pripadajočim operatorjem $A_Q|_{\operatorname{im} P^*}$. Ker P ne more zadoščati hkrati (I) in (II), je to protislovje. To pomeni, da Q zadošča (I).

Naj bo sedaj R manjši od idempotentov P in Q. Izberimo poljuben $U \in \operatorname{Lat}_{-1} \operatorname{im} R$ in tak $S \in R_\le$, da je $\operatorname{im} S = U$. Potem imamo $A_P(U) = \operatorname{im} \phi(S) = A_Q(U)$. Po posledici 2.2.4 velja (ii).

Primer 2. $\dim(\operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q) = \infty$ *in* $\dim(\ker P \cap \ker Q) = \infty$

Trdimo, da obstajajo takšni $P_1 \in P_\le$, $Q_1 \in Q_\le$ in $R \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$, da je

- $\operatorname{im} P_1 = \operatorname{im} Q_1 = \operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q$,
- $R \ge P_1$, $R \ge Q_1$.

Res, izberimo $U, V \in \operatorname{Lat} \mathcal{H}$, za katera je $(\operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q) \oplus U = \operatorname{im} P$ in $V \oplus (\ker P \cap \ker Q) = \ker P$. Glede za dekompozicijo

$$\mathcal{H} = (\operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q) \oplus U \oplus V \oplus (\ker P \cap \ker Q)$$

imata P in Q obliko

$$P = \begin{bmatrix} I & & & \\ & I & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{oziroma} \quad Q = \begin{bmatrix} I & Q_2 & Q_3 & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 \end{bmatrix}.$$

Potem imajo idempotenti

$$P_1 = \begin{bmatrix} I & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} I & Q_2 & Q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad R = \begin{bmatrix} I & & & \\ & I & & \\ & & I & \\ & & & 0 \end{bmatrix},$$

zgoraj zahtevane lastnosti. Iz prejšnjega primera vemo, da za P_1, R, Q_1 in Q velja (I) in $A_P|_{\operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q} = \lambda A_{P_1} = \mu A_R|_{\operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q} = \nu A_{Q_1} = \rho A_Q|_{\operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q}$ za neke λ, μ, ν, $\rho \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

Primer 3. $\dim(\operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q) = \infty$ *in* $\dim(\ker P \cap \ker Q) < \infty$

Dokažimo, da obstajajo takšni $P_1 \in P_{\leq}$, $Q_1 \in Q_{\leq}$ in $R \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$, da je

- $\operatorname{im} P_1 = \operatorname{im} Q_1 = \operatorname{im} R = \operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q$,
- $\dim(\ker P_1 \cap \ker R) = \infty$ in
- $\dim(\ker Q_1 \cap \ker R) = \infty$.

V ta namen definirajmo podprostora $U \subset \operatorname{im} P$, $V \subset \ker P$, operatorja Q_2, Q_3 in idempotenta $P_1 \in P_{\leq}$, $Q_1 \in Q_{\leq}$ na isti način kot v prejšnjem primeru. Opazimo, da je V neskončno razsežen, ker ima končno kodimenzijo v $\ker P$. Zato obstajata neskončno razsežna $V_1, V_2 \in \operatorname{Lat} \mathcal{H}$, da je $V = V_1 \oplus V_2$. Če postavimo $Q_3'|_{V_1} = Q_3|_{V_1}$ in $Q_3'|_{V_2} = 0$, je operator $Q_3' : V \to \operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q$ omejen, operatorja Q_3' in $Q_3' - Q_3$ pa imata neskončno razsežno jedro. Definirajmo

$$R = \begin{bmatrix} I & 0 & Q_3' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Potem sta

$$\ker P_1 \cap \ker R = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ u \\ v \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{H} \,:\, u \in U,\, v \in \ker Q_3',\, z \in \ker P \cap \ker Q \right\}$$

in

$$\ker Q_1 \cap \ker R \supseteq \left\{ \begin{bmatrix} -Q_3 v \\ 0 \\ v \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{H} \,:\, v \in \ker(Q_3' - Q_3) \right\}$$

neskončno razsežna. Rezultati iz prejšnjih dveh primerov nam zdaj dajo, da P_1, R, Q_1 ter Q zadoščajo (I) in $A_P|_{\operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q} = \lambda A_{P_1} = \mu A_R = \nu A_{Q_1} = \rho A_Q|_{\operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q}$ za neke λ, μ, ν, $\rho \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

Primer 4. $\dim(\operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q) < \infty$.

Označimo $U = \operatorname{im} P \in \operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H}$ in $V = \operatorname{im} Q \in \operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H}$. Najprej bomo pokazali, da obstaja tak $W \in \operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H}$, da sta $U \cap W$ in $V \cap W$ neskončno razsežna. V ta namen izberimo neničelen $u_1 \in U$. Potem obstaja neničelen $v_1 \in V \cap [u_1]^\perp$. Nadalje lahko najdemo neničelna $u_2 \in U \cap [u_1, v_1]^\perp$ in $v_2 \in V \cap [u_1, u_2, v_1]^\perp$. Nadaljujemo induktivno, na n-tem koraku izberemo $0 \neq u_n \in U \cap [u_1, \ldots, u_{n-1}, v_1, \ldots, v_{n-1}]^\perp$ in $0 \neq v_n \in V \cap [u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_{n-1}]^\perp$. Naj bo W zaprta linearna ogrinjača vektorjev $\{u_n, v_{2n}\}_{n=1}^\infty$. Očitno sta $U \cap W$ in $V \cap W$ neskončno razsežna, imamo pa tudi $W \in \operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H}$, ker $W^\perp$ vsebuje neskončno mnogo paroma pravokotnih vektorjev $\{v_{2n-1}\}_{n=1}^\infty$. Naj bo $R \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$ katerikoli idempotent s sliko $\operatorname{im} R = W + (\operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q)$. Iz rezultatov v prejšnjih dveh primerih sledi, da R in Q zadoščata (I), $A_P|_{\operatorname{im} P \cap \operatorname{im} R} = \lambda A_R|_{\operatorname{im} P \cap \operatorname{im} R}$ in $A_R|_{\operatorname{im} Q \cap \operatorname{im} R} = \mu A_Q|_{\operatorname{im} Q \cap \operatorname{im} R}$ za neka λ, $\mu \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Ker pa je $\operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q$ vsebovan v obeh, $\operatorname{im} P \cap \operatorname{im} R$ in $\operatorname{im} Q \cap \operatorname{im} R$, dobimo želeni rezultat $A_P|_{\operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q} = \lambda\mu A_Q|_{\operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q}$. □

Dokaz izreka 4.1.1. Fiksirajmo nek $P_0 \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$. Definirajmo preslikavo $\psi : \operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H} \to \operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H}$ s predpisom $\psi(P) = \phi(P^*)$, $P \in \operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H}$, ki je urejenostni avtomorfizem. Trdimo naslednje: če P_0 zadošča (II) v lemi 4.1.3, potem P_0^* zadošča (I), če v tej lemi opazujemo avtomorfizem ψ namesto ϕ. Res, naj za P_0 velja (II) in naj bosta $Q \in (P_0^*)_\leq$ ter $x \in \operatorname{im} \psi(P_0^*) = \operatorname{im} \phi(P_0)$. Potem je $Q^* \in (P_0)_\leq$ in zato po (II) velja

$$\psi(Q)\, x = \phi(Q^*)\, x = A_{P_0}\left(Q\left(A_{P_0}^{-1} x\right)\right)$$

za $A_{P_0} \in \operatorname{BCI}(\operatorname{im} P_0^*, \operatorname{im} \psi(P_0^*))$. Torej lahko brez škode za splošnost privzamemo, da P_0 zadošča (I), sicer obravnavamo par (ψ, P_0^*) namesto para (ϕ, P_0). Iz leme 4.1.4 (i) sledi, da vsi $P \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$ zadoščajo (I).

Zdaj lahko definiramo operator $A \in \operatorname{BCI}(\mathcal{H})$, za katerega velja zaključek izreka. To naredimo v nekaj korakih.

Korak 1. *Definicija operatorja $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.*

Fiksirajmo operator A_{P_0} iz (I) v lemi 4.1.3 in $x_0 \in \operatorname{im} P_0 \setminus \{0\}$. Naj bo $x \in \mathcal{H}$ poljuben. Izberimo tak $P \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$, da je $x, x_0 \in \operatorname{im} P$, in $A_P|_{\operatorname{im} P_0 \cap \operatorname{im} P} = A_{P_0}|_{\operatorname{im} P_0 \cap \operatorname{im} P}$ (po (ii) iz leme 4.1.4 lahko slednje dosežemo tako, da A_P pomnožimo z neničelnim skalarjem, če je potrebno). Definiramo $Ax := A_P x$.

Korak 2. *Operator A je dobro definiran.*

Preveriti moramo, da je definicija A neodvisna od izbire idempotenta P v prejšnjem koraku. Naj bo torej Q še en idempotent z lastnostmi, ki jih zahtevamo za P. Po lemi 4.1.4 (ii) je $A_P|_{\operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q} = \lambda A_Q|_{\operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q}$ za nek $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Ker je $A_P x_0 = A_{P_0} x_0 = A_Q x_0$, je $\lambda = 1$. Imamo $x \in \operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q$, torej $A_P x = A_Q x$.

Korak 3. *A je bodisi linearen bodisi konjugirano linearen.*

Naj bosta $x, y \in \mathcal{H}$ poljubna. Izberimo tak $P \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$, da je $x_0, x, y \in \operatorname{im} P$. Recimo, da je A_{P_0} konjugirano linearen (primer, ko je linearen, se obravnava na isti način). Potem je po (ii) tudi A_P konjugirano linearen. Zato za poljubna $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ dobimo $A(\lambda x + \mu y) = A_P(\lambda x + \mu y) = \overline{\lambda} A_P x + \overline{\mu} A_P y = \overline{\lambda} A x + \overline{\mu} A y$. Torej je A konjugirano linearen.

Korak 4. *A je bijektiven.*

Naj bo $x \in \mathcal{H}$ tak, da je $Ax = 0$. Potem je $A_P x = 0$, kjer je P tak kot v prvem koraku. Ker je A_P injektiven, je $x = 0$ in A injektiven. Naj bo sedaj $y \in \mathcal{H}$ poljuben. Ker je ϕ surjektivna, obstaja tak $P \in (P_0)_\geq$, da je $\operatorname{im} \phi(P) = [y] + \operatorname{im} \phi(P_0)$. Lema 4.1.3 nam za $P_0 \in P_\leq$ da $A_P(\operatorname{im} P_0) = \operatorname{im} \phi(P_0)$. Slednji prostor je vsebovan v $\operatorname{im} \phi(P) = A_P(\operatorname{im} P)$, zato je tudi $\operatorname{im} P_0 \subseteq \operatorname{im} P$ in posledično $x_0 \in \operatorname{im} P$. Nadalje obstaja tak $x \in \operatorname{im} P$, da je $A_P x = y$, torej $Ax = y$.

Korak 5. *A je omejen.*

Izberimo takšna $U_1, U_2 \in \operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H}$, da je $U_1 \oplus U_2 = \ker P_0$. Označimo $V_j = \operatorname{im} P_0 \oplus U_j$, $j = 1, 2$. Naj bosta $P_1, P_2 \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$ takšna, da je $\operatorname{im} P_j = V_j$, $j = 1, 2$. Potem se A po definiciji ujema z A_{P_j} na V_j, zato je omejen na V_j, $j = 1, 2$. Posledično je omejen tudi na $V_1 + V_2 = \mathcal{H}$.

Korak 6. *$\phi(P) = APA^{-1}$ za vsak $P \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$.*

Naj bosta $P \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$ in $x \in \mathcal{H}$ poljubna. Potem lahko najdemo tak $P_1 \in P_\geq$, da je $x_0, x \in \operatorname{im} P_1$. Po lemi 4.1.3 imamo $\phi(P)(A_{P_1} x) = A_{P_1}(Px)$ in zato $\phi(P) Ax = APx$, kar nam da želeni rezultat. □

4.2 Preslikave, ki ohranjajo pravokotnost

Izrek 4.2.1. *Naj bo $\phi : \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H}) \to \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$ bijektivna preslikava, za katero velja*

$$P \perp Q \iff \phi(P) \perp \phi(Q), \quad P, Q \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H}).$$

Potem obstaja tak $A \in \mathrm{BCI}(\mathcal{H})$, da imamo bodisi

$$\phi(P) = APA^{-1}, \quad P \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H}),$$

bodisi

$$\phi(P) = AP^* A^{-1}, \quad P \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H}).$$

Dokaz. Za vsak $P \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$ označimo $P^\perp = \{Q \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H}) : P \perp Q\}$. Potem za vsak par $P, Q \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$ velja $P \leq Q \iff I - Q \in P^\perp$. Trdimo, da je zadnji pogoj ekvivalenten $Q^\perp \subseteq P^\perp$. Ena smer je jasna, zato predpostavimo $I - Q \in P^\perp$. Potem za vsak $R \in Q^\perp$ velja $R \leq I - Q \leq I - P$, torej $R \in P^\perp$. Posledično je ϕ urejenostni avtomorfizem in zaključek sledi iz izreka 4.1.1. □

4.3 Preslikave, ki ohranjajo komutativnost

Izrek 4.3.1. *Naj bo $\phi : \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H}) \to \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$ takšna bijektivna preslikava, da velja*

$$PQ = QP \iff \phi(P)\phi(Q) = \phi(Q)\phi(P), \quad P, Q \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H}).$$

Potem obstajata taka orto-permutacija $\xi : \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H}) \to \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$ *in* $A \in \mathrm{BCI}(\mathcal{H})$*, da imamo bodisi*

$$\phi(P) = A\xi(P)A^{-1}, \quad P \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H}),$$

bodisi

$$\phi(P) = A\xi(P)^* A^{-1}, \quad P \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H}).$$

Pred začetkom dokazovanja izrekov potrebujemo še nekaj notacije in eno lemo. Za vsako podmnožico $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$ označimo njen komutant v $\mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$ s $\mathcal{S}'$, to je

$$\mathcal{S}' = \{Q \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H}) \,:\, QP = PQ \text{ za vsak } P \in \mathcal{S}\}.$$

Če je $\mathcal{S} = \{P\}$ množica z enim elementom, označimo krajše $\{P\}' = P'$. Drugi komutant množice $\mathcal{S}$ označimo s $\mathcal{S}''$. Nadalje naj $\#\mathcal{S}$ označuje kardinalnost množice $\mathcal{S}$.

Lema 4.3.2. *Naj bosta* $P, Q \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$*. Potem veljata naslednji trditvi:*

- $P' = Q'$ *natanko tedaj, ko je* $Q \in \{P, I-P\}$*,*
- *če imamo* $PQ = QP$ *in* $Q \notin \{P, I-P\}$*, potem je* $\#\{P,Q\}'' \in \{4,6\}$ *natnko tedaj, ko je izpolnjen natanko eden od naslednjih pogojev:* $P \perp Q$*,* $P \perp I-Q$*,* $I-P \perp Q$*,* $I-P \perp I-Q$*.*

Dokaz. Trditvi bomo dokazali simultano. V drugi trditvi P in Q komutirata po predpostavki, prvo trditev pa je tudi dovolj dokazati za komutirajoče pare, saj iz obeh pogojev $P' = Q'$ in $Q \in \{P, I-P\}$ sledi $PQ = QP$. Preprosto je videti, da za $X_1 = \mathrm{im}\,(PQ)$, $X_2 = \mathrm{im}\,(P(I-Q))$, $X_3 = \mathrm{im}\,((I-P)Q)$ in $X_4 = \mathrm{im}\,((I-P)(I-Q))$ velja $\mathcal{H} = X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_4$. Opomnimo, da so lahko kateri od teh podprostorov trivialni. Ker P in Q komutirata, sta glede na to dekompozicijo oblike

$$P = \begin{bmatrix} I & & & \\ & I & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad Q = \begin{bmatrix} I & & & \\ & 0 & & \\ & & I & \\ & & & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.3.1}$$

Zato komutanta P' in Q' sestojita natanko iz elementov $\mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$, ki so oblike

$$P' = \left\{ \begin{bmatrix} * & * & & \\ * & * & & \\ & & * & * \\ & & * & * \end{bmatrix} \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H}) \right\} \quad \text{oz.} \quad Q' = \left\{ \begin{bmatrix} * & & * & \\ & * & & * \\ * & & * & \\ & * & & * \end{bmatrix} \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H}) \right\}.$$

Od tod je preprosto preveriti, da je $P' = Q'$ natanko tedaj, ko imamo bodisi $X_2 = X_3 = \{0\}$ bodisi $X_1 = X_4 = \{0\}$. V prvem primeru imamo $Q = P$, v drugem pa $Q = I - P$. Nadalje je

$$\{P,Q\}' = \left\{ \begin{bmatrix} * & & & \\ & * & & \\ & & * & \\ & & & * \end{bmatrix} \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H}) \right\},$$

elementi drugega komutanta $\{P, Q\}''$ pa so posledično natanko idempotenti iz $\mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$ oblike

$$\begin{bmatrix} A & & & \\ & B & & \\ & & C & \\ & & & D \end{bmatrix}, \tag{4.3.2}$$

pri čemer je vsak od operatorjev A, B, C, D bodisi ničelen bodisi identičen na ustreznem podprostoru. Ločimo nekaj primerov, pri tem se pa spomnimo, da iz $Q \notin \{P, I-P\}$ sledi, da je lahko največ eden izmed prostorov X_1, X_2, X_3 in X_4 trivialen.

Primer 1. *Če je* $\dim X_j = \infty$ *za vsak* $j \in \{1,2,3,4\}$, *je* $\#\{P,Q\}'' = 14$.

Dokaz. $\{P,Q\}''$ vsebuje vse možne idempotente oblike (4.3.2), razen 0 in I. □

Primer 2. *Če je* $0 < \dim X_1 < \infty$ *in* $\dim X_4 = \infty$, *je* $\#\{P,Q\}'' = 12$.

Dokaz. Ker sta $X_1 \oplus X_2 = \operatorname{im} P$ in $X_1 \oplus X_3 = \operatorname{im} Q$ neskončno razsežna, je $\dim X_2 = \infty$ in $\dim X_3 = \infty$. Potem $\{P,Q\}''$ vsebuje vse idempotente kot v prejšnjem primeru, razen $(A,B,C,D) = (I,0,0,0)$ in $(0,I,I,I)$. □

Primer 3. *Če je* $0 < \dim X_1 < \infty$ *in* $0 < \dim X_4 < \infty$, *je* $\#\{P,Q\}'' = 8$.

Dokaz. Glede na prejšnji primer izločimo štiri možnosti: $(I,0,0,I)$, $(0,I,I,0)$, $(0,0,0,I)$ in $(I,I,I,0)$. □

Primer 4. *Če je* $X_1 = \{0\}$ *(oziroma ekvivalento* $P \perp Q$*) in* $\dim X_4 = \infty$, *potem je* $\#\{P,Q\}'' = 6$.

Dokaz. $\{P,Q\}''$ vsebuje naslednje elemente: $(B,C,D) = (I,0,0)$, $(0,I,I)$, $(0,I,0)$, $(I,0,I)$, $(0,0,I)$ in $(I,I,0)$. □

Primer 5. *Če je* $X_1 = \{0\}$ $(P \perp Q)$ *in* $0 < \dim X_4 < \infty$, *je* $\#\{P,Q\}'' = 4$.

Dokaz. Zadnji dve možnosti iz prejšnjega primera se ne pojavita. □

Katerikoli drugi primer dobimo iz obravnavanih tako, da permutiramo X_1, X_2, X_3, X_4. Pri tem opomnimo, da sta lahko X_i in X_j hkrati neskončno razsežna le v primeru, ko je bodisi $\{i,j\} = \{1,4\}$ bodisi $\{i,j\} = \{2,3\}$ (glej opombo na začetku primera 2). □

Dokaz izreka 4.3.1. Najprej opazimo, da iz prve trditve v lemi 4.3.2 sledi

$$\phi(I-P) = I - \phi(P), \quad P \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H}). \tag{4.3.3}$$

Naš cij je najti takšno orto-permutacijo $\xi : \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H}) \to \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$, da $\phi \circ \xi$ ohranja pravokotnost v obe smeri. Naj bosta P in Q takšna elementa množice $\mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$, da je $P \perp Q$ in $Q \neq I - P$. Po lemi 4.3.2 se zgodi natanko ena od naslednjih možnosti:

- $\phi(P) \perp \phi(Q)$,
- $I - \phi(P) \perp \phi(Q)$,
- $\phi(P) \perp I - \phi(Q)$,
- $I - \phi(P) \perp I - \phi(Q)$.

Po (4.3.3) so te možnosti zaporedoma ekvivalentne

- $\phi(P) \perp \phi(Q)$,
- $\phi(I - P) \perp \phi(Q)$,
- $\phi(P) \perp \phi(I - Q)$,
- $\phi(I - P) \perp \phi(I - Q)$.

Definirajmo ξ na naslednji način. Naj bo $P \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$. Izberimo tak $Q \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$, da je $Q \perp P$ in $Q \neq I - P$. Za $\xi(P)$ postavimo tisti element množice $\{P, I - P\}$, za katerega je bodisi $\phi(\xi(P)) \perp \phi(Q)$ bodisi $\phi(\xi(P)) \perp \phi(I - Q)$. Preveriti moramo, da je ξ dobro definirana, torej da je $\xi(P)$ neodvisen od izbire Q. V ta namen izberimo idempotenta $Q_1, Q_2 \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$, ki sta pravokotna na P in različna od $I - P$. Predpostavimo, da je $\phi(P) \perp \phi(Q_1)$ (ostale tri primere obravnavamo na isti način). Pokazati moramo, da velja bodisi $\phi(P) \perp \phi(Q_2)$ bodisi $\phi(P) \perp I - \phi(Q_2)$. Ker je $\phi(P) \perp \phi(Q_1)$, imamo

$$\phi(P) = \begin{bmatrix} I & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \phi(Q_1) = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & I & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

glede na dekompozicijo $\mathcal{H} = \operatorname{im}\phi(P) \oplus \operatorname{im}\phi(Q_1) \oplus (\ker\phi(P) \cap \ker\phi(Q_1))$. Ker $\phi(Q_2)$ komutira s $\phi(P)$, je glede na isto dekompozicijo oblike

$$\phi(Q_2) = \begin{bmatrix} R & \\ & S \end{bmatrix},$$

kjer sta $R : \operatorname{im}\phi(P) \to \operatorname{im}\phi(P)$ in $S : \ker\phi(P) \to \ker\phi(P)$ idempotenta. Pri tem smo upoštevali, da je $\operatorname{im}\phi(Q_1) \oplus (\ker\phi(P) \cap \ker\phi(Q_1)) = \ker\phi(P)$. Vemo, da je izpolnjena natanko ena od naslednjih možnosti: $\phi(P) \perp \phi(Q_2)$, $\phi(P) \perp I - \phi(Q_2)$, $I - \phi(P) \perp \phi(Q_2)$, $I - \phi(P) \perp I - \phi(Q_2)$. Te so zaporedoma ekvivalentne: $R = 0$, $R = I$, $S = 0$, $S = I$. Preostane pokazati, da se lahko zgodita le prvi dve možnosti. Pri tem ločimo dva primera.

Primer 1. *Q_1 in Q_2 ne komutirata.*

Potem tudi $\phi(Q_1)$ in $\phi(Q_2)$ ne komutirata, zato $S \neq 0$ in $S \neq I$.

Primer 2. *Q_1 in Q_2 komutirata.*

Potem obstaja tak $Q_3 \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$, ki je pravokoten na P in ne komutira niti s Q_1 niti s Q_2. Ker Q_3 ne komutira s Q_1, vemo iz prejšnjega primera, da je $\phi(Q_3)$ bodisi oblike

$$\begin{bmatrix} 0 & \\ & S' \end{bmatrix} \quad \text{bodisi} \quad \begin{bmatrix} I & \\ & S' \end{bmatrix}.$$

Ker pa $\phi(Q_3)$ ne komutira s $\phi(Q_2)$, imamo $S \neq 0$ in $S \neq I$. Torej je ξ dobro definirana.

Preostane pokazati, da je

$$P \perp Q \iff \phi(\xi(P)) \perp \phi(\xi(Q)).$$

Naj bosta $P, Q \in \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H})$ in $P \perp Q$. Ločimo dva primera. Predpostavimo najprej, da je $Q = I - P$. Ker ξ preslika množico $\{P, I-P\}$ bijektivno nase, imamo $\xi(Q) = I - \xi(P)$. Po (4.3.3) imamo nadalje $\phi(\xi(Q)) = I - \phi(\xi(P)) \perp \phi(\xi(P))$. Če pa je $Q \neq I - P$, potem je bodisi $\phi(\xi(P)) \perp \phi(Q)$ bodisi $\phi(\xi(P)) \perp \phi(I-Q)$. Po definiciji $\xi(Q)$ je $\phi(\xi(P)) \perp \phi(\xi(Q))$. Privzemimo sedaj, da je $\phi(\xi(P)) \perp \phi(\xi(Q))$. Obravnavajmo le netrivialni primer $\phi(\xi(Q)) \neq I - \phi(\xi(P))$. Iz leme 4.3.2 in dejstva, da je ξ orto-permutacija sledi, da se zgodi natanko ena od naslednjih možnosti: $P \perp Q$, $P \perp I - Q$, $I - P \perp Q$ ali $I - P \perp I - Q$. Četrta možnost bi nam dala $I - \phi(\xi(P)) \perp I - \phi(\xi(Q))$, kar bi nas skupaj s $\phi(\xi(P)) \perp \phi(\xi(Q))$ pripeljalo do $\phi(\xi(Q)) = I - \phi(\xi(P))$, protislovje. Na isti način bi iz tretje možnosti dobili $\phi(\xi(Q)) = 0$, iz druge pa $\phi(\xi(P)) = 0$, protislovje. Preostane želena možnost $P \perp Q$. Dokaz zaključimo z uporabo izreka 4.2.1. $\square$

Poglavje 5

Preslikave, ki ohranjajo komplementiranost

Uvod

Skozi celotno poglavje bosta $\mathcal{H}$ in $\mathcal{K}$ neskončno razsežna Hilbertova prostora nad $\mathbb{F}$. Zanimala nas bo množica neurejenih parov zaprtih podprostorov v $\mathcal{H}$, ki so komplementirani, to je $\mathcal{C}_{\mathcal{H}} = \{\{U, V\} : U, V \in \operatorname{Lat} \mathcal{H},\ U \oplus V = \mathcal{H}\}$. Tukaj direktna vsota ni nujno pravokotna. Naš cilj je karakterizirati pare bijektivnih preslikav $\phi, \psi : \operatorname{Lat} \mathcal{H} \to \operatorname{Lat} \mathcal{K}$, ki ohranjajo komplementiranost podprostorov,

$$\{U, V\} \in \mathcal{C}_{\mathcal{H}} \iff \{\phi(U), \psi(V)\} \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}, \quad U, V \in \operatorname{Lat} \mathcal{H}. \tag{5.0.1}$$

Očitno par (ϕ, ψ) zadošča (5.0.1) natanko tedaj, ko par (ψ, ϕ) zadošča (5.0.1). Nadalje, če imamo $U \in \operatorname{Lat}_n \mathcal{H}$ za nek $n \in \mathbb{Z}_\infty$ in $\{U, V\} \in \mathcal{C}_{\mathcal{H}}$, potem je $V \in \operatorname{Lat}_{-n} \mathcal{H}$. Za vsak $n \in \mathbb{Z}_\infty$ in poljubno množico $\mathcal{S} \subset \operatorname{Lat}_n \mathcal{H}$ vpeljimo

$$\mathcal{S}' = \{V \in \operatorname{Lat}_{-n} \mathcal{H} : \{U, V\} \notin \mathcal{C}_{\mathcal{H}} \text{ za vsak } U \in \mathcal{S}\}$$

in $\mathcal{S}'' = (\mathcal{S}')'$. Tukaj opomnimo, da bo na množici $\mathbb{Z}_\infty$ pripravno uporabljati naslednjo aritmetiko: $-\infty = \infty$ in $\infty \pm 1 = \infty$.

Predstavimo nekaj primerov parov preslikav, ki zadoščajo (5.0.1). Če je $A \in \operatorname{BCI}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, potem preslikave $\phi(U) = \psi(U) = A(U)$, $U \in \operatorname{Lat} \mathcal{H}$, očitno izpolnjujejo (5.0.1). Nadaljne primere dobimo, če opazimo, da je obnašanje ϕ in ψ na množicah $\operatorname{Lat}_n \mathcal{H}$ in $\operatorname{Lat}_m \mathcal{H}$ popolnoma nepovezano, če $m \neq -n$. Tako lahko definiramo ϕ in ψ na naslendji način. Naj bo $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}_\infty}$ zaporedje v $\operatorname{BCI}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Za vsak $n \in \mathbb{Z}_\infty$ in $U \in \operatorname{Lat}_n \mathcal{H}$ postavimo $\phi(U) = A_n(U)$ in $\psi(U) = A_{-n}(U)$. Potem preslikavi ϕ in ψ zadoščata (5.0.1). Naslednjo družino primerov dobimo z ortogonalnim komplementiranjem. Naj bosta $U, V \in \operatorname{Lat} \mathcal{H}$. Potem je

$$\{U, V\} \in \mathcal{C}_{\mathcal{H}} \iff \{U^\perp, V^\perp\} \in \mathcal{C}_{\mathcal{H}}. \tag{5.0.2}$$

Res, to ekvivalenco je dovolj preveriti v eno smer. Predpostavimo, da je $\mathcal{H} = U \oplus V$. Naj bo $P \in \mathcal{I}(\mathcal{H})$ tak, da je $\operatorname{im} P = U$ in $\ker P = V$. Potem je $\mathcal{H} = \ker P^* \oplus \operatorname{im} P^* = U^\perp \oplus V^\perp$. S pomočjo tega dejstva bomo skonstruirali par bijektivnih preslikav ϕ, ψ, ki zadošča (5.0.1). Razbitje množice $\mathbb{Z}_\infty$ na dve podmnožici $\mathbb{Z}_\infty = \mathbb{Z}_\infty(id) \sqcup \mathbb{Z}_\infty(\perp)$ imenujemo regularno, če za vsak $n \in \mathbb{Z}_\infty$ velja $n \in \mathbb{Z}_\infty(id) \iff -n \in \mathbb{Z}_\infty(id)$. Naj bo $\mathbb{Z}_\infty = \mathbb{Z}_\infty(id) \sqcup \mathbb{Z}_\infty(\perp)$ regularno razbitje. Potem definiramo $\phi, \psi : \operatorname{Lat}\mathcal{H} \to \operatorname{Lat}\mathcal{K}$ na naslednji način:

- če je $U \in \operatorname{Lat}_n \mathcal{H}$ za nek $n \in \mathbb{Z}_\infty(id)$, potem je $\phi(U) = \psi(U) = U$;
- če je $U \in \operatorname{Lat}_n \mathcal{H}$ za nek $n \in \mathbb{Z}_\infty(\perp)$, potem je $\phi(U) = \psi(U) = U^\perp$.

Tak par očitno izpolnjuje (5.0.1). Naš glavni izrek pove, da je vsak par ϕ, ψ, ki zadošča (5.0.1), kompozicija parov preslav, opisanih v zadnjih dveh primerih.

Opomnimo še, da iz (5.0.1) in (5.0.2) dobimo ekvivalenco

$$\{U, V\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H} \iff \{\phi(U^\perp)^\perp, \psi(V^\perp)^\perp\} \in \mathcal{C}_\mathcal{K}, \quad U, V \in \operatorname{Lat}\mathcal{H}, \tag{5.0.3}$$

ki se bo izkazala za uporabno.

Motivacija pri našem raziskovanju je dvojna. Označimo z $G(m, m+n)$, $m, n > 1$, Grassmannov prostor m-razsežnih podprostorov $(m+n)$-razsežnega vektorskega prostora X. Za elementa $U, V \in G(m, m+n)$ rečemo, da sta sosednja, če je $\dim(U \cap V) = m - 1$ (oziroma ekvivalentno, $\dim(U + V) = m + 1$). Z X' označimo dualni prostor prostora X. Za $U \in G(m, m+n)$ naj bo $U^\perp = \{f \in X' : \ker f \supseteq U\}$. Klasičen Chowov izrek [11, Theorem I.] pove naslednje.

Izrek 5.0.3 (Chow)**.** *Naj bo $\phi : G(m, m+n) \to G(m, m+n)$ bijektivna preslikava, za katero velja*

$$U, V \text{ sta sosednja} \iff \phi(U), \phi(V) \text{ sta sosednja.}$$

Potem velja ena od neslednjih trditev:

- *$\phi(U) = A(U)$, $U \in G(m, n+m)$, za neko bijektivno semilinearno preslikavo $A : X \to X$,*
- *$m = n$ in $\phi(U) = A(U^\perp)$, $U \in G(m, n+m)$, za neko bijektivno semilinearno preslikavo $A : X' \to X$.*

Za različna podprostora X z dimenzijo $\frac{\dim X}{2}$ je ena skrajna medsebojna lega sosednost, druga pa komplementiranost. To motivira Bluncka in Havlicka [5] za raziskovanje takšnih bijektivnih preslikav ϕ na $G(m, 2m)$, da za vsak par $U, V \in G(m, 2m)$ velja $X = U \oplus V \iff X = \phi(U) \oplus \phi(V)$. Dokazala sta, da takšne preslikave ohranjajo sosednost, zato lahko uporabimo Chowov izrek za njihov opis. Do neke mere sta obravnavala tudi neskončno razsežen primer. Poudarila sta, da se le z njunimi orodji ne da priti do končnega rezultata. Ta opažanja zagotovo naredijo neskončno razsežen primer zanimiv za raziskovanje. Pri tem imamo dve možnosti, da delamo bodisi v algebraičnem okolju bodisi v okolju normiranih prostorov, kjer je vključena analiza. Naravno se je omejiti na Hilbertove prostore, saj nam izrek [42, Theorem 1] pove, da je Banachov prostor Hilbertov, če so vsi njegovi zaprti podprostori komplementirani. Menimo, da je druga možnost bolj zanimiva, kasneje bomo pa videli, da je tudi pomembna zaradi uporabnosti rezultatov. Če bi se problema lotili po zgledu Bluncka in Havlicka, bi se omejili na bijektivne preslikave na množici zaprtih podprostorov z neskončno dimenzijo in neskončno kodimenzijo. Za takšno omejitev pa nimamo pravega razloga. Zato proučujemo celotno mrežo zaprtih podprostorov. Seveda to naredi problem težji, saj moramo najprej dokazati nekoliko presenetljivo dejstvo, da se končno razsežni podprostori z dimenzijo m preslikajo v podprostore, ki imajo bodisi dimenzijo bodisi kodimenzijo enako m. Prostori z neskončno dimenzijo in neskončno kodimenzijo se preslikajo v podprostore iste vrste. Nadalje lahko vsakemu paru komplementiranih podprostorov priredimo par idempotentnih operatorjev iz $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, katerih sliki in jedra so enaki kateremu od teh dveh podprostorov. Ta opazka nas pripelje do druge motivacije za naše raziskovanje. Kot lahko posledico našega glavnega rezultata bomo namreč predstavili opis bijektivnih preslikav na množici $\mathcal{I}(\mathcal{H})$, ki ohranja enakost slik in enakost jeder. Dokazali bomo tudi dualno obliko tega rezultata. Zaradi teh dveh posledic je bolj naravno delati s parom preslikav kot z eno samo preslikavo, ki ohranja komplementiranost na $\operatorname{Lat}\mathcal{H}$. Ko opišemo preslikave, ki ohranjajo enakost slik in enakost jeder, lahko na nov način dokažemo vrsto karakterizacij preslikav na $\mathcal{I}(\mathcal{H})$. To demonstriramo na dveh primerih.

Prvi primer je modifikacija dokaza izreka 4.0.1, ki ima močno motivacijo v matematični fiziki. Motivacija za drugi primer pa so 2-lokalni avtomorfizmi, ki smo jih omenili že v uvodu prvega poglavja. Če je S kolobar in $\phi : S \to S$ 2-lokalni avtomorfizem, potem ϕ preslika vsak idempotent v nek idempotent. Jasno je tudi, da je za vsak par idempotentov $p, q \in S$ produkt pq neničelen idempotent natanko tedaj, ko isto velja za $\phi(p)\phi(q)$. Študij takšnih preslikav je motiviran z dobro razvito teorijo aditivnih, linearnih in multiplikativnih ohranjevalcev, glej [13, 35, 55] in tamkajšnje reference. Poglavje zaključimo z izrekom o opisu bijektivnih preslikav na $\mathcal{I}(\mathcal{H})$, ki ohranjajo neničelno idempotentnost produktov.

Vsebina poglavja je povzeta po [59].

5.1 Preslikave na $\operatorname{Lat}\mathcal{H}$

Ta razdelek je posvečen glavnemu rezultatu poglavja. Začnemo z nekaj definicijami.

Za $U, V \in \operatorname{Lat}\mathcal{H}$ označimo $U \ominus V = U \cap V^{\perp}$. Pravimo, da sta U in V *sosednja*, če je $\dim U \ominus (U \cap V) = \dim V \ominus (U \cap V) = 1$. Opazimo, da je to ekvivalentno z $\dim(U+V) \ominus U = \dim(U+V) \ominus V = 1$ in se lahko zgodi le, če je $U, V \in \operatorname{Lat}_n \mathcal{H}$ za nek $n \in \mathbb{Z}_\infty$. Če sta U in V sosednja, označimo $U \sim V$. Ko $n \neq \infty$, se definicija poenostavi v: $U \sim V \iff U \cap V \in \operatorname{Lat}_{n-1}\mathcal{H} \iff U + V \in \operatorname{Lat}_{n+1}\mathcal{H}$.

Naj bosta U in V različna elementa $\operatorname{Lat}_n \mathcal{H}$ za nek $n \in \mathbb{Z}_\infty \setminus \{0\}$, k pa naravno število. Zaporedje $U_0, U_1, \ldots, U_k \in \operatorname{Lat}_n \mathcal{H}$ je sosednostna veriga med U in V, če je $U_0 = U$, $U_k = V$ in $U_j \sim U_{j+1}$ za vse $j = 0, \ldots, k-1$. Številu k pravimo dolžina verige.

Sledi nekaj lem o množicah paroma sosednjih podprostorov, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju.

Lema 5.1.1. *Naj bo $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_\infty \setminus \{0\}$ in $U_0, U_1, \ldots, U_k \in \operatorname{Lat}_n \mathcal{H}$ sosednostna veriga. Potem je $\dim U_j \ominus (U_0 \cap U_1 \cap \ldots \cap U_k)$ neodvisna od j in*

$$0 < \dim U_j \ominus (U_0 \cap U_1 \cap \ldots \cap U_k) \leq k, \quad j = 0, \ldots, k.$$

Dokaz. Za vsak $j \in \{0, 1, \dots, k\}$ definirajmo

$$V_j = U_j \ominus (U_0 \cap U_1 \cap \dots \cap U_k).$$

Naj bo $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. Potem iz $V_j \cap V_{j+1} = (U_j \cap U_{j+1}) \ominus (U_0 \cap \dots \cap U_k)$ sledi

$$V_j \ominus (V_j \cap V_{j+1}) = U_j \ominus ((U_0 \cap \dots \cap U_k) + ((U_j \cap U_{j+1}) \ominus (U_0 \cap \dots \cap U_k))) = U_j \ominus (U_j \cap U_{j+1}).$$

Pri tem zadnja enakost velja, ker je $U_0 \cap \dots \cap U_k \subset U_j \cap U_{j+1}$. Analogno dobimo $V_{j+1} \ominus (V_j \cap V_{j+1}) = U_{j+1} \ominus (U_j \cap U_{j+1})$. Ker sta U_j in U_{j+1} sosednja, to velja tudi za V_j in V_{j+1}. Posledično je $\dim V_j = \dim V_{j+1}$, zato preostane pokazati, da je $\dim V_0 \leq k$. V ta namen za vsak $j = 0, \dots, k-1$ izberimo $u_j \in U_j \setminus \{0\}$, za katerega je $U_j \cap U_{j+1} = U_j \ominus [u_j]$. Naj bo $P \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ projektor na U_0. Potem ima

$$\begin{aligned} V_0 = U_0 \ominus ((U_0 \cap \dots \cap U_{k-1}) \ominus [u_{k-1}]) = \dots \\ = U_0 \ominus (U_0 \ominus [u_0, \dots, u_{k-1}]) = [Pu_0, \dots, Pu_{k-1}] \end{aligned}$$

dimenzijo največ k. Ta dimenzija je pozitivna, ker je $Pu_0 = u_0 \neq 0$. $\square$

Naj bo $\Gamma(\mathcal{H})$ graf, katerega množica točk je $\operatorname{Lat}\mathcal{H}$, točki pa sta povezani, če velja $U \sim V$. Za $U, V \in \operatorname{Lat}\mathcal{H}$ naj $d(U, V)$ označuje razdaljo med U in V v grafu $\Gamma(\mathcal{H})$, torej dolžino najkrajše sosednostne verige med U in V. Če med U in V ne obstaja nobena sosednostna veriga, definiramo $d(U, V) = \infty$.

Lema 5.1.2. *Naj bosta $U, V \in \operatorname{Lat}\mathcal{H}$ in $d \in \mathbb{N}$. Potem je*

$$d(U, V) = d \iff \dim U \ominus (U \cap V) = \dim V \ominus (U \cap V) = d.$$

Dokaz. Predpostavimo najprej, da je $\dim U \ominus (U \cap V) = \dim V \ominus (U \cap V) = d$. Postavimo $U_0 = U$ in $U_d = V$. Če je $d = 1$, je $U \sim V$, zato je dokaz končan. Če je $d > 1$, izberimo bazo $u_1, \dots, u_d$ prostora $U \ominus (U \cap V)$ in bazo $v_1, \dots, v_d$ prostora $V \ominus (U \cap V)$. Za vsak $j \in \{1, \dots, d-1\}$ definiramo $U_j = [v_1, \dots, v_j, u_{j+1}, \dots, u_d] \oplus (U \cap V)$. Potem je $U_0, U_1, \dots, U_d$ sosednostna veriga med U in V, kar pomeni, da je $d(U, V) \leq d$. Naj bo $r \in \mathbb{N}$ in $V_0, \dots, V_r$ sosednostna veriga med U in V. Po lemi 5.1.1 imamo $r \geq \dim U \ominus (V_0 \cap V_1 \cap \dots \cap V_r) \geq \dim U \ominus (U \cap V) = d$, kar nam da $d(U, V) = d$.

Privzemimo sedaj, da velja $d(U, V) = d$. Naj bo $U_0, U_1, \dots, U_d$ sosednostna veriga med U in V. Potem je

$$U \ominus (U \cap V) = (U \ominus (U_0 \cap \dots \cap U_d)) \ominus ((U \cap V) \ominus (U_0 \cap \dots \cap U_d)).$$

Ker analogen račun velja tudi za $V \ominus (U \cap V)$, nam lema 5.1.1 pove, da je $\dim U \ominus (U \cap V) = \dim V \ominus (U \cap V) \leq d - \dim (U \cap V) \ominus (U_0 \cap \dots \cap U_d) \leq d$. Ampak dimenziji prostorov $U \ominus (U \cap V)$ in $V \ominus (U \cap V)$ morata biti enaki d. Če bi namreč bili enaki $d_1 < d$, bi lahko uporabili prvi del dokaza leme in našli sosednostno verigo med U in V dolžine d_1, kar bi nasprotovalo $d(U, V) = d$. $\square$

Ko bomo v nadaljevanju govorili o povezanih podmnožicah in komponentah množice $\operatorname{Lat}\mathcal{H}$, bomo imeli v mislih podgrafe oziroma komponente za povezanost grafa $\Gamma(\mathcal{H})$. Za vsako povezano podmožico $\mathcal{S} \subset \operatorname{Lat}\mathcal{H}$ naj

$$\operatorname{diam}\mathcal{S} = \sup\{d(U, V) \,:\, U, V \in \mathcal{S}\} \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$$

predstavlja njen diameter.

Posledica 5.1.3. *Za vsak* $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *je* $\mathrm{Lat}_n\,\mathcal{H}$ *komponenta* $\mathrm{Lat}\,\mathcal{H}$ *z diametrom* $|n|$. *Vsaka komponenta* $\mathrm{Lat}\,\mathcal{H}$*, ki je vsebovana v* $\mathrm{Lat}_\infty\,\mathcal{H}$*, ima diameter* ∞.

Dokaz. Naj bosta $U, V \in \mathrm{Lat}_n\,\mathcal{H}$ različna. Če je $n > 0$, imamo $\dim U \ominus (U \cap V) = \dim V \ominus (U \cap V) = n - \dim(U \cap V) \leq n$, medtem ko v primeru $n < 0$ velja $\dim U \ominus (U \cap V) = \dim V \ominus (U \cap V) = |n| - \dim\left(U^\perp \cap V^\perp\right) \leq |n|$. V obeh primerih iz leme 5.1.2 sledi $d\,(U, V) \leq |n|$. Po isti lemi je $d\,(U, V) = |n|$, če imamo $n > 0$ in $U \cap V = \{0\}$ ali pa $n < 0$ in $U^\perp \cap V^\perp = \{0\}$. Zato je $\mathrm{Lat}_n\,\mathcal{H}$ povezana množica z diametrom $|n|$. Jasno je tudi, da je $\mathrm{Lat}_n\,\mathcal{H}$ cela komponenta, saj imata poljubna $U, V \in \mathrm{Lat}\,\mathcal{H}$, ki sta sosednja, isto dimenzijo in isto kodimenzijo v $\mathcal{H}$.

Naj bo sedaj $U \in \mathrm{Lat}_\infty\,\mathcal{H}$ poljuben. Če je d katerokoli naravno število, potem lahko izberemo taka $W \in \mathrm{Lat}_\infty\,\mathcal{H}$ in $V \in \mathrm{Lat}_d\,\mathcal{H}$, da je $W \subset U$, $\dim U \ominus W = d$ ter $U \cap V = \{0\}$. Potem je $d\,(U, W \oplus V) = d$, kar nam pove, da imajo vse komponente $\mathrm{Lat}\,\mathcal{H}$, ki so vsebovane v $\mathrm{Lat}_\infty\,\mathcal{H}$, diameter ∞. $\square$

Lema 5.1.4. *Če so* $U_1, U_2, U_3 \in \mathrm{Lat}\,\mathcal{H}$ *paroma sosednji, potem so vsebovani bodisi v* $\mathcal{A}_{U_1 \cap U_2 \cap U_3}$ *bodisi v* $\mathcal{B}_{U_1 + U_2 + U_3}$.

Dokaz. Označimo $U = U_1 \cap U_2 \cap U_3$. Lema 5.1.1 nam pove, da je $\dim U_1 \ominus U = \dim U_2 \ominus U = \dim U_3 \ominus U \in \{1, 2\}$. Če so te dimenzije enake 1, imamo $U_j \in \mathcal{A}_U$, $j = 1, 2, 3$. Predpostavimo, da so enake 2. Ker je $U_1 \sim U_2$, obstajajo takšni linearno neodvisni $u_1, u_2, u_3 \in \mathcal{H}$, da je $U_1 = U \oplus [u_1, u_2]$ in $U_2 = U \oplus [u_1, u_3]$. Iz $U_3 \sim U_j$, $j = 1, 2$, sledi, da je $U_3 = U \oplus [v_1, v_2]$ za neka linearno neodvisna $v_1 \in [u_1, u_2]$ in $v_2 \in [u_1, u_3]$. Zato $U_1 + U_2 + U_3 = U \oplus [u_1, u_2, u_3]$ vsebuje U_j kot hiperravnino za $j = 1, 2, 3$. $\square$

Za vsak $U \in \mathrm{Lat}\,\mathcal{H} \setminus \{\mathcal{H}\}$ označimo

$$\mathcal{A}_U = \{V \in \mathrm{Lat}\,\mathcal{H} \,:\, V \supset U,\, \dim V \ominus U = 1\} = \{U \oplus [x] \,:\, x \in U^\perp \setminus \{0\}\}$$

za vsak $U \in \mathrm{Lat}\,\mathcal{H} \setminus \{\{0\}\}$ pa

$$\mathcal{B}_U = \{V \in \mathrm{Lat}\,\mathcal{H} \,:\, V \subset U,\, \dim U \ominus V = 1\} = \{U \ominus [x] \,:\, x \in U \setminus \{0\}\}.$$

Opazimo, da je

$$\mathcal{B}_U = \{V \in \mathrm{Lat}\,\mathcal{H} \,:\, V^\perp \in \mathcal{A}_{U^\perp}\}. \tag{5.1.1}$$

Podmnožici $\mathcal{S} \subset \mathrm{Lat}\,\mathcal{H}$ pravimo maksimalna sosednostna množica, če sta njena poljubna različna elementa sosednja in je maksimalna med vsemi takšnimi množicami.

Lema 5.1.5. *Maksimalne sosednostne podmnožice* $\mathrm{Lat}\,\mathcal{H}$ *so natanko množice oblike*

- $\{\{0\}\}$ *in* $\{\mathcal{H}\}$,
- $\mathcal{A}_W$ *za nek* $W \in \mathrm{Lat}\,\mathcal{H}$*, za katerega je* $\dim W^\perp \geq 3$,
- $\mathcal{B}_Z$ *za nek* $Z \in \mathrm{Lat}\,\mathcal{H}$*, za katerega je* $\dim Z \geq 3$.

Dokaz. Jasno so zgoraj naštete množice sosednostne. Pokažimo, da je v primeru $\dim W^\perp \geq 3$, $\mathcal{A}_W$ maksimalna sosednostna množica. Če je $W = \{0\}$, je to očitno, saj je $\mathcal{A}_W = \mathrm{Lat}_1 \mathcal{H}$. Če pa $W \neq \{0\}$, izberimo tak $U \in \mathrm{Lat}\,\mathcal{H} \setminus \mathcal{A}_W$, ki leži v isti komponenti $\mathrm{Lat}\,\mathcal{H}$ kot $\mathcal{A}_W$. Našli bomo tak $V \in \mathcal{A}_W$, da $V \not\sim U$. Izberimo $U_1, U_2 \in \mathcal{A}_W$. Če kateri od njiju ni soseden z U, smo zaključili. Predpostavimo po drugi strani, da $U_j \sim U$, $j = 1, 2$. Potem so U, U_1, U_2 paroma sosedni, zato nam lema 5.1.4 pove, da so vsebovani bodisi v $\mathcal{A}_{U\cap W}$ bodisi v $\mathcal{B}_{U+U_1+U_2}$. Ker $U \notin \mathcal{A}_W$, je $U \cap W$ strogo vsebovan v W in ima posledično kodimenzijo vsaj 2 v U_1. Torej je $U, U_1, U_2 \in \mathcal{B}_{U+U_1+U_2}$. Opomnimo, da je množica oblike $\mathcal{A}_W$, $W \neq \mathcal{H}$, vsebovana v množici oblike $\mathcal{B}_Z$, $Z \neq \{0\}$, le v primeru $\dim W^\perp = 2$, $Z = \mathcal{H}$. Ker pa je $\dim W^\perp \geq 3$, torej obstaja tak $V \in \mathcal{A}_W$, ki ne leži v $\mathcal{B}_{U+U_1+U_2}$. Če bi bila V in U sosednja, bi bili V, U, U_1 paroma sosednji in posledično vsebovani bodisi v $\mathcal{A}_W$ bodisi v $\mathcal{B}_{U+U_1}$. Prva trditev ne drži, ker $U \notin \mathcal{A}_W$, druga pa ne, saj $V \notin \mathcal{B}_{U+U_1} = \mathcal{B}_{U+U_1+U_2}$. Zato dobimo želeni rezultat $U \not\sim V$, ki pove, da je $\mathcal{A}_W$ maksimalna.

Predpostavimo sedaj, da je $\dim Z \geq 3$. Vemo že, da je $\mathcal{A}_{Z^\perp}$ maksimalna sosednostna množica. Iz (5.0.2) in (5.1.1) sklepamo, da je tudi $\mathcal{B}_Z$ maksimalna sosednostna množica.

Naj bo sedaj $\mathcal{S} \subset \mathrm{Lat}\,\mathcal{H}$ sosednostna množica. Če je $\mathcal{S}$ singleton, potem je enak bodisi $\{\{0\}\}$ bodisi $\{\mathcal{H}\}$ ali pa je vsebovan v kakšni sosednostni množici z dvema elementoma. Naj ima $\mathcal{S}$ vsaj dva elementa in recimo, da ni vsebovana niti v $\mathrm{Lat}_1 \mathcal{H} = \mathcal{A}_{\{0\}}$ niti v $\mathrm{Lat}_{-1} \mathcal{H} = \mathcal{B}_{\mathcal{H}}$. Pokazati mnoramo, da je vsebovana v kakšni množici oblike $\mathcal{A}_W$, $W \neq \{0\}$, $\dim W^\perp \geq 3$ ali pa v kakšni oblike $\mathcal{B}_Z$, $Z \neq \mathcal{H}$, $\dim Z \geq 3$. Če je $\mathcal{S} = \{U_1, U_2\}$ za neka različna $U_1, U_2 \in \mathrm{Lat}\,\mathcal{H}$, $\dim U_1 = \dim U_2 > 1$, potem je $\dim (U_1 + U_2) \geq 3$ in $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}_{U_1+U_2}$. Če ima $\mathcal{S}$ tri elemente, želen zaključek sledi iz leme 5.1.4. Privzemimo sedaj, da ima množica $\mathcal{S}$ več kot tri elemente in ni vsebovana v nobeni množici oblike $\mathcal{A}_W$, $\dim W^\perp \geq 3$. Izberimo $U_1, U_2 \in \mathcal{S}$. Iz $\mathcal{S} \not\subseteq \mathrm{Lat}_{-1} \mathcal{H}$ sledi $\dim (U_1 \cap U_2)^\perp \geq 3$. Zato obstaja tak $U_3 \in \mathcal{S}$, da $U_3 \notin \mathcal{A}_{U_1\cap U_2}$. Označimo $Z = U_1 + U_2 + U_3$, ki ima dimenzijo vsaj 3, saj so U_1, U_2 in U_3 vsaj 2-razsežni. Nadalje sklepamo iz leme 5.1.4, da je $U_j \in \mathcal{B}_Z$, $j = 1, 2, 3$. Naj bo U poljuben element množice $\mathcal{S}$, ki je različen od U_1, U_2 in U_3. Trdimo, da U ni element vsaj ene od množic $\mathcal{A}_{U_1\cap U_2}$ in $\mathcal{A}_{U_1\cap U_3}$. Res, če bi U ležal v obeh, bi vseboval $(U_1\cap U_2)+(U_1\cap U_3)$ kot podprostor. Ampak $U_1\cap U_2$ sta $U_1\cap U_3$ hiperravnini v U_1 in sta različni, ker $U_3 \in \mathcal{A}_{U_1\cap U_3}$ in $U_3 \notin \mathcal{A}_{U_1\cap U_2}$. Tako bi bilo $U \supseteq (U_1\cap U_2)+(U_1\cap U_3) = U_1$, protislovje. Ker je $U_1 + U_2 = U_1 + U_3 = Z$, v obeh primerih $U \notin \mathcal{A}_{U_1\cap U_j}$, $j = 2, 3$, lema 5.1.4 pove, da je $U \in \mathcal{B}_Z$. S tem je dokaz zaključen. $\square$

Naj bo $n \in \mathbb{Z}_\infty \setminus \{0\}$, r pa naravno število večje od 1. Preučevali bomo množice oblike $\{U_1, \ldots, U_r\}''$, kjer so $U_1, \ldots, U_r \in \mathrm{Lat}_n \mathcal{H}$. Spomnimo se, da je $U \in \mathrm{Lat}_n \mathcal{H}$ vsebovan v $\{U_1, \ldots, U_r\}''$ natanko tedaj, ko za vsak $V \in \mathrm{Lat}_{-n} \mathcal{H}$ iz

$$\{U_j, V\} \notin \mathcal{C}_{\mathcal{H}}, \quad j = 1, \ldots, r, \tag{5.1.2}$$

sledi

$$\{U, V\} \notin \mathcal{C}_{\mathcal{H}}. \tag{5.1.3}$$

Nadaljujemo z nekaj enostavnimi trditvami, ki bodo bralcu pomagale pri razumevanju dokaza glavnega izreka. V teh trditvah fiksiramo n, r in paroma različne $U_1, \ldots, U_r$ kot zgoraj.

Lema 5.1.6. *Naj bo* $U \in \{U_1, \dots, U_r\}''$, $V \in \mathrm{Lat}\,\mathcal{H}$ *pa tak končno razsežen podprostor, da je* $V \cap U_j \neq \{0\}$ *za vsak* $j = 1, \dots, r$. *Potem je* $V \cap U \neq \{0\}$.

Dokaz. Predpostavimo nasprotno, da je $V \cap U = \{0\}$. Očitno je $U \oplus V$ zaprt podprostor v $\mathcal{H}$, $(U \oplus V)^\perp \cap V = \{0\}$ in $V \oplus (U \oplus V)^\perp \in \mathrm{Lat}_{-n}\,\mathcal{H}$. Podprostor $V \oplus (U \oplus V)^\perp$ zadošča (5.1.2) zaradi predpostavke $V \cap U_j \neq \{0\}$, $j = 1, \dots, r$. Po drugi strani je $\mathcal{H} = (U \oplus V) \oplus (U \oplus V)^\perp = U \oplus \big(V \oplus (U \oplus V)^\perp\big)$, zato $V \oplus (U \oplus V)^\perp$ ne zadošča (5.1.3). Protislovje. $\square$

Posledica 5.1.7. *Naj bo* $U \in \{U_1, \dots, U_r\}''$. *Potem je*

$$U_1 \cap \ldots \cap U_r \subset U \subset \overline{U_1 + \ldots + U_r}.$$

Dokaz. Za dokaz prve inkluzije izberimo neničelen $v \in U_1 \cap \ldots \cap U_r$ in uporabimo prejšnjo lemo za $V = [v]$. Dobimo $v \in U$, torej $U_1 \cap \ldots \cap U_r \subset U$. Iz (5.0.2), (5.1.2) in (5.1.3) sledi, da je $U^\perp \in \{U_1^\perp, \dots, U_r^\perp\}''$. Zato po ravno dokazanem velja $(U_1 + \ldots + U_r)^\perp = U_1^\perp \cap \ldots \cap U_r^\perp \subset U^\perp$, kar nam da $U \subset \overline{U_1 + \ldots + U_r}$. $\square$

Lema 5.1.8. *Če je* $U_1, \dots, U_r \in \mathcal{A}_W$ *za nek* $W \in \mathrm{Lat}_{n-1}\,\mathcal{H}$, *potem je*

$$\{U_1, \dots, U_r\}'' = \{U \in \mathcal{A}_W \,:\, U \subset U_1 + \ldots + U_r\}.$$

Dokaz. Predpostavimo, da je $U \in \{U_1, \dots, U_r\}''$. Ker je $U_1 + \ldots + U_r$ zaprt, iz prejšnje posledice dobimo $W \subset U \subset U_1 + \ldots + U_r$. Dokazati moramo, da je $\dim(U \ominus W) = 1$.

Izberimo tak $\widetilde{U} \in \mathrm{Lat}\,\mathcal{H}$, da je

$$U_1 + \ldots + U_r = U \oplus \widetilde{U}.$$

Seveda je $\widetilde{U}$ končno razsežeen. Ker je $\mathcal{H} = (U \oplus \widetilde{U}) \oplus (U_1 + \ldots + U_r)^\perp$, podprostor $V = \widetilde{U} \oplus (U_1 + \ldots + U_r)^\perp$ ne zadošča (5.1.3), posledično pa imamo $\mathcal{H} = U_j \oplus V = (U_j \oplus \widetilde{U}) \oplus (U_1 + \ldots + U_r)^\perp$ za nek $j \in \{1, \dots, r\}$. Ker sta U_j in $\widetilde{U}$ vsebovana v $U_1 + \ldots + U_r$, sklepamo, da je

$$U_j \oplus \widetilde{U} = U_1 + \ldots + U_r = U \oplus \widetilde{U},$$

kar nam pove, da imata U_j in U isto končno kodimenzijo v $U_1 + \ldots + U_r$. Sledi želeni rezultat $\dim(U \ominus W) = \dim(U_j \ominus W) = 1$.

Za dokaz obratne inkluzije najprej izberimo takšne neničelne $u_j \in W^\perp$, da je

$$U_j = W \oplus [u_j], \quad j = 1, \dots, r.$$

Naj bo $U \in \mathcal{A}_W$ takšen, da je $U \subset U_1 + \ldots + U_r$. Dokazati moramo, da za vsak $V \in \mathrm{Lat}_{-n}\,\mathcal{H}$, za katerega je $\mathcal{H} = U \oplus V$ (z drugimi besedami, V ne zadošča (5.1.3)), obstaja tak $j \in \{1, \dots, r\}$, da je $\mathcal{H} = U_j \oplus V$.

Dokažimo, da je $U_j \cap V = \{0\}$ za nek j. Predpostavimo nasprotno, da za vsak $j \in \{1, \dots, r\}$ obstaja neničelen $v_j \in U_j \cap V$. Imamo $W \cap [v_1, \dots, v_r] = \{0\}$. Vemo tudi, da je $W \cap [u_1, \dots, u_r] = \{0\}$, ker je $[u_1, \dots, u_r]$ podprostor v $W^\perp$. Za vsak $j = 1, \dots, r$ je $v_j \in (W \oplus [u_j]) \setminus W$ in zato tudi $u_j \in W \oplus [v_j]$, kar nam da

$$U_1 + \ldots + U_r = W \oplus [u_1, \dots, u_r] = W \oplus [v_1, \dots, v_r].$$

Ker je $W \subset U \subset U_1 + \ldots + U_r$ in $W \neq U$, dobimo $U \cap [v_1, \ldots, v_r] \neq \{0\}$, kar nasprotuje $\mathcal{H} = U \oplus V$.

Torej obstaja tak $j \in \{1, \ldots, r\}$, da je $U_j \cap V = \{0\}$. Ker je $\mathcal{H} = U \oplus V$, imamo $u_j = u + v$ za neka $u \in U$ in $v \in V$. Ločimo dva primera.

Če je $u \in U_j$, iz $U_j \cap V = \{0\}$ sledi $u = u_j$, kar nam da $U = U_j \in \{U_1, \ldots, U_r\}''$. V tem primeru je dokaz zaključen.

Če pa je $u \notin U_j$, je tudi $u \notin W$ in zato $W \oplus [u] = U$. Sledi

$$U_j + V = W + [u_j] + V = W + [u] + V = U + V = \mathcal{H}.$$

□

Posledica 5.1.9. *Če je $U_1, \ldots, U_r \in \mathcal{B}_Z$ za nek $Z \in \operatorname{Lat}_{n+1} \mathcal{H}$, potem je*

$$\{U_1, \ldots, U_r\}'' = \{U \in \mathcal{B}_Z \, : \, U_1 \cap \ldots \cap U_r \subset U\}.$$

Dokaz. Naj bo $U \in \operatorname{Lat}_n \mathcal{H}$. Po (5.0.2) je $U \in \{U_1, \ldots, U_r\}''$ natanko tedaj, ko je $U^\perp \in \{U_1^\perp, \ldots, U_r^\perp\}''$. Iz (5.1.1) sledi, da je $U_j^\perp \in \mathcal{A}_{Z^\perp}$, $j = 1, \ldots, r$. Po lemi 5.1.8 je torej $U \in \{U_1, \ldots, U_r\}''$ natanko tedaj, ko je $U^\perp \in \mathcal{A}_{Z^\perp}$ in $U^\perp \subset (U_1^\perp + \ldots + U_r^\perp) = (U_1 \cap \ldots \cap U_r)^\perp$. Za zaključek dokaza še enkrat uporabimo (5.1.1). □

Lema 5.1.10. *Če je $0 < n \leq \infty$ in $W \in \operatorname{Lat}_{n-1} \mathcal{H}$, potem za vsako družino $U_1, \ldots, U_r \in \mathcal{A}_W$ velja*

$$\{U_1, \ldots, U_r\}'' \neq \mathcal{A}_W.$$

Dokaz. Iz $n > 0$ sklepamo $U_1 + \ldots + U_r \neq \mathcal{H}$, na kar uporabimo lemo 5.1.8. □

Lema 5.1.11. *Če je $0 < n < r$ in $Z \in \operatorname{Lat}_{n+1} \mathcal{H}$, potem obstajajo takšni $U_1, \ldots, U_r \in \mathcal{B}_Z$, da je*

$$\{U_1, \ldots, U_r\}'' = \mathcal{B}_Z.$$

Dokaz. Ker je $n < r$, lahko izberemo takšne $U_1, \ldots, U_r \in \mathcal{B}_Z$, da je $U_1 \cap \ldots \cap U_r = \{0\}$. Dokaz zaključimo z uporabo posledice 5.1.9. □

V [5, Theorem 3.2] lahko najdemo povsem algebraično verzijo naslednje leme.

Lema 5.1.12. *Naj bo $n \in \mathbb{Z}_\infty \setminus \{0\}$ in U_1, U_2 različna elementa $\operatorname{Lat}_n \mathcal{H}$. Potem je*

$$U_1 \sim U_2 \iff \{U_1, U_2\}'' \neq \{U_1, U_2\}.$$

Dokaz. Če je $U_1 \sim U_2$, dobimo $\{U_1, U_2\}'' \neq \{U_1, U_2\}$ z uporabo leme 5.1.8 za $r = 2$ in $W = U_1 \cap U_2$. Predpostavimo sedaj, da obstaja tak $U \in \{U_1, U_2\}''$, ki je različen od U_1 in U_2. V štirih korakih bomo dokazali, da sta U_1 in U_2 sosednja.

Korak 1. *$U_1 \not\subset U$ in $U_2 \not\subset U$.*

Zaradi simetrije je dovolj dokazati prvo enačbo. Ta je avtomatično izpolnjena, če $n \neq \infty$, zato predpostavimo nasprotno. Recimo, da je $U_1 \subset U$. Ločimo dva primera. Najprej predpostavimo, da imamo tudi $U_2 \subset U$. Če je $V \in \operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H}$ tak, da je $\{U, V\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H}$, potem sta $U_1 + V$ in $U_2 + V$ strogo vsebovana v $U + V = \mathcal{H}$. Tako imamo $\{U_1, V\} \notin \mathcal{C}_\mathcal{H}$ in $\{U_2, V\} \notin \mathcal{C}_\mathcal{H}$, kar nasprotuje (5.1.2) in (5.1.3). Oglejmo si še drugi primer, ko $U_2 \not\subset U$. Izberimo $u_2 \in U_2 \setminus U$ in postavimo $V = [u_2] \oplus ([u_2] \oplus U)^\perp \in \operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H}$. Potem je $\{U, V\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H}$, $U_1 + V \neq \mathcal{H}$ in $U_2 \cap V \neq \{0\}$, kar spet nasprotuje (5.1.2) in (5.1.3).

Korak 2. $U_1 \cap U \in \mathcal{B}_{U_1}$ *in* $U_2 \cap U \in \mathcal{B}_{U_2}$.

Spet bomo dokazali prvo enačbo in se sklicali na simetrijo. Enačba je očitno izpolnjena v primeru $n = 1$, zato predpostavimo, da $n \neq 1$. Ker je $U_1 \not\subset U$, je $U_1 \cap U$ strogo vsebovan v U_1. Zato je dovolj dokazati, da za vsak par linearno neodvisnih $u_1, v_1 \in U_1$ velja

$$[u_1, v_1] \cap U \neq \{0\}.$$

V ta namen izberimo linearno neodvisna $u_1, v_1 \in U_1$. Ker je $U_2 \not\subset U$, obstaja $u_2 \in U_2 \backslash U$. Lema 5.1.6 zagotovi obstoj neničelnih $u \in [u_1, u_2] \cap U$ in $v \in [v_1, u_2] \cap U$. Pokažimo, da sta u in v linearno neodvisna. Res,

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \quad \text{ in } \quad v = \mu_1 v_1 + \mu_2 u_2$$

za neke $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{F}$. Iz $u_2 \notin U$ sledi $\lambda_1, \mu_1 \neq 0$. Trdimo, da so u_1, v_1, u_2 linearno neodvisni. Če bi bili linearno odvisni bi iz linearne neodvisnosti u_1 in v_1 sledilo, da u_2 leži v $[u_1, v_1]$. Posledično bi imeli $u_2 \in U_1 \cap U_2$, po posledici 5.1.7 pa tudi $u_2 \in U$, protislovje. Torej so u_1, v_1 in u_2 linearno neodvisni, zato sta takšna tudi u, v. Tako sta $[u, v]$ in $[u_1, v_1]$ dvorazsežna podprostora v $[u_1, u_2, v_1]$ in imata zato netrivialen presek.

Korak 3. $\overline{U_1 + U_2} = U \oplus [u_2]$ *za nek* $u_2 \in U_2 \setminus U$.

Iz koraka 2 vemo, da je $U_1 = (U_1 \cap U) \oplus [u_1]$ in $U_2 = (U_2 \cap U) \oplus [u_2]$ za neka $u_1, u_2 \notin U$. Po lemi 5.1.6 je presek $[u_1, u_2] \cap U$ netrivialen. Ker $u_1, u_2 \notin U$, je ta presek enak nekemu $[u] \notin \{[u_1], [u_2]\}$. Zato je

$$U_1 + U_2 = (U_1 \cap U) + (U_2 \cap U) + [u_1, u_2] \subset U + [u_1, u_2] = U + [u, u_2] = U \oplus [u_2].$$

Zadnji podprostor je pa po posledici 5.1.7 vsebovan v $\overline{U_1 + U_2}$ in zato $\overline{U_1 + U_2} = U \oplus [u_2]$.

Korak 4. $U_1 \sim U_2$.

Naj bo $u_2 \in U_2 \backslash U$ tak kot v prejšnjem koraku. Vpeljimo $V = [u_2] \oplus (U_1 + U_2)^\perp \in \operatorname{Lat}_{-n}\mathcal{H}$. Potem je $U \oplus V = (U \oplus [u_2]) \oplus (U_1 + U_2)^\perp = \mathcal{H}$ in $0 \neq u_2 \in U_2 \cap V$. Torej je $\{U_2, V\} \notin \mathcal{C}_\mathcal{H}$, zato iz (5.1.2) in (5.1.3) dobimo $\{U_1, V\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H}$. Jasno je $U_1 \oplus [u_2]$ vsebovan v $\overline{U_1 + U_2}$ in ta dva podprostora imata skupen komplement, namreč $(U_1 + U_2)^\perp$. Zato sta enaka in posledično je $U_1 + U_2$ zaprt. Nadalje ima U_1 kodimenzijo 1 v $U_1 + U_2$, zaradi simetrije pa isto velja za U_2. $\square$

Posledica 5.1.13. *Naj bosta* $n, m \in \mathbb{Z}_\infty \setminus \{0\}$ *in* $\phi : \operatorname{Lat}_n \mathcal{H} \to \operatorname{Lat}_m \mathcal{K}$, $\psi : \operatorname{Lat}_{-n} \mathcal{H} \to \operatorname{Lat}_{-m} \mathcal{K}$ *bijektivni preslikavi, za kateri velja*

$$\{U, V\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H} \iff \{\phi(U), \psi(V)\} \in \mathcal{C}_\mathcal{K}, \quad U \in \operatorname{Lat}_n \mathcal{H}, V \in \operatorname{Lat}_{-n} \mathcal{H}.$$

Potem za vse $U_1, U_2 \in \operatorname{Lat}_n \mathcal{H}$ *velja*

$$U_1 \sim U_2 \iff \phi(U_1) \sim \phi(U_2),$$

za vse $V_1, V_2 \in \operatorname{Lat}_{-n} \mathcal{H}$ *pa velja*

$$V_1 \sim V_2 \iff \psi(V_1) \sim \psi(V_2).$$

Dokaz. Prva trditev je direktna posledica leme 5.1.12 in dejstva, da je $\phi(\{U_1, U_2\}'') = \psi(\{U_1, U_2\}')' = \{\phi(U_1), \phi(U_2)\}''$. Drugo trditev dobimo, če zamenjamo vlogi ϕ in ψ v zadnjem stavku. $\square$

Trditev 5.1.14. *Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in predpostavimo, da sta $\phi : \operatorname{Lat}_n \mathcal{H} \to \operatorname{Lat}_n \mathcal{K}$ ter $\psi : \operatorname{Lat}_{-n} \mathcal{H} \to \operatorname{Lat}_{-n} \mathcal{K}$ takšni bijektivni preslikavi, da velja*

$$\{U, V\} \in \mathcal{C}_{\mathcal{H}} \iff \{\phi(U), \psi(V)\} \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}, \quad U \in \operatorname{Lat}_n \mathcal{H}, V \in \operatorname{Lat}_{-n} \mathcal{H}.$$

Potem obstaja tak $A \in \operatorname{BCI}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, da je

$$\phi(U) = A(U), \ U \in \operatorname{Lat}_n \mathcal{H},$$

in

$$\psi(V) = A(V), \ V \in \operatorname{Lat}_{-n} \mathcal{H}.$$

Dokaz. Uporabimo indukcijo na n. Začnimo z $n = 1$. Če uporabimo lemo 5.1.8 za $r = 2$ in $W = \{0\}$, dobimo, da za paroma različne $[x], [y], [z] \in \operatorname{Lat}_1 \mathcal{H}$ velja

$$[x] \subset [y] + [z] \iff [x] \in \{[y], [z]\}''.$$

Zato je

$$[x] \subset [y] + [z] \iff \phi([x]) \subset \phi([y]) + \phi([z]).$$

Po izreku 2.4.2 obstaja takšna bijektivna semilinearna preslikava $A : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$, da je $\phi([x]) = [Ax]$, $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$. Z drugimi besedami, $\phi(U) = A(U)$, $U \in \operatorname{Lat}_1 \mathcal{H}$. Enačba (5.0.3) nam zdaj pove, da je tudi preslikava $U \mapsto \psi\left(U^{\perp}\right)^{\perp}$, $U \in \operatorname{Lat}_1 \mathcal{H}$, porojena z bijektivno semilinearno preslikavo $B : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$. Tako je $\psi(V) = B\left(V^{\perp}\right)^{\perp}$, $V \in \operatorname{Lat}_{-1} \mathcal{H}$.

Opazimo, da za vsak par $x, y \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ velja $\{[x], [y]^{\perp}\} \notin \mathcal{C}_{\mathcal{H}} \iff [x] \cap [y]^{\perp} \neq \{0\} \iff x \perp y$, kar nam da $x \perp y \iff Ax \perp By$, $x, y \in \mathcal{H}$. Po posledici 2.2.2 je $A \in \operatorname{BCI}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, za vsak $V \in \operatorname{Lat}_{-1} \mathcal{H}$ pa imamo $A(V) = B\left(V^{\perp}\right)^{\perp}$. Vemo že, da je slednji enak $\psi(V)$. S tem je dokazana baza indukcije.

Nadaljujmo z indukcijskim korakom. Naj bo $n \geq 2$ in predpostavimo, da je vsak par bijektivnih preslikav, ki je definiran na $\operatorname{Lat}_{n-1} \mathcal{H}$ in $\operatorname{Lat}_{-n+1} \mathcal{H}$ ter ohranja komplementiranost, porojen z operatorjem iz $\operatorname{BCI}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Dokazati moramo, da isto velja za preslikave, definirane na $\operatorname{Lat}_n \mathcal{H}$ in $\operatorname{Lat}_{-n} \mathcal{H}$. Izberimo poljuben $W \in \operatorname{Lat}_{n-1} \mathcal{H}$. Posledica 5.1.13 in lema 5.1.5 nam povesta, da imamo bodisi $\phi(\mathcal{A}_W) = \mathcal{A}_{W'}$ za nek $W' \in \operatorname{Lat}_{n-1} \mathcal{K}$ bodisi $\phi(\mathcal{A}_W) = \mathcal{B}_Z$ za nek $Z \in \operatorname{Lat}_{n+1} \mathcal{K}$. Predpostavimo, da se zgodi druga možnost. Naj bo r katerokoli naravno število, ki je večje od n. Po lemi 5.1.11 obstajajo $U_1, \ldots, U_r \in \mathcal{B}_Z$, za katere je $\{U_1, \ldots, U_r\}'' = \mathcal{B}_Z$. Če na tej enakosti uporabimo preslikavo ϕ^{-1}, dobimo $\{\phi^{-1}(U_1), \ldots, \phi^{-1}(U_r)\}'' = \mathcal{A}_W$, kar nasprotuje lemi 5.1.10. Tako za vsak $W \in \operatorname{Lat}_{n-1} \mathcal{H}$ obstaja natanko en $W' \in \operatorname{Lat}_{n-1} \mathcal{K}$ za katerega je $\phi(\mathcal{A}_W) = \mathcal{A}_{W'}$. Posledično ϕ inducira preslikavo $\tau : \operatorname{Lat}_{n-1} \mathcal{H} \to \operatorname{Lat}_{n-1} \mathcal{K}$, določeno z

$$\phi(\mathcal{A}_W) = \mathcal{A}_{\tau(W)}, \quad W \in \operatorname{Lat}_{n-1} \mathcal{H},$$

kar je ekvivalentno z

$$W \subset U \iff \tau(W) \subset \phi(U), \quad W \in \operatorname{Lat}_{n-1} \mathcal{H}, \ U \in \operatorname{Lat}_n \mathcal{H}. \tag{5.1.4}$$

Trdimo, da je τ bijektivna. Injektivnost sledi direktno iz injektivnosti preslikave ϕ. Za dokaz surjektivnosti izberimo poljuben $W' \in \operatorname{Lat}_{n-1}\mathcal{K}$. Ker ima ϕ^{-1} iste lastnosti kot ϕ, imamo $\phi^{-1}(\mathcal{A}_{W'}) = \mathcal{A}_W$ za nek $W \in \operatorname{Lat}_{n-1}\mathcal{H}$ in končno $\tau(W) = W'$. Iz (5.0.3) sledi, da preslikava $U \mapsto \psi(U^\perp)^\perp$, $U \in \operatorname{Lat}_n\mathcal{H}$, tudi preslika množice oblike $\mathcal{A}_W$, $W \in \operatorname{Lat}_{n-1}\mathcal{H}$, bijektivno na množice oblike $\mathcal{A}_{W'}$, $W' \in \operatorname{Lat}_{n-1}\mathcal{K}$. To nam skupaj z (5.1.1) zagotovi obstoj bijektivne preslikave $\rho : \operatorname{Lat}_{-n+1}\mathcal{H} \to \operatorname{Lat}_{-n+1}\mathcal{K}$, določene s

$$\psi(\mathcal{B}_Z) = \mathcal{B}_{\rho(Z)}, \quad Z \in \operatorname{Lat}_{-n+1}\mathcal{H}.$$

Zadnji pogoj lahko seveda ekvivalentno formuliramo kot

$$V \subset Z \iff \psi(V) \subset \rho(Z), \quad V \in \operatorname{Lat}_{-n}\mathcal{H},\ Z \in \operatorname{Lat}_{-n+1}\mathcal{H}. \tag{5.1.5}$$

Trdimo, da za vsak par $W \in \operatorname{Lat}_{n-1}\mathcal{H}$, $Z \in \operatorname{Lat}_{-n+1}\mathcal{H}$ velja

$$\{W, Z\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H} \iff \forall U \in \mathcal{A}_W\ \exists V \in \mathcal{B}_Z : \{U, V\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H}. \tag{5.1.6}$$

Predpostavimo najprej, da je $\{W, Z\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H}$ in izberimo poljuben $U \in \mathcal{A}_W$. Potem je $U = W \oplus [z]$ za nek $z \in Z \setminus \{0\}$. Zato za $V = Z \ominus [z] \in \mathcal{B}_Z$ velja $U \oplus V = W \oplus ([z] \oplus V) = W \oplus Z = \mathcal{H}$. Privzemimo sedaj, da je drugi pogoj v (5.1.6) izpolnjen. Ker je W končno razsežen, Z pa ima končno kodimenzijo v $\mathcal{H}$, lahko najdemo vektor $z \in Z \setminus W$. Naj bo $U = W \oplus [z] \in \mathcal{A}_W$. Potem obstaja tak $V \in \mathcal{B}_Z$, da je $W \oplus ([z] \oplus V) = U \oplus V = \mathcal{H}$. Ker je $z \notin V$ in $V \in \mathcal{B}_Z$, imamo $[z] \oplus V = Z$, torej $W \oplus Z = \mathcal{H}$.

Ekvivalenca (5.1.6) nam pove, da za vsak par $W \in \operatorname{Lat}_{n-1}\mathcal{H}$, $Z \in \operatorname{Lat}_{-n+1}\mathcal{H}$ velja

$$\{W, Z\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H} \iff \forall U \in \phi(\mathcal{A}_W)\ \exists V \in \psi(\mathcal{B}_Z) : \{U, V\} \in \mathcal{C}_\mathcal{K}$$

in nadalje

$$\{W, Z\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H} \iff \{\tau(W), \rho(Z)\} \in \mathcal{C}_\mathcal{K}.$$

Po indukcijski predpostavki obstaja tak $A \in \operatorname{BCI}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, da je $\tau(W) = A(W)$, $W \in \operatorname{Lat}_{n-1}\mathcal{H}$, in $\rho(Z) = A(Z)$, $Z \in \operatorname{Lat}_{-n+1}\mathcal{H}$. Iz (5.1.4) in (5.1.5) dobimo $\phi(U) = A(U)$, $U \in \operatorname{Lat}_n\mathcal{H}$, in $\psi(V) = A(V)$, $V \in \operatorname{Lat}_{-n}\mathcal{H}$. □

Dokažimo glavni izrek tega poglavja.

Izrek 5.1.15. *Naj bosta $\mathcal{H}$ in $\mathcal{K}$ separabilna, $\phi, \psi : \operatorname{Lat}\mathcal{H} \to \operatorname{Lat}\mathcal{K}$ pa takšni bijektivni preslikavi, da je*

$$\{U, V\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H} \iff \{\phi(U), \psi(V)\} \in \mathcal{C}_\mathcal{K}, \quad U, V \in \operatorname{Lat}\mathcal{H}.$$

Potem obstajata zaporedje $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}_\infty} \subset \operatorname{BCI}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ in regularno razbitje $\mathbb{Z}_\infty = \mathbb{Z}_\infty(id) \sqcup \mathbb{Z}_\infty(\perp)$, tako da je

- *če je $U \in \operatorname{Lat}_n\mathcal{H}$ za nek $n \in \mathbb{Z}_\infty(id)$, potem je $\phi(U) = A_n(U)$ in $\psi(U) = A_{-n}(U)$,*
- *če je $U \in \operatorname{Lat}_n\mathcal{H}$ za nek $n \in \mathbb{Z}_\infty(\perp)$, potem je $\phi(U) = A_n(U^\perp)$ in $\psi(U) = A_{-n}(U^\perp)$.*

Dokaz. Prvi cilj je dokazati, da ϕ in ψ preslikata množice oblike $\mathrm{Lat}_n\,\mathcal{H}$, $n \in \mathbb{Z}_\infty$, v množice iste oblike. To je seveda najlažje narediti za $n = 0$.

Za $U \in \mathrm{Lat}\,\mathcal{H}$ namreč velja, da je $U \in \mathrm{Lat}_0\,\mathcal{H}$ natanko tedaj, ko obstaja natanko en $V \in \mathrm{Lat}\,\mathcal{H}$, za katerega je $\{U, V\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H}$. Zato je $\phi\,(\mathrm{Lat}_0\,\mathcal{H}) = \mathrm{Lat}_0\,\mathcal{K}$ in $\psi\,(\mathrm{Lat}_0\,\mathcal{H}) = \mathrm{Lat}_0\,\mathcal{K}$. Jasno je, da bodisi oba, ϕ in ψ delujeta kot identiteta na množici $\mathrm{Lat}_0\,\mathcal{H}$ bodisi oba delujeta kot ortogonalno komplementiranje. Tako vsak $A_0 \in \mathrm{BCI}\,(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ zadošča zaključku izreka.

Trdimo, da sta za vsak par različnih $U, V \in \mathrm{Lat}\,\mathcal{H}$ naslednji trditvi ekvivalentni:

- $\exists n \in \mathbb{Z}_\infty : \; U \in \mathrm{Lat}_n\,\mathcal{H}, \; V \in \mathrm{Lat}_{-n}\,\mathcal{H}$,
- $\exists W, Z \in \mathrm{Lat}\,\mathcal{H} : \{U, W\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H}, \; \{W, Z\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H}, \; \{Z, V\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H}$.

Trivialno je preveriti, da iz drugega pogoja sledi prvi. Privzemimo zdaj, da je prvi pogoj izpolnjen. Ločimo tri primere.

Primer 1. $n = 0$

Dokaz. Eden od U in V, recimo U, je enak $\{0\}$, drugi pa $\mathcal{H}$. Zato je drugi pogoj izpolnjen za $W = \mathcal{H}$ in $Z = \{0\}$. □

Primer 2. $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Dokaz. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $n > 0$. Postavimo $Z = V^\perp \in \mathrm{Lat}_n\,\mathcal{H}$. Najti moramo skupni komplement podprostorov U in Z. Če je $U \cap Z$ netrivialen, v ta namen izberimo njegovo bazo $B = \{w_1, \ldots, w_r\}$. Sicer postavimo $r = 0$ in $B = \emptyset$. V vsakem primeru razširimo B do baze U z vektorji $u_{r+1}, \ldots, u_n \in U$, analogno pa z vektorji $z_{r+1}, \ldots, z_n \in Z$ dobimo bazo za Z. Lahko je preveriti, da je $W = [u_{r+1} + z_{r+1}, \ldots, u_n + z_n] \oplus (U + Z)^\perp$ skupen komplement U in Z.

□

Primer 3. $n = \infty$

Dokaz. V tem primeru je drugi pogoj dokazan v [20, Theorem 1.4]. □

Za vsak par različnih $U, V \in \mathrm{Lat}\,\mathcal{H}$ sta naslednji trditvi ekvivalentni:

$$\begin{gathered} \exists n \in \mathbb{Z}_\infty \setminus \{0\} : \; U, V \in \mathrm{Lat}_n\,\mathcal{H}, \\ \Updownarrow \\ \exists W, Z, Y \in \mathrm{Lat}\,\mathcal{H} : \{U, W\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H}, \; \{W, Z\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H}, \; \{Z, Y\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H}, \; \{Y, V\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H}. \end{gathered} \tag{5.1.7}$$

Iz drugega pogoja spet trivialno sledi prvi. Za dokaz obratne smeri uporabimo prejšnjo ekvivalenco za par $U \in \mathrm{Lat}_n\,\mathcal{H}$ in $Y = V^\perp \in \mathrm{Lat}_{-n}\,\mathcal{H}$.

Posledično za vsak $n \in \mathbb{Z}_\infty \setminus \{0\}$ obstaja tak $m \in \mathbb{Z}_\infty \setminus \{0\}$, da je $\phi\,(\mathrm{Lat}_n\,\mathcal{H}) = \mathrm{Lat}_m\,\mathcal{K}$ in $\psi\,(\mathrm{Lat}_{-n}\,\mathcal{H}) = \mathrm{Lat}_{-m}\,\mathcal{K}$. Z uporabo posledic 5.1.3 in 5.1.13 sklepamo, da mora biti m enak bodisi n bodisi $-n$, če je $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. V prvem primeru imamo tudi $\phi(\mathrm{Lat}_{-n}\,\mathcal{H}) = \mathrm{Lat}_{-n}\,\mathcal{K}$, $\psi(\mathrm{Lat}_{-n}\,\mathcal{H}) = \mathrm{Lat}_{-n}\,\mathcal{K}$ in $\psi(\mathrm{Lat}_n\,\mathcal{H}) = \mathrm{Lat}_n\,\mathcal{K}$, v drugem pa $\phi(\mathrm{Lat}_{-n}\,\mathcal{H}) = \mathrm{Lat}_n\,\mathcal{K}$, $\psi(\mathrm{Lat}_{-n}\,\mathcal{H}) = \mathrm{Lat}_n\,\mathcal{K}$ in $\psi(\mathrm{Lat}_n\,\mathcal{H}) = \mathrm{Lat}_{-n}\,\mathcal{K}$. V obeh primerih pa mora biti $\phi\,(\mathrm{Lat}_\infty\,\mathcal{H}) = \psi\,(\mathrm{Lat}_\infty\,\mathcal{H}) = \mathrm{Lat}_\infty\,\mathcal{K}$. Torej obstaja takšno regularno razbitje $\mathbb{Z}_\infty = \mathbb{Z}_\infty(id) \sqcup \mathbb{Z}_\infty(\perp)$, da je $\phi(\operatorname{Lat}_n \mathcal{H}) = \psi(\operatorname{Lat}_n \mathcal{H}) = \operatorname{Lat}_n \mathcal{K}$ za $n \in \mathbb{Z}_\infty(id)$ in $\phi(\operatorname{Lat}_n \mathcal{H}) = \psi(\operatorname{Lat}_n \mathcal{H}) = \operatorname{Lat}_{-n} \mathcal{K}$ za $n \in \mathbb{Z}_\infty(\perp)$. Namesto para (ϕ, ψ) obravnavajmo par $(\widetilde{\phi}, \widetilde{\psi})$, kjer je $\widetilde{\phi}(U) = \phi(U)$, $\widetilde{\psi}(U) = \psi(U)$, če je $U \in \operatorname{Lat}_n \mathcal{H}$ za nek $n \in \mathbb{Z}_\infty(id)$ in $\widetilde{\phi}(U) = \phi(U^\perp)$, $\widetilde{\psi}(U) = \psi(U^\perp)$ sicer. Tako lahko predpostavimo, da velja $\phi(\operatorname{Lat}_n \mathcal{H}) = \operatorname{Lat}_n \mathcal{K}$ in $\psi(\operatorname{Lat}_n \mathcal{H}) = \operatorname{Lat}_n \mathcal{K}$ za vsak $n \in \mathbb{Z}_\infty$.

Naj bo spet n naravno število. Trditev 5.1.14 zagotovi obstoj takšnega $A_n \in \operatorname{BCI}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, da je $\phi(U) = A_n(U)$, $U \in \operatorname{Lat}_n \mathcal{H}$, in $\psi(V) = A_n(V)$, $V \in \operatorname{Lat}_{-n} \mathcal{H}$. Po (5.0.3) lahko uporabimo trditev 5.1.14 tudi za par preslikav $U \mapsto \phi\left(U^\perp\right)^\perp$, $U \in \operatorname{Lat}_n \mathcal{H}$, in $V \mapsto \psi\left(V^\perp\right)^\perp$, $V \in \operatorname{Lat}_{-n} \mathcal{H}$. Zato obstaja tak $B_n \in \operatorname{BCI}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, da je $\phi(V) = B_n\left(V^\perp\right)^\perp$, $V \in \operatorname{Lat}_{-n} \mathcal{H}$, in $\psi(U) = B_n\left(U^\perp\right)^\perp$, $U \in \operatorname{Lat}_n \mathcal{H}$. Postavimo $A_{-n} := (B_n^*)^{-1}$. Trditev 2.2.7 pove, da je $A_{-n} \in \operatorname{BCI}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ in da velja $\phi(V) = A_{-n}(V)$, $V \in \operatorname{Lat}_{-n} \mathcal{H}$, ter $\psi(U) = A_{-n}(U)$, $U \in \operatorname{Lat}_n \mathcal{H}$.

Preostane opisati obnašanje preslikav ϕ in ψ na množici $\operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H}$. Iz posledice 5.1.13 in leme 5.1.5 sledi, da za vsak $W \in \operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H}$ obstaja tak $W' \in \operatorname{Lat}_\infty \mathcal{K}$, da imamo bodisi $\phi(\mathcal{A}_W) = \mathcal{A}_{W'}$ bodisi $\phi(\mathcal{A}_W) = \mathcal{B}_{W'}$. Na množici maksimalnih sosednostnih podmnožic $\operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H}$ definiramo ekvivalenčno relacijo $\sim$, katere ekvivalenčna razreda sta $\{\mathcal{A}_W : W \in \operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H}\}$ in $\{\mathcal{B}_Z : Z \in \operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H}\}$. Naš naslednji cilj je pokazati, da preslikavi ϕ in ψ ohranjata to relacijo, to je

$$\phi(\mathcal{S}_1) \sim \phi(\mathcal{S}_2) \iff \mathcal{S}_1 \sim \mathcal{S}_2 \iff \psi(\mathcal{S}_1) \sim \psi(\mathcal{S}_2).$$

Začnimo z nekaj opažanji. Trdimo, da za $W, Z \in \operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H}$ velja

(a) $\{W, Z\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H} \iff \forall U \in \mathcal{A}_W \, \exists V \in \mathcal{B}_Z : \{U, V\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H}$,

(b) $\{W, Z\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H} \iff \forall U \in \mathcal{B}_W \, \exists V \in \mathcal{A}_Z : \{U, V\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H}$,

(c) $\exists U \in \mathcal{A}_W \, \forall V \in \mathcal{A}_Z : \{U, V\} \notin \mathcal{C}_\mathcal{H}$,

(d) $\exists U \in \mathcal{B}_W \, \forall V \in \mathcal{B}_Z : \{U, V\} \notin \mathcal{C}_\mathcal{H}$.

Dokažimo (a). Iz prvega pogoja sledi drugi na isti način kot v (5.1.6) v trditvi 5.1.14. Predpostavimo, da je drugi pogoj izpolnjen. Spet lahko prepišemo dokaz iz (5.1.6) s to razliko, da moramo na drug način utemeljiti obstoj vektorja $z \in Z \setminus W$. Predpostavimo, da tak z ne obstaja, torej imamo $Z \subset W$. Potem za vsak $U \in \mathcal{A}_W$ in $V \in \mathcal{B}_Z$ velja $V \subset U$. Zato iz $\{U, V\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H}$ sledi $U = \mathcal{H}$ in $V = \{0\}$, kar pa nasprotuje $W, Z \in \operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H}$.

Iz (a) in (5.0.2) dobimo

$$\{W, Z\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H} \iff \{W^\perp, Z^\perp\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H} \iff \forall U \in \mathcal{A}_{W^\perp} \, \exists V \in \mathcal{B}_{Z^\perp} : \{U^\perp, V^\perp\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H}.$$

Z uporabo (5.1.1) sedaj dobimo (b). Za dokaz (c) izberemo tak $U \in \mathcal{A}_W$, da je $U \cap Z \neq \{0\}$, za dokaz (d) pa $U \in \mathcal{B}_W$, za katerega velja $U + Z \neq \mathcal{H}$.

Iz (a)–(d) sledi, da je $\phi(\mathcal{A}_{W_1}) \not\sim \psi(\mathcal{B}_{W_2})$ za vsak par $W_1, W_2 \in \operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H}$, za katerega je $\{W_1, W_2\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H}$. Naj bosta sedaj $W_1, W_2 \in \operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H}$ poljubna. Po (5.1.7) in prejšnjem stavku obstajajo takšni $W_3, W_4, W_5 \in \operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H}$, za katere je

$$\phi(\mathcal{A}_{W_1}) \not\sim \psi(\mathcal{B}_{W_3}) \not\sim \phi(\mathcal{A}_{W_4}) \not\sim \psi(\mathcal{B}_{W_5}) \not\sim \phi(\mathcal{A}_{W_2}).$$

Tako je $\phi(\mathcal{A}_{W_1}) \sim \phi(\mathcal{A}_{W_2})$, podobno pa dobimo tudi $\phi(\mathcal{B}_{W_1}) \sim \phi(\mathcal{B}_{W_2})$, $\psi(\mathcal{A}_{W_1}) \sim \psi(\mathcal{A}_{W_2})$ in $\psi(\mathcal{B}_{W_1}) \sim \psi(\mathcal{B}_{W_2})$.

Sedaj lahko predpostavimo, da za poljubna $W, Z \in \mathrm{Lat}_\infty \mathcal{H}$ obstajata takšna $W', Z' \in \mathrm{Lat}_\infty \mathcal{K}$, da je $\phi(\mathcal{A}_W) = \mathcal{A}_{W'}$ in $\psi(\mathcal{B}_Z) = \mathcal{B}_{Z'}$, sicer obravnavamo par preslikav $(U, V) \mapsto (\phi(U^\perp), \psi(V^\perp))$, $U, V \in \mathrm{Lat}_\infty \mathcal{H}$, namesto para (ϕ, ψ). Posledično ϕ in ψ inducirata bijektivni preslikavi $\tau, \rho : \mathrm{Lat}_\infty \mathcal{H} \to \mathrm{Lat}_\infty \mathcal{K}$, določeni s pogojema

$$\phi(\mathcal{A}_W) = \mathcal{A}_{\tau(W)},\ W \in \mathrm{Lat}_\infty \mathcal{H}, \quad \text{in} \quad \psi(\mathcal{B}_Z) = \mathcal{B}_{\rho(Z)},\ Z \in \mathrm{Lat}_\infty \mathcal{H}. \tag{5.1.8}$$

Iz (a) sledi

$$\{W, Z\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H} \iff \{\tau(W), \rho(Z)\} \in \mathcal{C}_\mathcal{K}, \quad W, Z \in \mathrm{Lat}_\infty \mathcal{H}. \tag{5.1.9}$$

Izberimo poljubna $W, Z \in \mathrm{Lat}_\infty \mathcal{H}$, za katera je $\{W, Z\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H}$. Potem lahko vsak element $\mathcal{A}_W$ enolično zapišemo kot $W \oplus [z]$, kjer je $[z] \in \mathrm{Lat}_1 Z$. Po (5.1.9) imamo $\{\tau(W), \rho(Z)\} \in \mathcal{C}_\mathcal{K}$. Zato iz (5.1.8) sledi, da se da vsak element $\phi(\mathcal{A}_W)$ enolično zapisati kot $\tau(W) \oplus [z']$, kjer je $[z'] \in \mathrm{Lat}_1 \rho(Z)$. Posledično ϕ inducira bijektivno preslikavo $\xi : \mathrm{Lat}_1 Z \to \mathrm{Lat}_1 \rho(Z)$, določeno s pogojem $\phi(W \oplus [z]) = \tau(W) \oplus \xi([z])$, $[z] \in \mathrm{Lat}_1 Z$. Preprosto je pokazati, da nam (5.1.9) da

$$\{[z], V\} \in \mathcal{C}_Z \iff \{\xi([z]), \psi(V)\} \in \mathcal{C}_{\rho(Z)}, \quad [z] \in \mathrm{Lat}_1 Z,\ V \in \mathcal{B}_Z.$$

Uporabimo trditev 5.1.14 za $n = 1$ in Hilbertova prostora Z ter $\rho(Z)$ in sklepamo, da obstaja tak $A_{W,Z} \in \mathrm{BCI}(Z, \rho(Z))$, da je

$$\xi([z]) = A_{W,Z}([z]),\ [z] \in \mathrm{Lat}_1 Z, \quad \text{in} \quad \psi(V) = A_{W,Z}(V),\ V \in \mathcal{B}_Z.$$

Druga od zgornjih dveh enačb in posledica 2.2.4 povesta, da je $A_{W,Z}$ neodvisen od W do množenja z neničelnimi skalarji natančno. Zaključimo, da za vsak $Z \in \mathrm{Lat}_\infty \mathcal{H}$ obstaja tak $A_Z \in \mathrm{BCI}(Z, \rho(Z))$, da za katerikoli $W \in \mathrm{Lat}_\infty \mathcal{H}$, za katerega je $\{W, Z\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H}$, velja

$$\begin{gathered} \phi(W \oplus [z]) = \tau(W) \oplus A_Z([z]),\ [z] \in \mathrm{Lat}_1 Z, \\ \psi(V) = A_Z(V),\ V \in \mathcal{B}_Z. \end{gathered} \tag{5.1.10}$$

Naš naslednji cilj je dokazati, da za vsak par različnih $Z_1, Z_2 \in \mathrm{Lat}_\infty \mathcal{H}$ z lastnostjo $Z_1 \cap Z_2 \neq \{0\}$ obstaja tak $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, da je

$$A_{Z_2}|_{Z_1 \cap Z_2} = \lambda A_{Z_1}|_{Z_1 \cap Z_2}. \tag{5.1.11}$$

Naj bo $z \in (Z_1 \cap Z_2) \setminus \{0\}$ poljuben. Dokažimo najprej, da je

$$[A_{Z_1}(z)] = [A_{Z_2}(z)]. \tag{5.1.12}$$

V ta namen ločimo dva primera.

Primer 1. *Obstaja tak $W \in \mathrm{Lat}_\infty \mathcal{H}$, da je $\{W, Z_1\}, \{W, Z_2\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H}$.*

Dokaz. Po (5.1.10) je $\tau(W) \oplus A_{Z_1}([z]) = \tau(W) \oplus A_{Z_2}([z])$. Posledično obstaja tak $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, da je $w := A_{Z_1}(z) + \alpha A_{Z_2}(z) \in \tau(W)$. To nam skupaj s (5.1.9) pove, da za vsak $U \in \mathrm{Lat}_\infty \mathcal{K}$, za katerega je

$$\{U, \rho(Z_1)\} \in \mathcal{C}_\mathcal{K} \quad \text{in} \quad \{U, \rho(Z_2)\} \in \mathcal{C}_\mathcal{K}, \tag{5.1.13}$$

obstaja tak $\alpha_U \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, da je $A_{Z_1}(z) + \alpha_U A_{Z_2}(z) \in U$.

Če je $w = 0$, je dokaz (5.1.12) zaključen, zato privzemimo nasprotno. Pokazali bomo, da ta privzetek pripelje do protislovja.

Opazimo, da sta $\rho(Z_j) \oplus (\tau(W) \ominus [w])$, $j = 1, 2$, hiperravnini v $\mathcal{K}$. Trdimo, da obstajata linearno neodvisna $x, y \in \mathcal{K}$, za katera je

(i) $x, y \notin \rho(Z_j) \oplus (\tau(W) \ominus [w])$, $j = 1, 2$,

(ii) $[x, y] \cap \tau(W) = \{0\}$.

Res, $\rho(Z_1)$ in $\rho(Z_2)$ sta različna in imata skupen komplement $\tau(W)$. Zato nista primerljiva. Izberimo takšna $z_1 \in \rho(Z_1) \setminus \rho(Z_2)$ in $z_2 \in \rho(Z_2) \setminus \rho(Z_1)$, da so z_1, z_2 in w linearno neodvisni. Potem $z_j + w$ ne leži v $\rho(Z_j) \oplus (\tau(W) \ominus [w])$, $j = 1, 2$. Nadalje lahko izberemo z_1 na takšen način, da $z_1 + w \notin \rho(Z_2) \oplus (\tau(W) \ominus [w])$. Če to ne bi bilo res, bi namreč $\rho(Z_2) \oplus (\tau(W) \ominus [w])$ vseboval $z_1 + w$ in $-z_1 + w$, posledično pa tudi w. To bi nasprotovalo $\rho(Z_2) \oplus \tau(W) = \mathcal{K}$. Analogno lahko izberemo z_2 tako, da je $z_2 + w \notin \rho(Z_1) \oplus (\tau(W) \ominus [w])$. Tako par $x = z_1 + w$, $y = z_2 + w$ zadošča (i).

Dokažimo še (ii). Naj bosta z_1 in z_2 kot prej. Lahko najdemo tak $z_1' \in \rho(Z_1) \setminus \rho(Z_2)$, da sta z_1 in z_1' linearno neodvisna, isto pa velja za z_1', z_2, w. Spet lahko po morebitnem množenju z -1 predpostavimo, da par $z_1' + w$, $z_2 + w$ zadošča (i). Potem je preprosto preveriti, da ne moreta oba, $[z_1, z_2]$ in $[z_1', z_2]$, sekati $\tau(W)$ netrivialno. Zato lahko predpostavimo, da je $[z_1, z_2] \cap \tau(W) = \{0\}$, sicer zamenjamo z_1 z z_1'. Ker je $w \in \tau(W)$, dobimo tudi želen rezultat $[z_1 + w, z_2 + w] \cap \tau(W) = \{0\}$.

Naj bosta x, y kot v (i) in (ii). Postavimo $U = (\tau(W) \ominus [w]) \oplus [x]$ in $V = (\tau(W) \ominus [w]) \oplus [y]$. Potem sta $U, V \in \mathrm{Lat}_\infty \mathcal{K}$ različna in oba zadoščata (5.1.13). Zato je

$$A_{Z_1}(z) + \beta A_{Z_2}(z) \in U \quad \text{in} \quad A_{Z_1}(z) + \gamma A_{Z_2}(z) \in V$$

za neka $\beta, \gamma \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Posledično obstajajo takšni $w_1, w_2 \in \tau(W) \ominus [w]$ in $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, da je

$$w + (\beta - \alpha) A_{Z_2}(z) = A_{Z_1}(z) + \beta A_{Z_2}(z) = w_1 + \lambda x$$

ter

$$w + (\gamma - \alpha) A_{Z_2}(z) = A_{Z_1}(z) + \gamma A_{Z_2}(z) = w_2 + \mu y.$$

Nadalje,

$$(\gamma - \beta) w - (\gamma - \alpha) w_1 + (\beta - \alpha) w_2 = (\gamma - \alpha)\lambda x - (\beta - \alpha)\mu y \in [x, y] \cap \tau(W).$$

Po (ii) je

$$(\gamma - \beta) w = (\gamma - \alpha) w_1 - (\beta - \alpha) w_2 \in \tau(W) \ominus [w] \subset [w]^\perp.$$

Tako je $\gamma = \beta$, kar nam da $w_1 + \lambda x = w_2 + \mu y$. Sledi $w_1 - w_2 = \mu y - \lambda x \in [x, y] \cap \tau(W) = \{0\}$. Sklepamo, da je $w_1 = w_2$ in $\lambda = \mu = 0$, ker sta x in y linearno neodvisna. Nadalje je $(\beta - \alpha) A_{Z_2}(z) = w_1 - w \in \rho(Z_2) \cap \tau(W) = \{0\}$. Končno dobimo $w = w_1 \in [w]^\perp$, kar nam da $w = 0$, protislovje. $\square$

Primer 2. *Z_1 in Z_2 sta poljubna.*

Dokaz. Če uporabimo (5.1.7) za Hilbertov prostor $[z]^\perp$, vidimo, da obstajajo takšni $W_1, W_2, W_3 \in \operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H}$, da je $(Z_1 \ominus [z]) \oplus W_1 = W_1 \oplus W_2 = W_2 \oplus W_3 = W_3 \oplus (Z_2 \ominus [z]) = [z]^\perp$. Za $W = W_2 \oplus [z]$ tako dobimo $\{Z_1, W_1\}$, $\{W_1, W\}$, $\{W, W_3\}$, $\{W_3, Z_2\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H}$. Z uporabo primera 1 zaključimo $[A_{Z_1}(z)] = [A_W(z)] = [A_{Z_2}(z)]$. □

S tem smo dokazali (5.1.12). Lema 2.2.3 nam pove, da (5.1.11) velja, če je $\dim(Z_1 \cap Z_2) \geq 2$. V primeru, ko je $\dim(Z_1 \cap Z_2) = 1$, izberimo tak $Z_3 \in \operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H}$, da je $\dim(Z_j \cap Z_3) \geq 2$, $j = 1, 2$. Ker (5.1.11) velja za para Z_1, Z_3 in Z_2, Z_3, so bodisi vsi A_{Z_j}, $j = 1, 2, 3$, linearni bodisi vsi konjugirano linearni. Zato iz (5.1.12) sledi, da (5.1.11) velja tudi v tem primeru.

Definirajmo operator $A_\infty : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ na naslednji način. Najprej fiksirajmo $Z_0 \in \operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H}$ in operator A_{Z_0} iz (5.1.10). Za $x \in Z_0$ definiramo $A_\infty x := A_{Z_0} x$. Če je $x \notin Z_0$, postavimo $A_\infty x := A_Z x$, kjer izberemo Z in A_Z tako, da je $x \in Z$, $Z \cap Z_0 \neq \{0\}$ in $A_Z|_{Z \cap Z_0} = A_{Z_0}|_{Z \cap Z_0}$ (slednje lahko dosežemo z morebitnim množenjem operatorja A_Z z neničelnim skalarjem). Iz (5.1.11) sledi, da je definicija neodvisna od izbire Z in da so bodisi vsi operatorji A_Z, $Z \in \operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H}$, linearni bodisi vsi konjugirano linearni. Posledično je A_∞ linearen ali konjugirano linearen. Lahko je videti, da je A_∞ bijektiven. Ker je njegova zožitev na vsak $Z \in \operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H}$ omejena, je tudi A_∞ omejen. Preostane pokazati, da je $\phi(U) = \psi(U) = A_\infty(U)$, $U \in \operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H}$. V ta namen izberimo poljuben $U \in \operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H}$. Potem obstaja tak $Z \in \operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H}$, da je $U \in \mathcal{B}_Z$ in $Z \cap Z_0 \neq \{0\}$. Po (5.1.10) je $\psi(U) = A_Z(U) = A_\infty(U)$. Zato je $\{V' \in \operatorname{Lat}_\infty \mathcal{K} : \{\phi(U), V'\} \in \mathcal{C}_\mathcal{K}\} = \{A_\infty(V) : V \in \operatorname{Lat}_\infty \mathcal{H}, \{U, V\} \in \mathcal{C}_\mathcal{H}\} = \{V' \in \operatorname{Lat}_\infty \mathcal{K} : \{A_\infty(U), V'\} \in \mathcal{C}_\mathcal{K}\}$ in posledično $\phi(U) = A_\infty(U)$. □

5.2 Preslikave na $\mathcal{I}(\mathcal{H})$

Predstavimo najprej povezavo med pari preslikav na $\operatorname{Lat} \mathcal{H}$ in preslikavami na $\mathcal{I}(\mathcal{H})$. Če je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{H})$ in $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{K})$, potem pravimo, da preslikava $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ohranja enakost slik in jeder, če zanjo velja

$$\operatorname{im} P = \operatorname{im} Q \iff \operatorname{im} \varphi(P) = \operatorname{im} \varphi(Q), \quad P, Q \in \mathcal{A},$$

in

$$\ker P = \ker Q \iff \ker \varphi(P) = \ker \varphi(Q), \quad P, Q \in \mathcal{A}.$$

Spomnimo se, da $P_U \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ označuje projektor s sliko $U \in \operatorname{Lat} \mathcal{H}$.

Lema 5.2.1. *Naj bo $\varphi : \mathcal{I}(\mathcal{H}) \to \mathcal{I}(\mathcal{K})$ bijektivna preslikava, ki ohranja enakost slik in jeder. Za vsak $U \in \operatorname{Lat} \mathcal{H}$ definirajmo $\phi(U) = \operatorname{im} \varphi(P_U)$ in $\psi(U) = \ker \varphi(I - P_U)$. Potem sta $\phi, \psi : \operatorname{Lat} \mathcal{H} \to \operatorname{Lat} \mathcal{K}$ bijektivni in zanju velja* (5.0.1).

Če je $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ in je $\varphi : \mathcal{I}_n(\mathcal{H}) \to \mathcal{I}_n(\mathcal{K})$ bijektivna preslikava, ki ohranja enakost slik in jeder, potem isti predpis definira bijektivni prelikavi $\phi : \operatorname{Lat}_n \mathcal{H} \to \operatorname{Lat}_n \mathcal{K}$, $\psi : \operatorname{Lat}_{-n} \mathcal{H} \to \operatorname{Lat}_{-n} \mathcal{K}$, ki ohranjata komplementiranost.

Dokaz. Predpostavimo, da φ slika iz $\mathcal{I}(\mathcal{H}) \to \mathcal{I}(\mathcal{K})$, saj se primer $\varphi : \mathcal{I}_n(\mathcal{H}) \to \mathcal{I}_n(\mathcal{K})$ obravnava na isti način. Lahko je preveriti, da sta ϕ in ψ bijektivni. Nadalje za poljuben idepmotent $P \in \mathcal{I}(\mathcal{H})$ velja $\operatorname{im} P = \operatorname{im} P_U$ in $\ker P = \ker(I - P_V)$, kjer je $U = \operatorname{im} P$ in $V = \ker P$. Zato je

$$\operatorname{im}\varphi(P) = \phi(\operatorname{im} P) \quad \text{in} \quad \ker\varphi(P) = \psi(\ker P). \tag{5.2.1}$$

Naj bo $\mathcal{H} = U \oplus V$ za $U, V \in \operatorname{Lat}\mathcal{H}$. Naj bo P idempotent, katerega slika je U, jedro pa V. Iz (5.2.1) sledi, da je $\phi(U) = \operatorname{im}\varphi(P)$ in $\psi(V) = \ker\varphi(P)$, kar nam da $\mathcal{K} = \phi(U) \oplus \psi(V)$. Če je po drugi strani $\mathcal{K} = \phi(U) \oplus \psi(V)$ za neka $U, V \in \operatorname{Lat}\mathcal{H}$, Q idempotent s sliko $\phi(U)$ in jedrom $\psi(V)$ ter $P = \varphi^{-1}(Q)$, potem iz (5.2.1) sledi $\operatorname{im} P = \phi^{-1}(\operatorname{im}\varphi(P)) = \phi^{-1}(\operatorname{im} Q) = U$ in $\ker P = \psi^{-1}(\ker\varphi(P)) = \psi^{-1}(\ker Q) = V$. Zato je $\mathcal{H} = U \oplus V$. □

Posledica 5.2.2. *Naj bo $\varphi : \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \to \mathcal{I}_1(\mathcal{K})$ bijektivna preslikava, ki ohranja enakost slik in jeder. Potem obstaja tak $A \in \mathrm{BCI}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, da je*

$$\varphi(P) = APA^{-1}, \quad P \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H}).$$

Dokaz. Bodita ϕ in ψ kot v prejšnji lemi. Če postavimo $n = 1$ v trditvi 5.1.14, nam slednja pove, da obstaja tak $A \in \mathrm{BCI}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, da je $\phi(U) = A(U)$, $U \in \operatorname{Lat}_1\mathcal{H}$, in $\psi(V) = A(V)$, $V \in \operatorname{Lat}_{-1}\mathcal{H}$. Naj bo $P \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$. Iz (5.2.1) vemo, da je $\operatorname{im}\varphi(P) = A(\operatorname{im} P) = \operatorname{im} APA^{-1}$ in $\ker\varphi(P) = A(\ker P) = \ker APA^{-1}$, zato je $\varphi(P) = APA^{-1}$. □

Izrek 5.2.3. *Naj bosta $\mathcal{H}$ in $\mathcal{K}$ separabilna, $\varphi : \mathcal{I}(\mathcal{H}) \to \mathcal{I}(\mathcal{K})$ pa bijektivna preslikava, ki ohranja enakost slik in jeder. Potem obstajata zaporedje $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}_\infty} \subset \mathrm{BCI}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ in regularno razbitje $\mathbb{Z}_\infty = \mathbb{Z}_\infty(id) \sqcup \mathbb{Z}_\infty(\perp)$, tako da velja:*

- *če je $P \in \mathcal{I}_n(\mathcal{H})$ za $n \in \mathbb{Z}_\infty(id)$, potem je $\varphi(P) = A_n P A_n^{-1}$,*
- *če je $P \in \mathcal{I}_n(\mathcal{H})$ za $n \in \mathbb{Z}_\infty(\perp)$, potem je $\varphi(P) = A_n(I - P^*)A_n^{-1}$.*

Dokaz. Naj bosta $\phi, \psi : \operatorname{Lat}\mathcal{H} \to \operatorname{Lat}\mathcal{K}$ kot v lemi 5.2.1. Iz zaključka leme in izreka 5.1.15 sledi obstoj zaporedja $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}_\infty} \subset \mathrm{BCI}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ in regularnega razbitja $\mathbb{Z}_\infty = \mathbb{Z}_\infty(id) \sqcup \mathbb{Z}_\infty(\perp)$, za katera velja

- če je $U \in \operatorname{Lat}_n\mathcal{H}$ za nek $n \in \mathbb{Z}_\infty(id)$, potem je $\phi(U) = A_n(U)$ in $\psi(U) = A_{-n}(U)$,
- če je $U \in \operatorname{Lat}_n\mathcal{H}$ za nek $n \in \mathbb{Z}_\infty(\perp)$, potem je $\phi(U) = A_n(U^\perp)$ in $\psi(U) = A_{-n}(U^\perp)$.

Naj bo najprej P idempotent, ki leži v $\mathcal{I}_n(\mathcal{H})$ za nek $n \in \mathbb{Z}_\infty(id)$, kar je ekvivalentno s tem, da njegova slika leži v $\operatorname{Lat}_n\mathcal{H}$ za nek $n \in \mathbb{Z}_\infty(id)$, njegovo jedro pa posledično leži v $\operatorname{Lat}_{-n}\mathcal{H}$. Na isti način kot v posledici 5.2.2 dokažemo, da je $\varphi(P) = A_n P A_n^{-1}$.

Privzemimo sedaj, da $\operatorname{im} P$ pripada $\operatorname{Lat}_n\mathcal{H}$ za nek $n \in \mathbb{Z}_\infty(\perp)$. Potem je $\operatorname{im}\varphi(P) = \phi(\operatorname{im} P) = A_n\left((\operatorname{im} P)^\perp\right) = A_n(\ker P^*) = A_n(\operatorname{im}(I - P^*)) = \operatorname{im} A_n(I - P^*)A_n^{-1}$ in $\ker\varphi(P) = \psi(\ker P) = A_n\left((\ker P)^\perp\right) = A_n(\operatorname{im} P^*) = A_n(\ker(I - P^*)) = \ker A_n(I - P^*)A_n^{-1}$. Posledično je $\varphi(P) = A_n(I - P^*)A_n^{-1}$. □

Predstavimo še dualno obliko zgornjega izreka.

Izrek 5.2.4. *Naj bosta $\mathcal{H}$ in $\mathcal{K}$ separabilna, $\varphi : \mathcal{I}(\mathcal{H}) \to \mathcal{I}(\mathcal{K})$ pa takšna bijektivna preslikava, da za vse $P, Q \in \mathcal{I}(\mathcal{H})$ velja*

$$\operatorname{im} P = \operatorname{im} Q \iff \ker \varphi(P) = \ker \varphi(Q)$$

in

$$\ker P = \ker Q \iff \operatorname{im} \varphi(P) = \operatorname{im} \varphi(Q).$$

Potem obstajata zaporedje $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}_\infty} \subset \mathrm{BCI}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ in regularno razbitje $\mathbb{Z}_\infty = \mathbb{Z}_\infty(id) \sqcup \mathbb{Z}_\infty(\perp)$, tako da je

- *če je $P \in \mathcal{I}_n(\mathcal{H})$ za $n \in \mathbb{Z}_\infty(id)$, potem je $\varphi(P) = A_n P^* A_n^{-1}$,*
- *če je $P \in \mathcal{I}_n(\mathcal{H})$ za $n \in \mathbb{Z}_\infty(\perp)$, potem je $\varphi(P) = A_n(I-P)A_n^{-1}$.*

Dokaz je skoraj enak kot dokaz izreka 5.2.3. Dokažema ga lahko tudi tako, da preslikavo φ komponiramo s prelikavo $P \mapsto P^*$ in nato uporabimo izrek 5.2.3.

S pomočjo teh rezultatov bomo predstavili modificiran dokaz izreka 4.0.1. Del dokaza je isti kot v originalu [52], medtem ko je zaključek drugačen.

Izrek 5.2.5. *Če je $\varphi : \mathcal{I}(\mathcal{H}) \to \mathcal{I}(\mathcal{K})$ urejenostni izomorfizem, potem obstaja tak $A \in \mathrm{BCI}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, da imamo bodisi*

$$\varphi(P) = APA^{-1}, \quad P \in \mathcal{I}(\mathcal{H}),$$

bodisi

$$\varphi(P) = AP^*A^{-1}, \quad P \in \mathcal{I}(\mathcal{H}).$$

Dokaz. Spomnimo se definicije (4.1.2) in trditve 4.1.2. V resnici je slednja trditev posplošitev izreka, ki ga želimo dokazati, a sedaj bomo predstavili drugačen zaključek dokaza. Iz prvih štirih korakov dokaza omenjene trditve izvemo, da lahko po morebitnem komponiranju preslikave φ s preslikavo $P \mapsto P^*$, $P \in \mathcal{I}(\mathcal{H})$, predpostavimo, da obstajata takšni bijektivni preslikavi $\tau, \sigma : \mathbb{P}\mathcal{H} \to \mathbb{P}\mathcal{K}$, da velja $\varphi\left(L_{[y]}\right) = L_{\tau([y])}$, $[y] \in \mathbb{P}\mathcal{H}$, in $\varphi\left(K_{[w]}\right) = K_{\sigma([w])}$, $[w] \in \mathbb{P}\mathcal{K}$. To pomeni, da je zožitev $\varphi|_{\mathcal{I}_1(\mathcal{H})} : \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \to \mathcal{I}_1(\mathcal{K})$ bijektivna ter ohranja enakost slik in jeder. Po posledici 5.2.2 je $\varphi(P) = APA^{-1}$, $P \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$. Iz koraka 9 v dokazu trditve 4.1.2 sledi, da je $\varphi(P) = APA^{-1}$, $P \in \mathcal{I}(\mathcal{H})$. □

S pomočjo opisa preslikav, ki ohranjajo enakost slik in jeder je možno dokazati več izrekov o stukturi idempotentov. Kot še en primer podajmo modificiran dokaz rezultatov iz [55].

Izrek 5.2.6. *Naj bo $\varphi : \mathcal{I}(\mathcal{H}) \to \mathcal{I}(\mathcal{K})$ takšna bijektivna preslikava, da za poljubna $P, Q \in \mathcal{I}(\mathcal{H})$ velja*

$$PQ \in \mathcal{I}(\mathcal{H}) \setminus \{0\} \iff \varphi(P)\varphi(Q) \in \mathcal{I}(\mathcal{K}) \setminus \{0\}.$$

Potem obstaja tak $A \in \mathrm{BCI}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, da je

$$\varphi(P) = APA^{-1}, \quad P \in \mathcal{I}(\mathcal{H}).$$

Dokaz. Za idempotent $P = 0$ imamo $PQ \notin \mathcal{I}(\mathcal{H}) \setminus \{0\}$ za vse $Q \in \mathcal{I}(\mathcal{H})$. To je tudi edini idempotent s to lastnostjo, saj za $P \neq 0$ velja $PI \in \mathcal{I}(\mathcal{H}) \setminus \{0\}$. Po drugi strani je PQ neničelen idempotent za vse $Q \in \mathcal{I}(\mathcal{H}) \setminus \{0\}$ natanko tedaj, ko je $P = I$. Zato je $\varphi(0) = 0$ in $\varphi(I) = I$. Nadalje trdimo, da sta za vsak idempotent $P \neq 0, I$ naslednji trditvi ekvivalentni:

- $\operatorname{rang} P = 1$,
- za vsak $Q \in \mathcal{I}(\mathcal{H})$ je PQ neničelen idempotent natanko tedaj, ko je QP neničelen idempotent.

Res, če je $P = x \otimes y^*$ ranga ena in Q poljuben idempotent, potem je po lemi 2.1.1 $PQ = x \otimes (Q^*y)^*$ neničelen idempotent natanko tedaj, ko je $\langle x, Q^*y\rangle = 1$. Ker je $\langle Qx, y\rangle = \langle x, Q^*y\rangle$, je zadnji pogoj izpolnjen natanko tedaj, ko je $QP = (Qx) \otimes y^*$ neničelen idempotent. Če je po drugi strani $P \neq 0, I$ idempotent, ki ni ranga 1, potem obstaja tak obrnljiv operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, da je $T(\operatorname{im} P) = \operatorname{im} P$ in $T(\ker P) = (\operatorname{im} P)^{\perp}$. Zato lahko po morebitni zamenjavi P s TPT^{-1} predpostavimo, da je P projektor z vsaj 2-razsežno sliko in neničelnim jedrom. Izberimo ortonormirana vektorja $x, y \in \operatorname{im} P$ in enotski vektor $u \in \ker P = (\operatorname{im} P)^{\perp}$ ter postavimo $Q = x \otimes x^* + (y+u) \otimes u^*$. Ker imamo $x \perp u$, $x \perp (y+u)$ in $\langle y+u, u\rangle = 1$, je Q idempotent. Nadalje je $QP = x \otimes x^*$ neničelen idempotent. Ampak $PQ = x \otimes x^* + y \otimes u^*$ in $(PQ)^2 = x \otimes x^*$, kar pomeni, da PQ ni idempotent. S tem smo dokazali ekvivalenco zgornjih dveh trditev, posledično pa dobimo $\varphi(\mathcal{I}_1(\mathcal{H})) = \mathcal{I}_1(\mathcal{K})$.

Spomnimo se ekvivalenčne relacije $\sim$ na množici idempotentov ranga 1, ki smo jo definirali pred korakom 2 v dokazu trditve 4.1.2. Naj bosta $P, Q \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$, $P \neq Q$. Trdimo, da sta naslednji trditvi ekvivalentni:

- $P \sim Q$,
- obstaja tak $R \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \setminus \{P, Q\}$, da za vse $T \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ velja naslednja implikacija: če sta PT in QT neničelna idempotenta, je takšen tudi RT.

Res, naj bo $P \sim Q$. Predpostavimo najprej, da je $\operatorname{im} P = \operatorname{im} Q$ oziroma $P = x \otimes y^*$ in $Q = x \otimes z^*$ za neke $x, y, z \in \mathcal{H}$ z lastnostjo $\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle = 1$. Izberimo pojuben $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0, 1\}$ in postavimo $R = x \otimes ((1-\lambda)y + \lambda z)^* \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \setminus \{P, Q\}$. Naj bo $T \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ tak, da sta PT in QT neničelna idempotenta, torej $\langle Tx, y\rangle = \langle Tx, z\rangle = 1$. Potem očitno velja tudi $\langle Tx, (1-\lambda)y + \lambda z\rangle = 1$ oziroma RT je neničelen idempotent. Če pa imamo $\ker P = \ker Q$, potem lahko obstoj iskanega idempotenta R utemeljimo bodisi na povsem analogen način kot v primeru $\operatorname{im} P = \operatorname{im} Q$ bodisi z uporabo dobljenega rezultata za par P^*, Q^* z isto sliko, pri čemer upoštevamo, da iz $\operatorname{rang} P = 1$ sledi, da je PT neničelen idempotent natanko tedaj, ko je takšen tudi $P^*T^* = (TP)^*$.

Naj bodo po drugi strani $P = x \otimes u^*$, $Q = y \otimes v^*$ in $R = z \otimes w^*$ paroma različni idempotenti, za katere je izpolnjen drugi pogoj. Privzamemo lahko, da so x, y in z enotski po tem, ko upoštevamo $P = \frac{x}{\|x\|} \otimes (\|x\|u)^*$ in analogno za Q, R. Dokažimo najprej, da je vsaj ena od množic $\{x, y, z\}$ in $\{u, v, w\}$ linearno odvisna. Predpostavimo nasprotno. Po uporabi podobnostne transformacije lahko privzamemo, da so x, y, z paroma pravokotni. Obstajajo takšni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ in

$t \in [x,y,z]^{\perp}$, da vektor $b = \alpha x + \beta y + \gamma z + t$ ne leži v $[u,v,w]$. Ker to pomeni, da so b, u, v, w linearno neodvisni, obstaja tak vektor a, da je $\langle a,b\rangle = 1$, $\langle a,u\rangle = \frac{1}{\overline{\alpha}}$, $\langle a,v\rangle = \frac{1}{\overline{\beta}}$ in $a \perp w$. Potem je $T = a \otimes b^* \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$, $PT, QT \in \mathcal{I}(\mathcal{H}) \setminus \{0\}$ in $RT = 0$, protislovje.

V naslednjem koraku dokažemo, da mora v primeru, ko so x,y,z linearno neodvisni veljati $P \sim Q$. Predpostavimo nasprotno, da $P \not\sim Q$. Potem sta u in v linearno neodvisna. Iz prejšnjega koraka vemo, da mora potem biti $w \in [u,v]$. Spet lahko predpostavimo, da so x,y,z paroma pravokotni. Ker je $z \in [x,y]^{\perp}$ in $z \notin [w]^{\perp} \supset [u,v]^{\perp}$, obstajata takšna $\alpha, \beta \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, da $b = \alpha x + \beta y \notin [u,v]$. Zdaj lahko najdemo tak vektor a, da je $\langle a,b\rangle = 1$, $\langle a,u\rangle = \frac{1}{\overline{\alpha}}$ in $\langle a,v\rangle = \frac{1}{\overline{\beta}}$. Če je $T = a \otimes b^*$, so potem T, PT in QT idempotenti ranga 1, RT je pa nilpotent, ker je $z \perp b$. To protislovje nas privede do zaključka $P \sim Q$. Na isti način sklepamo, da imamo $P \sim Q$, če so u, v in w linearno neodvisni.

Preostane nam dokazati, da se ne more zgoditi, da bi bilo $\dim[x,y] = \dim[x,y,z] = \dim[u,v] = \dim[u,v,w] = 2$, pri čemer lahko predpostavimo $x \perp y$. Denimo, da se to zgodi, torej je $z = \alpha x + \beta y$ in $w = \gamma u + \delta v$ za neke skalarje α, β, γ, δ. Potem iz $R \neq P$ sledi, da je vsaj eden od β in δ različen od 0, medtem ko nam $R \neq Q$ pove, da je vsaj eden od α in γ neničelen. Posledično lahko najdemo takšna $r, s \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, da je

$$\mu := \left(r\overline{\alpha} + s\overline{\beta}\right)\left(\frac{\gamma}{r} + \frac{\delta}{s}\right) \neq 1.$$

Res, v nasprotnem primeru bi imeli $\overline{\alpha}\gamma + \overline{\beta}\delta = 1$, $\overline{\beta}\gamma = 0$ in $\overline{\alpha}\delta = 0$. Če je $\alpha \neq 0$, bi od tod dobili $\delta = 0$, kar nam da $\overline{\alpha}\gamma = 1$, od koder sledi $\gamma \neq 0$ in posledično $\beta = \delta = 0$, protislovje. Če pa $\alpha = 0$, potem iz $\overline{\beta}\delta = 1$ sklepamo $\beta \neq 0$, kar nam da $\gamma = 0$, spet protislovje. To utemelji obstoj iskanih r in s. Izberimo neničelen $t \in [x,y,u,v]^{\perp}$ in postavimo $b = rx + sy + t$. Potem so b, u, in v linearno neodvisni in zato lahko najdemo $a \in \mathcal{H}$, za katerega velja $\langle a,b\rangle = 1$, $\langle a,u\rangle = \frac{1}{\overline{r}}$ in $\langle a,v\rangle = \frac{1}{\overline{s}}$. Če postavimo $T = a \otimes b^* \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$, tako dobimo $PT, QT \in \mathcal{I}(\mathcal{H}) \setminus \{0\}$, vendar $RT \notin \mathcal{I}(\mathcal{H}) \setminus \{0\}$, ker je $\langle a,w\rangle\langle z,b\rangle = \overline{\mu} \neq 1$.

Sledi, da za vsak par $P, Q \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ velja $P \sim Q$ natanko tedaj, ko je $\varphi(P) \sim \varphi(Q)$. Sedaj lahko simuliramo dokaza korakov 3 in 4 iz dokaza trditve 4.1.2 ter pridemo do naslednjega zaključka:

- za vsak par $[x],[y] \in \mathbb{P}\mathcal{H}$ obstaja takšna $[u],[v] \in \mathbb{P}\mathcal{K}$, da je $\varphi\left(L_{[x]}\right) = L_{[u]}$ in $\varphi\left(R_{[y]}\right) = R_{[v]}$,
- za vsak par $[x],[y] \in \mathbb{P}\mathcal{H}$ obstaja takšna $[u],[v] \in \mathbb{P}\mathcal{K}$, da je $\varphi\left(L_{[x]}\right) = R_{[u]}$ in $\varphi\left(R_{[y]}\right) = L_{[v]}$.

Obravnavajmo najprej prvo možnost. Iz posledice 5.2.2 sledi, da je $\varphi(P) = APA^{-1}$, $P \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$, za nek $A \in \mathrm{BCI}(\mathcal{H},\mathcal{K})$. Naj bo $P \in \mathcal{I}(\mathcal{H})$ poljuben in $x \in \mathcal{H}$ neničelen vektor. Potem je $x \in \operatorname{im} P$ natanko tedaj, ko je PQ neničelen idempotent za vsak $Q \in L_{[x]}$. Res, če je $x \in \operatorname{im} P$ in $Q = x \otimes y^*$, kjer je $\langle x,y\rangle = 1$, potem je $PQ = Q$. Če je po drugi strani $x \notin \operatorname{im} P$, potem imamo bodisi $Px = 0$ bodisi sta Px in x linearno neodvisna. V vsakem primeru lahko najdemo tak $y \in \mathcal{H}$, da je $\langle x,y\rangle = 1$ in $\langle Px,y\rangle = 0$. Posledično je $Q = x \otimes y^* \in L_{[x]}$, vendar PQ ni neničelen idempotent.

Sledi, da je $x \in \operatorname{im} P$ natanko tedaj, ko je $\varphi(P)\, AQA^{-1}$ neničelen idempotent za vsak $Q \in L_{[x]}$. Ker je $\varphi(P)\, AQA^{-1} = A(A^{-1}\varphi(P)\, AQ)A^{-1}$, je torej $x \in \operatorname{im} P \iff x \in \operatorname{im} A^{-1}\varphi(P)\, A = A^{-1}(\operatorname{im}\varphi(P))$. Tako je $\operatorname{im}\varphi(P) = A(.\operatorname{im} P) = \operatorname{im} APA^{-1}$ Nadalje imamo $x \in (\ker P)^{\perp} = \operatorname{im} P^*$ natanko tedaj, ko je P^*Q neničelen idempotent za vsak $Q \in L_{[x]}$. Ker je Q ranga 1, je ta pogoj izpolnjen natanko tedaj, ko je QP^* neničelen idempotent, kar je res natanko tedaj, ko je $PQ^* = (QP^*)^*$ neničelen idempotent. Zaključimo, da je $x \in (\ker P)^{\perp}$ natanko tedaj, ko je PQ neničelen idempotent za vsak $Q \in R_{[x]}$. Spet sklepamo, da je $\ker\varphi(P) = \ker APA^{-1}$, torej $\varphi(P) = APA^{-1}$.

Obravnavajmo še drugo možnost. V tem primeru je preslikava $P \mapsto \varphi(P^*)$, $P \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$, bijekcija $\mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \to \mathcal{I}_1(\mathcal{K})$, ki ohranja enakost slik in jeder. Zato je $\varphi(P) = AP^*A^{-1}$, $P \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$. Na isti način kot v prejšnjem primeru sklepamo, da je $\varphi(P) = AP^*A^{-1}$, $P \in \mathcal{I}(\mathcal{H})$. Vendar ta preslikava ne zadošča predpostavkam izreka. Res, dovolj je dokazati, da obstajata takšna $P, Q \in \mathcal{I}(\mathcal{H})$, da PQ ni neničelen idempotent, P^*Q^* pa je. V ta namen izberimo ortonormirano množico $\{x, y, z\}$ v $\mathcal{H}$. Postavimo $P = x \otimes (x+y)^* + z \otimes z^*$ in $Q = y \otimes y^* + z \otimes z^*$. Potem sta P in Q idempotenta ranga 2, $PQ = x \otimes y^* + z \otimes z^*$ in $(PQ)^2 = P^*Q^* = z \otimes z^*$. S tem je dokaz zaključen. $\square$

Literatura

[1] E. Artin, *Geometric Algebra*, Interscience, New York, 1957.

[2] R. Baer, *Linear Algebra and Projective Geometry*, Academic Press, New York, 1952.

[3] L. Beasley, Linear operators on matrices: the invariance of rank-k matrices, *Linear Algebra Appl.* **107** (1988), 161–167.

[4] L. Beasley, Linear transformations on matrices: The invariance of the third elementary symmetric function, *Canad. J. Math.* **22** (1970), 746–752.

[5] A. Blunck, H. Havlicek, On bijections that preserve complementarity of subspaces, *Discrete Math.* **301** (2005), 46–56.

[6] M. Brešar, Commuting traces of biadditive mappings, commutativity-preserving mappings and Lie mappings, *Trans. Amer. Math. Soc.* **335** (1993), 525–546.

[7] M. Brešar, P. Šemrl, An extension of the Gleason-Kahane-Żelazko theorem: a possible approach to Kaplansky's problem, *Expo. Math.* **26** (2008), 269–277.

[8] M. Brešar, P. Šemrl, Invertibility preserving maps preserve idempotents. *Michigan Math. J.* **45** (1998), 483–488.

[9] M. Brešar, P. Šemrl, Linear preservers on $B(X)$, *Banach Cent. Publ.* **38** (1997), 49–58.

[10] M. Brešar, P. Šemrl, On local automorphisms and mappings that preserve idempotents, *Studia Math.* **113** (1995), 101–108.

[11] W. L. Chow, On the geometry of algebraic homogeneous spaces, *Ann. Math.* **50** (1949), 32–67.

[12] J. T. Chan, C. K. Li, N.-S. Sze, Mappings on matrices: Invariance of functional values of matrix products, *J. Aust. Math. Soc.* **81** (2006), 165–184.

[13] J. T. Chan, C. K. Li, N.-S. Sze, Mappings preserving spectra of products of matrices, *Proc. Amer. Math. Soc.* **135** (2007), 977–986.

[14] S. Clark, C. K. Li, L. Rodman, Spectral radius preservers of products of nonnegative matrices, *Banach J. Math. Anal.* **2** (2008), 107–120.

[15] M. Dobovišek, B. Kuzma, G. Lešnjak, C.K. Li, T. Petek, Mappings that preserve pairs of operators with zero triple Jordan product, *Linear Algebra Appl.* **426** (2007), 255–279.

[16] C. A. Faure, *An Elementary Proof of the Fundamental Theorem of Projective Geometry*, Geom. Dedicata **90** (2002), 145–151.

[17] P. A. Fillmore, W. E. Longstaff, On isomorphisms of lattices of closed subspaces, *Can. J. Math.* **36** (1984), 820–829.

[18] V. Forstall, A. Herman, C.K. Li, N.S. Sze, V. Yannello, Preservers of eigenvalue inclusion sets of matrix products, *Linear Algebra Appl.* **434** (2011), 285–293.

[19] G. Frobenius, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen, *Sitzungsber. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin* (1897), 994–1015.

[20] J. Giol, Segments of bounded linear idempotents on a Hilbert space, *J. Funct. Anal.* **229** (2005), 405–423.

[21] A. M. Gleason, A characterization of maximal ideals, *J. Analyse Math.* **19** (1967), 171–172.

[22] W. T. Gowers, B. Maurey, The unconditional basic sequence problem, *J. Amer. Math. Soc.* **6** (1993), 851–874.

[23] A. Guterman, C.K. Li, P. Šemrl, Some general techniques on linear preserver problems, *Linear Algebra Appl.* **315** (2000), 61–81.

[24] S. P. Gudder, Representations of groups as automorphisms on orthomodular lattices and posets, *Canad. J. Math.* **23** (1971), 659–673.

[25] J. Hartman, A. Herman, C.K. Li, Preservers of eigenvalue inclusion sets, *Linear Algebra Appl.* **433** (2010), 1038–1051.

[26] J.C. Hou, C.K. Li, N.C. Wong, Jordan isomorphisms and maps preserving spectra of certain operator products, *Studia Math.* **184** (2008), 31–47.

[27] J.C. Hou, C.K. Li, N.C. Wong, Maps preserving the spectrum of generalized Jordan product of operators, *Linear Algebra Appl.* **432** (2010), 1049–1069.

[28] A. A. Jafarian, A. R. Sourour, Spectrum-preserving linear maps, *J. Funct. Anal.* **66** (1986), 255–261.

[29] A. A. Jafarian, A survey of invertibility and spectrum preserving linear maps, *Bull. Iranian Math. Soc.* **35** (2009), 1–10.

[30] D. G. James, Linear transformations of the second elementary function, *Linear Multilinear Algebra* **10** (1981), 347–349.

[31] J.-P. Kahane, W. Żelazko, A characterization of maximal ideals in commutative Banach algebras, *Studia Math.* **29** (1968), 339–343.

[32] S. Kakutani, G. W. Mackey, Ring and lattice characterizations of complex Hilbert space, *Bull. Amer. Math. Soc.* **52** (1946), 727–733.

[33] I. Kaplansky, *Algebraic and Analytic Aspects of Operator Algebras*, American Mathematical Society, Providence, 1970.

[34] H. Kestelman, Automorphisms of the field of complex numbers, *Proc. London Math. Soc.* **53** (1951), 1–12.

[35] C.K. Li, S. Pierce, Linear preserver problems, *Amer. Math. Monthly* **108** (2001), 591–605.

[36] C.K. Li, L. Plevnik, P. Šemrl, Preservers of matrix pairs with a fixed inner product value, *Oper. Matrices* **6** (2012), 433–464.

[37] C.K. Li, E. Poon, N.S. Sze, Preservers for norms of Lie product, *Operators and Matrices* **3** (2009), 187–203.

[38] C.K. Li, L. Rodman, Preservers of spectral radius, numerical radius, or spectral norm of the sum on nonnegative matrices, *Linear Algebra Appl.* **430** (2009), 1739–1761.

[39] C.K. Li, P. Šemrl, N.K. Sze, Maps preserving the nilpotency of products of operators, *Linear Algebra Appl.* **424** (2007), 222–239.

[40] C.K. Li, N.K. Tsing, Linear preserver problems: A brief introduction and some special techniques, *Linear Algebra Appl.* **162/164** (1992), 217–235.

[41] Y.-F. Lin, T.-L. Wong, A note on 2-local maps, *Proc. Edinb. Math. Soc.* **49** (2006), 701–708.

[42] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, On the complemented subspaces problem, *Israel J. Math.* **9** (1971), 263–269.

[43] G. W. Mackey, Isomorphisms of normed linear spaces, *Ann. Math.* **43** (1942), 244–260.

[44] M. Marcus, R. Purves, Linear transformations on algebras of matrices: the invariance of the elementary symmetric functions, *Canad. J. Math.* **11** (1959), 383–396.

[45] M. Marcus, B. N. Moyls, Linear transformations on algebras of matrices, *Canad. J. Math.* **11** (1959), 61–66.

[46] M. Marcus, B. N. Moyls, Transformations on tensor product spaces, *Pacific J. Math.* **9** (1959), 1215–1221.

[47] L. Molnár, *Selected preserver problems on algebraic structures of linear operators and on function spaces*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 2007.

[48] L. Molnár, P. Šemrl, Nonlinear commutativity preserving maps on self-adjoint operators, *Q. J. Math.* **56** (2005), 589–595.

[49] M. Omladič, On operators preserving commutativity, *J. Funct. Anal.* **66** (1986), 105–122.

[50] M. Omladič, H. Radjavi, P. Šemrl, Preserving commutativity, *J. Pure Appl. Algebra*, **156** (2001), 309–328.

[51] M. Omladič, P. Šemrl, Additive mappings preserving operators of rank one, *Linear Algebra Appl.* **182** (1993), 239–256.

[52] P. G. Ovchinnikov, Automorphisms of the poset of skew projections, *J. Funct. Anal.* **115** (1993), 184–189.

[53] M. Pankov, Order preserving transformations of the Hilbert Grassmannian, *Arch. Math.* **89** (2007), 81–86.

[54] M. Pankov, Order preserving transformations of the Hilbert Grassmannian (note on the complex case), *Arch. Math.* **90** (2008), 528–529.

[55] T. Petek, Mappings preserving the idempotency of products of operators, *Linear Multilinear Algebra* **58** (2010), 903–925.

[56] S. Pierce et al., A survey of linear preserver problems, *Linear Multilinear Algebra* **33** (1992), 1–129.

[57] L. Plevnik, Maps on essentially infinite idempotent operators, *J. Math. Anal. Appl.* **387** (2012), 24–32.

[58] L. Plevnik, *Ohranjevalci matričnih parov s fiksno vrednostjo skalarnega produkta: diplomsko delo*, Ljubljana, 2010.

[59] L. Plevnik, P. Šemrl, Maps preserving complementarity of closed subspaces of a Hilbert space, *Can. J. Math.* (2013), http://dx.doi.org/10.4153/CJM-2013-025-4.

[60] P. Šemrl, Commutativity preserving maps, *Linear Algebra Appl.* **429** (2008), 1051–1070.

[61] P. Šemrl, Comparability preserving maps on bounded observables, *Integral Equations Operator Theory* **62** (2008), 441–454.

[62] P. Šemrl, Comparability preserving maps on Hilbert space effect algebras, *Comm. Math. Phys.* **313** (2012), 375–384.

[63] P. Šemrl, Hua's fundamental theorem of the geometry of matrices, *J. Algebra* **272** (2004), 801–837.

[64] P. Šemrl, Maps on idempotent matrices over division rings, *J. Algebra* **298** (2006), 142–187.

[65] P. Šemrl, Maps on idempotents, *Studia Math.* **169** (2005), 21–44.

[66] P. Šemrl, Non-linear commutativity preserving maps, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **71** (2005), 781–819.

[67] P. Šemrl, On Hua's fundamental theorem of the geometry of rectangular matrices, *J. Algebra* **248** (2002), 366–380.

[68] P. Šemrl, Orthogonality preserving transformations on the set of n-dimensional subspaces of a Hilbert space, *Illinois J. Math.* **48** (2004), 567–573.

[69] P. Šemrl, Symmetries on bounded observables: a unified approach based on adjacency preserving maps, *Integral Equations Operator Theory* **72** (2012), 7–66.

[70] A. R. Sourour, Invertibility preserving linear maps on $L(X)$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996), 13–30.

[71] U. Uhlhorn, Representation of symmetry transformations in quantum mechanics, *Ark. Fysik* **23** (1963), 307–340.

[72] Z. X. Wan, *Geometry of matrices*, World Scientific Publishing, Singapore 1996.

[73] W. Żelazko, A characterization of multiplicative linear functionals in complex Banach algebras, *Studia Math.* **30** (1968), 83–85.

[74] X. Zhang, N.-S. Sze, Additive rank-one preservers between spaces of rectangular matrices, *Linear Multilinear Algebra* **53** (2005), 417–425.

Stvarno kazalo