UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA MATEMATIKO
Modul Matematika - 3. stopnja

Kris Stopar

HOLOMORFNI SPREJI V KOMPLEKSNI ANALIZI IN GEOMETRIJI

Doktorska disertacija

MENTOR: izred. prof. dr. Jasna Prezelj

Ljubljana, 2013

Izjava

Podpisani Kris Stopar, izjavljam:

- da sem doktorsko disertacijo z naslovom *Holomorfni spreji v kompleksni analizi in geometriji* izdelal samostojno pod mentorstvom izred. prof. dr. Jasne Prezelj in

- da Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani dovoljujem objavo elektronske oblike svojega dela na spletnih straneh.

Ljubljana, dne .... Podpis: ....

Zahvala

Zahvalil bi se mentorici izred. prof. dr. Jasni Prezelj za koristne diskusije in akad. prof. dr. Francu Forstneriču, ki me je seznanil z obravnavanim problemom, ter družini in prijateljem, ki so mi stali ob strani pri pisanju doktorske disertacije.

Povzetek

Naj bo $\pi : Z \to X$ holomorfna submerzija iz kompleksne mnogoterosti Z na kompleksno mnogoterost X in $D \Subset X$ 1-konveksna domena s strogo psevdokonveksnim robom. V disertaciji dokažemo, da pod določenimi predpostavkami vedno obstaja sprej π-prerezov nad $\bar{D}$, ki ima predpisano jedro, fiksira izjemno množico E domene D in je dominanten na $\bar{D} \setminus E$. Vsak prerez v tem spreju je razreda $\mathcal{C}^k(\bar{D})$ in holomorfen na D. Kot posledico dobimo več aproksimacijskih rezultatov za π-prereze. Med drugim dokažemo, da lahko π-prereze, ki so razreda $\mathcal{C}^k(\bar{D})$ in holomorfni na D aproksimiramo v $\mathcal{C}^k(\bar{D})$ topologiji s π-prerezi, ki so holomorfni v odprtih okolicah množice $\bar{D}$. Pod dodatnimi predpostavkami na submerzijo dobimo tudi aproksimacijo z globalnimi holomorfnimi π-prerezi in princip Oka nad 1-konveksnimi mnogoterostmi. Vključimo tudi rezultat o obstoju pravih holomorfnih preslikav iz 1-konveksnih domen v q-konveksne mnogoterosti.

Math. Subj. Class. (2010): 32E30, 32F10, 32L99, 32T15.

Ključne besede: 1-konveksna domena, 1-konveksen Cartanov par, Cartanova lema, sprej, sprej prerezov, aproksimacija, princip Oka, prava holomorfna preslikava.

Abstract

Let $\pi : Z \to X$ be a holomorphic submersion of a complex manifold Z onto a complex manifold X and $D \Subset X$ a 1-convex domain with strongly pseudoconvex boundary. We prove that under certain conditions there always exists a spray of π-sections over $\bar{D}$ which has prescribed core, fixes the exceptional set E of D, and is dominating on $\bar{D} \setminus E$. Each section in this spray is of class $\mathcal{C}^k(\bar{D})$ and holomorphic on D. As a consequence we obtain several approximation results for π-sections. In particular, we prove that π-sections which are of class $\mathcal{C}^k(\bar{D})$ and holomorphic on D can be approximated in the $\mathcal{C}^k(\bar{D})$ topology by π-sections that are holomorphic in open neighborhoods of $\bar{D}$. Under additional assumptions on the submersion we also get approximation by global holomorphic π-sections and the Oka principle over 1-convex manifolds. We include a result on the existance of proper holomorphic maps from 1-convex domains into q-convex manifolds.

Math. Subj. Class. (2010): 32E30, 32F10, 32L99, 32T15.

Keywords: 1-convex domain, 1-convex Cartan pair, Cartan lemma, spray, spray of sections, approximation, Oka principle, proper holomorphic map.

Kazalo

Uvod

Moderne metode v kompleksni analizi in geometriji v veliki meri temeljijo na rešitvah nehomogene Cauchy-Riemannove enačbe z ocenami. Med najpomembnejše sodijo Hörmanderjeva L^2-metoda in sorodna $\bar{\partial}$-Neumannova metoda, ki so jo v 60-ih letih prejšnjega stoletja razvili Hörmander [35], [36], Kohn [38], [39] in ostali, ter metoda integralskih operatorjev s holomorfnimi jedri, ki se je izoblikovala nekoliko kasneje v delih matematikov kot so Henkin, Arrelano, Lieb, Øvrelid in drugi (glej na primer [42]). Omeniti velja še metodo Ohsawe in Takegoshija [45] za razširitve holomorfnih funkcij v L^2 prostorih s plurisubharmoničnimi utežmi, ter Berndtssonove metode uteženih integralnih jeder.

Vse zgoraj omenjene metode so linearne in jih je za uporabo v nelinearnih problemih potrebno prilagoditi in dopolniti. Eden izmed takih nelinearnih problemov je klasična Oka-Grauert teorija o klasifikaciji holomorfnih G-svežnjev nad Steinovimi prostori [24], [25]. Linearizacija osnovnega problema v tej teoriji je bila dosežena preko aproksimacijskih izrekov za holomorfne preslikave v Liejeve grupe ter Cartanove leme o razcepu in metode lepljenja za take preslikave. Ta teorije je bila bistveno posplošena v delu Gromova [30]. Gromov je Liejeve grupe nadomestil z bistveno večjim razredom t.i. eliptičnih mnogoterosti, tj. mnogoterosti z globalnim dominantnim sprejem. Prav v njegovem delu je metoda aproksimacije in lepljenja holomorfnih objektov s pomočjo sprejev prvič dobila obrise splošnejše teorije, vendar je ostalo še nekaj nerešenih tehničnih problemov.

V zadnjih letih je teorija sprejev in njihovih aplikacij postala še veliko bolj splošna in uporabna skozi dela Forstneriča, Prezljeve in Drinovec-Drnovškove [8], [9], [10], [14], [16], [17], [20], [22], [21] in drugih. Del te teorije temelji na lokalnih sprejih prerezov, ki obstajajo v bolj splošni situaciji, namesto na globalnih sprejih, ki obstajajo le na določenih mnogoterostih. Lokalni spreji prerezov so se izkazali kot zelo uporabno orodje pri obravnavi cele vrste problemov, kot so:

- Oka-Grauert-Gromov Teorija na Steinovih mnogoterostih s strogo psevdokonveksnim robom [9],
- aproksimacija s holomorfnimi preslikavami v okolici domene [9],
- konstrukcija odprtih Steinovih okolic vloženih Steinovih podvarietet s strogo psevdokonveksnim robom [15], [52],
- analiza Banachove, Hilbertove ali Fréchetove mnogoterostne strukture prostora holomorfnih preslikav v kompleksne mnogoterosti [15],

- nove konstrukcije pravih holomorfnih preslikav [10],
- nov pristop k obravnavi disk funkcionalov [11],

in mnogi drugi.

V disertaciji razširimo tehnike sprejev, ki so bile razvite v [8], [9], [10], [13] in z njihovo uporabo postavimo nekatere izmed zgornjih rezultatov v splošnejši kontekst 1-konveksnih prostorov. Naši rezultati razširjajo rezultate Henkina in Leitererja [33] ter Prezljeve [46]. Pri tem velja poudariti predvsem princip Oka za prereze holomorfnih svežnjev z Oka vlakni nad kompaktnimi 1-konveksnimi domenami s strogo psevdokonveksnim robom (Izrek 4.2.3).

V prvem poglavju podamo pregled relevantnih rezultatov iz področja plurisubharmoničnih funkcij in 1-konveksnih prostorov, ki jih bomo potrebovali. V drugem poglavju konstruiramo omejen linearen rešitveni operator za nehomogeno $\bar{\partial}$-enačbo za določene $(0, 1)$-forme na 1-konveksnih domenah s strogo psevdokonveksnim robom (Trditev 2.3.1). V tretjem poglavju najprej definiramo spreje prerezov (Definicija 3.1.2) in 1-konveksne Cartanove pare (Definicija 3.2.1) ter dokažemo verzijo posplošene Cartanove leme o razcepu s $\mathcal{C}^k$-ocenami do roba za 1-konveksne Cartanove pare (Izrek 3.2.2). Nato pokažemo, kako lahko s pomočjo te leme lepimo spreje prerezov nad 1-konveksnimi Cartanovimi pari (Trditev 3.3.1). Ta metoda lepljenja je glavno orodje, ki ga potrebujemo v preostanku disertacije. Na koncu poglavja obravnavamo obstoj sprejev prerezov nad 1-konveksnimi domenami s strogo psevdokonveksnim robom, ki imajo predpisano jedro, fiksirajo izjemno množico E in so dominantni izven E (Izrek 3.4.3). V četrtem poglavju dokažemo lokalen aproksimacijski rezultat Mergelyanovega tipa za prereze holomorfnih submerzij nad 1-konveksnimi domenami (Izrek 4.1.1) in verzijo principa Oka z aproksimacijo za prereze določenih holomorfnih svežnjev nad kompaktnimi 1-konveksnimi domenami, ki so gladki do roba (Izrek 4.2.3). Vključimo še rezultat o obstoju pravih holomorfnih preslikav iz 1-konveksnih domen v q-konveksne mnogoterosti (Izrek 4.3.1).

Poglavje 1

1-konveksnost

1.1 Plurisubharmonične funkcije

1.1.1 Harmonične in subharmonične funkcije

Preden definiramo harmonične in subharmonične funkcije se spomnimo definicije polzveznosti.

Definicija 1.1.1. Naj bo X realna mnogoterost. Funkcija $u : X \to [-\infty, \infty)$ je *navzgor polzvezna*, če je

$$\limsup_{z \to a} u(z) \leq u(a) \quad \text{za vsak } a \in X,$$

oziroma ekvivalentno, če je

$$\{z \in X;\ u(z) < c\} \text{ odprta množica} \quad \text{za vsak } c \in \mathbb{R}.$$

Naj $\mathbb{D}(a, r) := \{z \in \mathbb{C};\ |z - a| < r\}$ označuje odprt disk s središčem a in radijem r ter $\mathbb{D} := \mathbb{D}(0, 1)$ odprt enotski disk s središčem v izhodišču. Spomnimo se, da je *Laplaceov operator* Δ na $\mathbb{C}$ v koordinatah $z = x + iy$ definiran z

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

Definicija 1.1.2. Naj bo D domena v $\mathbb{C}$. Funkcija $h : D \to \mathbb{R}$ je *harmonična*, če ustreza enemu izmed naslednjih ekvivalentnih pogojev:

(i) u je zvezna in zadošča lastnosti povprečne vrednosti, tj. velja

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\varphi})\ d\varphi,$$

čim je $\mathbb{D}(a, r) \Subset D$,

(ii) u je razreda $\mathcal{C}^2$ in velja $\Delta u = 0$ na D,

(iii) u je lokalno realni del holomorfne funkcije.

Iz točke (iii) v Definiciji 1.1.2 med drugim sledi, da je harmoničnost lokalna lastnost in da je vsaka harmonična funkcija realno analitična.

Definicija 1.1.3. Naj bo D domena v $\mathbb{C}$. Navzgor polzvezna funkcija $u : D \to [-\infty, \infty)$ je *subharmonična*, če ustreza enemu izmed naslednjih ekvivalentnih pogojev:

(i) za vsak kompakt $K \subset D$ in vsako zvezno funkcijo $h : K \to \mathbb{R}$, ki je harmonična v notranjosti K in ustreza $u \leq h$ na robu ∂K, velja $u \leq h$ na K,

(ii) za vsak disk $\mathbb{D}(a, r) \Subset D$ in vsak holomorfen polinom P, ki ustreza $u \leq \operatorname{Re} P$ na robu $\partial\mathbb{D}(a, r)$, velja $u \leq \operatorname{Re} P$ na $\mathbb{D}(a, r)$,

(iii) u ustreza lastnosti podpovprečne vrednosti, tj. velja

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\varphi})\ d\varphi,$$

čim je $\mathbb{D}(a, r) \Subset D$.

Če je funkcija u razreda $\mathcal{C}^2$, so ti pogoji ekvivalentni pogoju

(iv) $\Delta u \geq 0$ na D.

V točki (iii) v Definiciji 1.1.3 je dovolj, da pogoj velja za dovolj majhne r, zato je tudi subharmoničnost lokalna lastnost. Za razliko do harmoničnih funkcij, pa subharmonične funkcije niso nujno gladke. V smislu distribucij je pogoj (iv) smiseln tudi za funkcije, ki niso razreda $\mathcal{C}^2$. Osnovne lastnosti harmoničnih in subharmoničnih funkcij lahko najdemo v [1]. Pojma harmoničnosti in subharmoničnosti lahko seveda na očiten način posplošimo na primer večih spremenljivk, vendar ta posplošitev v kompleksni analizi ni preveč uporabna. Veliko bolj uporabna je posplošitev na tako imenovane pluriharmonične in plurisubharmonične funkcije, ki jo bomo predstavili v naslednjem razdelku.

1.1.2 Plurisubharmonične funkcije

Pojem plurisubharmoničnosti predstavlja eno izmed možnih posplošitev pojma subharmoničnosti na primer večih spremenljivk. Plurisubharmonične funkcije so eden izmed najpomembnejših razredov funkcij v kompleksni analizi in geometriji. Uvedla sta jih Oka in Lelong leta 1942. V tem razdelku bomo predstavili osnovne definicije in lastnosti plurisubharmoničnih funkcij (glej na primer [48]).

Definicija 1.1.4. Naj bo D domena v $\mathbb{C}^n$. Navzgor polzvezna funkcija $u : D \to [-\infty, \infty)$ je:

(i) *pluriharmonična*, če je za vsak $a \in D$ in $v \in \mathbb{C}^n$ funkcija $u_{a,v} : \lambda \mapsto u(a + \lambda v)$ harmonična na množici $\{\lambda \in \mathbb{C};\ a + \lambda v \in D\}$,

(ii) *plurisubharmonična*, če je za vsak $a \in D$ in $v \in \mathbb{C}^n$ funkcija $u_{a,v} : \lambda \mapsto u(a+\lambda v)$ subharmonična na množici $\{\lambda \in \mathbb{C};\ a + \lambda v \in D\}$.

Pogoj v Definiciji 1.1.4 pomeni, pa je navzgor polzvezna funkcija plurisubharmonična (pluriharmonična) natanko tedaj, ko je je subharmonična (harmonična) na vsaki premici oziroma v vseh smereh. Izkaže se, da je navzgor polzvezna funkcija pluriharmonična natanko tedaj, ko je lokalno realni del holomorfne funkcije.

Definicija 1.1.5. Naj bo D domena v $\mathbb{C}^n$. Funkcija $u : D \to [-\infty, \infty)$ je *strogo plurisubharmonična*, če za vsako gladko funkcijo $\psi : D \to \mathbb{R}$ s kompaktnim nosilcem obstaja $\epsilon > 0$, da je $u + t\psi$ plurisubharmonična funkcija za vsak $t \in [0, \epsilon]$.

Strogo plurisubharmonične funkcije so torej podrazred tistih plurisubharmoničnih funkcij, katerih majhne perturbacije so še vedno plurisubharmonične. Zaradi tega dejstva so strogo plurisubharmonične funkcije še posebej uporabne.

Za boljše razumevanje (stroge) plurisubharmoničnosti jo bomo sedaj postavili v bolj geometrijski kontekst. V ta namen uvedemo tako imenovano Levijevo formo. Naj bo $a \in D \subset \mathbb{C}^n$ in $u : D \to \mathbb{R}$ funkcija razreda $\mathcal{C}^2$. Za dovolj majhne $v \in \mathbb{C}^n$ po Taylorjevem razvoju velja

$$u(a+v) = u(a) + 2\operatorname{Re}\Big(\sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial z_j}(a) v_j\Big) + \operatorname{Re}\Big(\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial z_k}(a) v_j v_k\Big) + \\ + \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) v_j \bar{v}_k + o(|v|^2).$$

Hermitsko kvadratno formo

$$L_a u(v) := \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(a) v_j \bar{v}_k$$

imenujemo *Levijeva forma* funkcije u v točki a. Izkaže se, da je Levijeva forma tisti del realne Hessejeve forme (tj. kvadratnega dela Taylorjevega razvoja), ki se ohranja pri holomorfni zamenjavi koordinat. Naj bosta $D \subset \mathbb{C}^n$ in $\tilde{D} \subset \mathbb{C}^m$ domeni, $f : \tilde{D} \to D$ holomorfna preslikava. Naj bo $u : D \to \mathbb{R}$ funkcija razreda $\mathcal{C}^2$ in $\tilde{u} = u \circ f : \tilde{D} \to \mathbb{R}$. Ker za vsaka $J, K = 1, \ldots, m$ velja

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z_J \partial \bar{z}_K}(a) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\big(f(a)\big) \frac{\partial f_j}{\partial z_J}(a) \overline{\frac{\partial f_k}{\partial z_K}(a)},$$

dobimo

$$L_a \tilde{u}(v) = \sum_{J,K=1}^m \left(\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\big(f(a)\big) \frac{\partial f_j}{\partial z_J}(a) \overline{\frac{\partial f_k}{\partial z_K}(a)} v_J \bar{v}_K\right) = \\ = \sum_{j,k=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\big(f(a)\big) \sum_{J=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial z_J}(a) v_J \overline{\sum_{K=1}^m \frac{\partial f_k}{\partial z_K}(a) v_K}\right).$$

Pri tem velja

$$\sum_{J=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial z_J}(a) v_J = \partial_a f_j(v) = \big(\partial_a f(v)\big)_j \text{ in } \qquad \sum_{K=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial z_K}(a) v_K = \partial_a f_k(v) = \big(\partial_a f(v)\big)_k.$$

Tako imamo

$$L_a \tilde{u}(v) = L_{f(a)} u\big(\partial_a f(v)\big). \tag{1.1}$$

Spomnimo se, da imamo izomorfizem $\mathbb{C}^n \cong T_z^{1,0}\mathbb{C}^n \cong T_z\mathbb{C}^n$, ki identificira

$$v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{C}^n, \quad \mathcal{V} = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial z_j} \in T_z^{1,0}\mathbb{C}^n \quad \text{in} \quad \mathcal{V} + \overline{\mathcal{V}} \in T_z\mathbb{C}^n,$$

ter

$$iv = (iv_1, \ldots, iv_n) \in \mathbb{C}^n, \quad i\mathcal{V} = i\sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial z_j} \in T_z^{1,0}\mathbb{C}^n \quad \text{in} \quad i\mathcal{V} + \overline{i\mathcal{V}} \in T_z\mathbb{C}^n.$$

Naj bo

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz_j \wedge d\bar{z}_k = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial} u$$

2-forma. Ker velja

$$\langle dz_j \wedge d\bar{z}_k, (\mathcal{V} + \overline{\mathcal{V}}) \wedge (i\mathcal{V} + \overline{i\mathcal{V}})\rangle = -2i v_j \bar{v}_k,$$

dobimo

$$\langle \omega_a, (\mathcal{V} + \overline{\mathcal{V}}) \wedge (i\mathcal{V} + \overline{i\mathcal{V}})\rangle = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(a) v_j \bar{v}_k = L_a u(v).$$

Tako dobimo (pri tej identifikaciji) brezkoordinatno definicijo Levijeve forme

$$Lu(v) = \frac{i}{2}\langle \partial\bar{\partial} u, v \wedge iv\rangle \quad \text{za } v \in \mathbb{C}^n. \tag{1.2}$$

S pomočjo Levijeve forme dobimo naslednjo karakterizacijo (strogo) plurisubharmoničnih funkcij.

Trditev 1.1.6. *Naj bo $D \subset \mathbb{C}^n$ in $u : D \to \mathbb{R}$ funkcija razreda $\mathcal{C}^2$. Tedaj velja:*

(i) *u je plurisubharmonična natanko tedaj, ko je njena Levijeva forma $L_z u$ nenegativno definitna na $\mathbb{C}^n$ v vsaki točki $z \in D$,*

(ii) *u je strogo plurisubharmonična natanko tedaj, ko je njena Levijeva forma $L_z u$ pozitivno definitna na $\mathbb{C}^n$ v vsaki točki $z \in D$.*

Dokaz. Naj bo $u_{a,v}$ kot v Definiciji 1.1.4. Velja

$$\Delta u_{a,v}(\lambda) = 4\frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial\bar{\lambda}}u(a+\lambda v) = 4\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial\bar{z}_k}(a+\lambda v)\bar{v}_k\right) =$$
$$= 4\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}(a+\lambda v)v_j\bar{v}_k = 4L_{a+\lambda v}u(v).$$

Od tod očitno sledi točka (i).

Za dokaz točke (ii) denimo najprej, da je u strogo plurisubharmonična funkcija. Fiksirajmo točko $a \in D$ in izberimo gladko funkcijo $\chi : D \to [0,1]$ s kompaktnim nosilcem, da je $\chi = 1$ v okolici točke a. Definiramo $\psi : D \to \mathbb{R}$ s predpisom $\psi(z) = -|z|^2\chi(z)$, to je očitno gladka funkcija s kompaktnim nosilcem. V okolici točke a velja $\psi(z) = -|z|^2$, torej $L_a\psi(v) = -|v|^2$. Po definiciji obstaja $\epsilon > 0$, da je funkcija $u + \epsilon\psi$ plurisubharmonična. Po točki (i) je torej $L_a(u+\epsilon\psi)(v) = L_a u(v) + \epsilon L_a\psi(v) = L_a u(v) - \epsilon|v|^2 \geq 0$. Od tod pa sledi, da za vsak $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$ velja $L_a u(v) > \epsilon|v|^2 > 0$, kar pomeni, da je Levijeva forma $L_a u$ pozitivno definitna na $\mathbb{C}^n$.

Denimo sedaj, da je Levijeva forma $L_a u$ pozitivno definitna na $\mathbb{C}^n$ za vsak $a \in D$. Fiksirajmo gladko funkcijo $\psi : D \to \mathbb{R}$ s kompaktnim nosilcem K. Naj bo $S = \{v \in \mathbb{C}^n;\ |v| = 1\}$ enotska sfera v $\mathbb{C}^n$. Ker sta $(a,v) \mapsto L_a u(v)$ in $(a,v) \mapsto L_a\psi(v)$ zvezni funkciji, obstajata $m = \min_{a\in K, v\in S} L_a u(v) > 0$ in $M = \max_{a\in K, v\in S}|L_a\psi(v)| \geq 0$. Tako zaradi bilinearnosti Levijeve forme za vsak $a \in K$ in $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$ velja

$$L_a u(v) = |v|^2 L_a u\Big(\frac{v}{|v|}\Big) \geq m|v|^2,$$

$$|L_a\psi(v)| = |v|^2|L_a\psi\Big(\frac{v}{|v|}\Big)| \leq M|v|^2.$$

Naj bo $\epsilon > 0$ tak, da velja $\epsilon M \leq m$. Tedaj za vsak $t \in [0,\epsilon]$ in $v \in \mathbb{C}^n$ velja

$$L_a(u+t\psi)(v) = L_a u(v) + tL_a\psi(v) \geq L_a u(v) - \epsilon|L_a\psi(v)| \geq m|v|^2 - \epsilon M|v|^2 \geq 0$$

za $a \in K$ in

$$L_a(u+t\psi)(v) = L_a u(v) \geq 0$$

za $a \in D \setminus K$. Po točki (i) je torej funkcija $u + t\psi$ plurisubharmonična za vsak $t \in [0,\epsilon]$, zato je funkcija u strogo plurisubharmonična. $\square$

Analog Trditve 1.1.6 velja v smislu tokov tudi za funkcije, ki niso razreda $\mathcal{C}^2$. Za podrobnosti glej na primer [51, Satz 1.2 in Satz 1.5].

Izkaže se, da sta plurisubharmoničnost in stroga plurisubharmoničnost lokalni lastnosti, tj. funkcija je (strogo) plurisubharmonična natanko tedaj, ko je (strogo) plurisubharmonična v okolici vsake točke. Poleg tega se ti dve lastnosti ohranjata s holomorfnimi zamenjavami koordinat, tj. če je u (strogo) plurisubharmonična funkcija in f biholomorfna preslikava, potem je $u \circ f$ (strogo) plurisubharmonična funkcija. Zaradi tega lahko pojma plurisubharmoničnosti in stroge plurisubharmoničnosti prenesemo na kompleksne mnogoterosti preko lokalnih kart. Vse lokalne lastnosti lastnosti (strogo) plurisubharmoničnih funkcij v $\mathbb{C}^n$ se seveda prenesejo na mnogoterosti. Med drugim velja analog Trditve 1.1.6 za domeno D v kompleksni mnogoterosti X. Levijevo formo na mnogoterostih lahko računamo v lokalnih kartah ali preko naslednje brezkoordinatne definicije, ki je posplošitev formule (1.2):

$$Lu(v) = \frac{i}{2}\langle \partial\bar{\partial}u, v \wedge Jv \rangle \quad \text{za } v \in TX,$$

pri tem je J *operator kompleksne strukture*, tj. $\mathbb{R}$-linearen endomorfizem tangentnega svežnja TX, ki je v poljubnih lokalnih holomorfnih koordinatah $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $z_j = x_j + iy_j$, na X podan z

$$J\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad J\frac{\partial}{\partial y_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

V primeru poljubnega kompleksnega prostora je definicija (stroge) plurisubharmoničnosti naslednja.

Definicija 1.1.7. Naj bo X kompleksen prostor. Funkcija $u : X \to [-\infty, \infty)$ je *(strogo) plurisubharmonična*, če za vsako točko $x \in X$ obstaja odprta okolica $U \subset X$ za x, biholomorfna preslikava $f : U \to A$ na zaprto analitično podmnožico $A \subset \Omega$ v odprti domeni $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ in (strogo) plurisubharmonična funkcija $\tilde{u} : \Omega \to [-\infty, \infty)$, da velja $u|_U = \tilde{u} \circ f$.

Izkaže se, da definicija ni odvisna od izbire lokalne vložitve $f : U \to \mathbb{C}^n$. Včasih za plurisubharmonično funkcijo predpostavimo še, da ni identično enaka $-\infty$ na nobeni povezani komponenti množice X.

Definicija 1.1.7 je lokalna definicija plurisubharmoničnosti, ki se zanaša na lokalno strukturo kompleksnega prostora. Obstaja seveda več drugih ekvivalentnih definicij. Omenimo le naslednjo brezkoordinatno definicijo, ki je bolj globalna in analogna Definiciji 1.1.4. Formulirali jo bomo kot lemo.

Lema 1.1.8. *Naj bo X kompleksen prostor. Navzgor polzvezna funkcija $u : X \to [-\infty, \infty)$ je plurisubharmonična natanko tedaj, ko je za vsako holomorfno preslikavo $f : \mathbb{D} \to X$ funkcija $u \circ f$ subharmonična.*

Razred vseh plurisubharmoničnih oziroma strogo plurisubharmoničnih funkcij na X označimo s $\mathrm{PSH}(X)$ oziroma $\mathrm{SPSH}(X)$. Tukaj je nekaj osnovnih primerov (strogo) plurisubharmoničnih funkcij:

- $|z|^2 = \sum_{j=1}^n z_j\bar{z}_j \in \mathrm{SPSH}(\mathbb{C}^n)$,
- $|f|^p \in \mathrm{PSH}(X)$ za $p > 0$, kjer je f holomorfna funkcija,
- $\log|f| \in \mathrm{PSH}(X)$, kjer je f holomorfna funkcija,
- $\sum_{j=1}^m |f_j|^2,\ \log(\sum_{j=1}^m |f_j|^2) \in \mathrm{PSH}(X)$, kjer so f_j holomorfne funkcije,

- $\sum_{j=1}^m |f_j|^2 \in \mathrm{SPSH}(X)$, kjer so f_j holomorfne funkcije, katerih kompleksni diferenciali df_j povsod napenjajo kotangentni prostor.

Bolj zapletene primere (strogo) plurisubharmoničnih funkcij lahko konstruiramo s pomočjo njihovih lastnosti, ki so naštete na koncu tega razdelka.

Stopnja gladkosti (strogo) plurisubharmonične funkcije v veliko primerih ni prav zelo pomembna, saj lahko poljubno (strogo) plurisubharmonično funkcijo aproksimiramo z gladkimi (strogo) plurisubharmoničnimi funkcijami. Primer v $\mathbb{C}^n$ je obravnaval Lelong [41].

Izrek 1.1.9. *Naj bo $D \subset \mathbb{C}^n$ domena in $D_j := \{z \in D;\ |z| < j,\ dist(z, \partial D) > \frac{1}{j}\}$. Denimo, da je $u : D \to [-\infty, \infty)$ strogo plurisubharmonična funkcija, ki ni identično enaka $-\infty$ na nobeni povezani komponenti. Tedaj obstaja zaporedje gladkih funkcij $u_j : D \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, z naslednjimi lastnostmi:*

(i) *u_j je strogo plurisubharmonična na D_j,*

(ii) *$u_j \geq u_{j+1}$ na D_j,*

(iii) *$\lim_{j\to\infty} u_j(z) = u(z)$ za $z \in D$,*

(iv) *če je u zvezna, je konvergenca v točki (iii) enakomerna po kompaktih v D.*

Dokaz tega izreka uporablja dobro znano metodo regularizacije funkcij preko specifičnih konvolucijskih integralov, najdemo ga lahko v [48, str. 89, Theorem 4.12]. Globalno situacijo za strogo plurisubharmonične funkcije na kompleksnih prostorih je obravnaval Richberg [51].

Izrek 1.1.10 ([51, Satz 4.2])**.** *Naj bo X kompleksen prostor in $X_j \subset X$, $j \in \mathbb{N}$ zaporedje odprtih kompleksnih podprostorov, da velja $X_j \Subset X_{j+1}$ in $\cup_{j\in\mathbb{N}} X_j = X$. Naj bo $u : X \to \mathbb{R}$ zvezna strogo plurisubharmonična funkcija. Tedaj za vsako zaporedje ϵ_j, $j \in \mathbb{N}$, pozitivnih realnih števil obstaja gladka strogo plurisubharmonična funkcija $\tilde{u} : X \to \mathbb{R}$, da za vsak $j \in \mathbb{N}$ velja*

$$0 \leq \tilde{u} - u \leq \epsilon_j \quad \text{na } X \setminus X_j.$$

Izrek 1.1.11 ([51, Satz 4.3])**.** *Naj bo X parakompaktna kompleksna mnogoterost, $G \subset X$ domena in $u : X \to \mathbb{R}$ zvezna strogo plurisubharmonična funkcija. Tedaj za vsak $\epsilon > 0$ obstaja zvezna strogo plurisubharmonična funkcija $\tilde{u} : X \to \mathbb{R}$, ki je gladka na G, za katero velja*

$$\tilde{u}|_{X\setminus G} = u|_{X\setminus G} \quad \text{in} \quad 0 \leq \tilde{u} - u \leq \epsilon.$$

Po definiciji lahko vsako strogo plurisubharmonično funkcijo na podprostoru $Y \subset X$ lokalno razširimo do strogo plurisubharmonične funkcije na ambientnem prostoru X. Richberg je dokazal, da je to mogoče storiti tudi globalno.

Izrek 1.1.12 ([51, Satz 3.3])**.** *Naj bo X parakompakten kompleksen prostor, $Y \subset X$ zaprt kompleksen podprostor in $u : Y \to \mathbb{R}$ zvezna (oz. gladka) strogo plurisubharmonična funkcija. Tedaj obstaja odprta okolica $U \subset X$ prostora Y in zvezna (oz. gladka) strogo plurisubharmonična funkcija $\hat{u} : U \to \mathbb{R}$, za katero velja $\hat{u}|_Y = u$.*

Naštejmo še nekaj osnovnih lastnosti (strogo) plurisubharmoničnih funkcij ([48, Chapter II, §4]):

- če je $u \in \mathrm{PSH}(X)$ in $c \geq 0$, potem je $cu \in \mathrm{PSH}(X)$,
- če je $u \in \mathrm{SPSH}(X)$ in $c > 0$, potem je $cu \in \mathrm{SPSH}(X)$,
- če je $u_1, u_2 \in \mathrm{PSH}(X)$, potem je $u_1 + u_2 \in \mathrm{PSH}(X)$,
- če je $u_1 \in \mathrm{SPSH}(X)$ in $u_2 \in \mathrm{PSH}(X)$, potem je $u_1 + u_2 \in \mathrm{SPSH}(X)$,
- če je $u \in \mathrm{PSH}(X)$ in $f : Y \to X$ holomorfna preslikava, potem je $u \circ f \in \mathrm{PSH}(Y)$,
- če je $u \in \mathrm{SPSH}(X)$ in $f : Y \to X$ holomorfna imerzija, potem je $u \circ f \in \mathrm{SPSH}(Y)$,
- če je $u \in \mathrm{PSH}(X)$ in $h : [-\infty, \infty) \to [-\infty, \infty)$ naraščajoča konveksna funkcija, potem je $h \circ u \in \mathrm{PSH}(X)$,
- če je $u \in \mathrm{SPSH}(X)$ in $h : [-\infty, \infty) \to [-\infty, \infty)$ strogo naraščajoča konveksna funkcija, potem je $h \circ u \in \mathrm{SPSH}(X)$,
- če je $u_j \in \mathrm{PSH}(X)$ za $j = 1, \ldots, m$, potem je $\max\{u_1, \ldots, u_m\} \in \mathrm{PSH}(X)$,
- če je $u_j \in \mathrm{SPSH}(X)$ za $j = 1, \ldots, m$, potem je $\max\{u_1, \ldots, u_m\} \in \mathrm{SPSH}(X)$.
- če je $u_\lambda \in \mathrm{PSH}(X)$ za $\lambda \in \Lambda$ in je $u := \sup_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda < \infty$ navzgor polzvezna funkcija, potem je $u \in \mathrm{PSH}(X)$,
- če je $u_j \in \mathrm{PSH}(X)$ za $j \in \mathbb{N}$ in velja $u_1 \geq u_2 \geq \ldots$, potem je $\lim_{n\to\infty} u_j \in \mathrm{PSH}(X)$.

1.1.3 Strogo q-plurisubharmonične funkcije

V primeru funkcij razreda $\mathcal{C}^2$ obstaja posplošitev pojma strogo plurisubharmoničnih funkcij, to so tako imenovane strogo q-plurisubharmonične funkcije. Te so v zadnjem času postale pomembno orodje v kompleksni analizi in geometriji.

Definicija 1.1.13. Naj bo X kompleksna mnogoterost dimenzije n in $1 \leq q \leq n+1$. Funkcija $u : X \to \mathbb{R}$ razreda $\mathcal{C}^2$ je *strogo q-plurisubharmonična*, če ima njena Levijeva forma Lu kvečjemu $q-1$ nepozitivnih lastnih vrednosti (torej vsaj $n-q+1$ pozitivnih lastnih vrednosti) v vsaki točki $x \in X$.

Za funkcije razreda $\mathcal{C}^2$ sta torej stroga plurisubharmoničnost in stroga 1-plurisubharmoničnost ekvivalentna pojma. Očitno stroga q-plurisubharmoničnost implicira strogo $(q+1)$-plurisubharmoničnost. Vsaka funkcija je strogo $(n+1)$-plurisubharmonična.

Definicijo 1.1.13 sta vpeljala Andreotti in Grauert. Različni avtorji uporabljajo različne definicije stroge q-plurisubharmoničnosti, ki se lahko od te razlikujejo v zamiku indeksa q.

Na poljubne kompleksne prostore definicijo prenesemo na običajni način.

Definicija 1.1.14. Naj bo X kompleksen prostor. Funkcija $u : X \to \mathbb{R}$ je *strogo q-plurisubharmonična*, če za vsako točko $x \in X$ obstaja odprta okolica $U \subset X$ za x, biholomorfna preslikava $f : U \to A$ na zaprto analitično podmnožico $A \subset \Omega$ v odprti domeni $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ in strogo q-plurisubharmonična funkcija $\tilde{u} : \Omega \to \mathbb{R}$, da velja $u|_U = \tilde{u} \circ f$.

1.2 Psevdokonveksnost

1.2.1 Gladek rob

Definicija 1.2.1. Naj bo X gladka mnogoterost. Pravimo, da ima odprta množica $D \subset X$ *rob razreda $\mathcal{C}^l$ ($l \geq 1$) v točki* $p \in \partial D$, če obstaja odprta okolica $U \subset X$ točke p in funkcija $\phi : U \to \mathbb{R}$ razreda $\mathcal{C}^l$, za katero velja:

(i) $D \cap U = \{x \in U;\ \phi(x) < 0\}$,

(ii) $d\phi(x) \neq 0$ za vsak $x \in U$.

Če zgornji pogoj velja za vsako točko $p \in \partial D$, pravimo, da ima domena D *rob razreda $\mathcal{C}^l$*.

Opazimo, da pogoja (i) in (ii) iz Definicije 1.2.1 implicirata tudi

$$\partial D \cap U = \{x \in U;\ \phi(x) = 0\} \quad \text{in} \quad U \setminus \bar{D} = \{x \in U;\ \phi(x) > 0\}.$$

Funkcijo ϕ imenujemo *lokalna definicijska funkcija* za D v okolici točke p. Namesto pogoja (ii) je seveda dovolj zahtevati, da točka p ni kritična točka funkcije ϕ (tj. $d\phi(p) \neq 0$), saj potem (ii) zaradi zvezne odvedljivosti velja na neki okolici U_0 točke p. Tako je ϕ definicijska funkcija za D v vsaki točki $x \in \partial D \cap U_0$. Če je U okolica celega robu ∂D, potem funkcijo ϕ imenujemo *(globalna) definicijska funkcija* za D.

Pogoj, da ima D rob razreda $\mathcal{C}^l$ v točki $p \in \partial D$ je ekvivalenten pogoju, da je za neko okolico $U \subset X$ točke p množica $\partial D \cap U$ zaprta realna podmnogoterost v U dimenzije $\dim_{\mathbb{R}} X - 1$.

V okolici točke $p \in \partial D$ lahko obstaja več različnih lokalnih definicijskih funkcij za D. Relacija med njimi je podana v naslednji lemi (glej [48, Lemma 2.5, str. 51]).

Lema 1.2.2. *Naj bosta ϕ in ψ dve lokalni definicijski funkciji za D razreda $\mathcal{C}^l$ v okolici U točke $p \in \partial D$. Tedaj obstaja enolična pozitivna funkcija $h \in \mathcal{C}^{l-1}(U)$, za katero velja:*

(i) $\psi = h \cdot \phi$ *na* U,

(ii) $d\psi = h \cdot d\phi$ *na* $\partial D \cap U$.

Dokaz. Na $U \setminus \partial D$ definiramo $h = \frac{\psi}{\phi}$. Tu je h očitno funkcija razreda $\mathcal{C}^l$ in velja $h > 0$. Zaradi zveznosti je s tem funkcija h enolično določena (če obstaja). Naj bo sedaj $q \in \partial D \cap U$. Želimo definirati funkcijo h lokalno v okolici $W \subset U$ točke q. Zato lahko predpostavimo, da je $W \subset \mathbb{R}^n$, kjer je $n = \dim_{\mathbb{R}} X$. S $\mathcal{C}^l$ zamenjavo koordinat lahko dosežemo še $q = 0$ in $\phi(x) = x_n$, kjer je $x = (x', x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$. To med drugim pomeni, da je $\partial D \cap W = \{x \in W;\ x_n = 0\}$, zato velja tudi $\psi(x', 0) = 0$. Po osnovnem izreku analize velja

$$\begin{aligned}\psi(x) = \psi(x', x_n) - \psi(x', 0) &= \int_0^{x_n} \frac{\partial \psi}{\partial x_n}(x', \xi)\, d\xi = x_n \int_0^1 \frac{\partial \psi}{\partial x_n}(x', x_n t)\, dt = \\ &= \phi(x) \int_0^1 \frac{\partial \psi}{\partial x_n}(x', x_n t)\, dt.\end{aligned}$$

Integral na desni strani očitno definira funkcijo razreda $\mathcal{C}^{l-1}$, ki razširja funkcijo h. S tem je dokazan obstoj funkcije h in pogoj (i).

Preverimo sedaj pogoj (ii) v točki $q \in \partial D \cap U$, kot zgoraj lahko predpostavimo $q = 0$. Za $l \geq 2$ bi ta pogoj lahko dokazali kar z odvajanjem enakosti iz (i), v splošnem pa potrebujemo nek drug argument, saj funkcija h v primeru $l = 1$ ni nujno odvedljiva. Velja

$$\begin{aligned}\psi(x) - \psi(0) - h(0) d\phi(0) \cdot x &= h(x)\phi(x) - h(0) d\phi(0) \cdot x \approx \\ &\approx h(x)\big(\phi(0) + d\phi(0) \cdot x + o(|x|)\big) - h(0) d\phi(0) \cdot x = \\ &= \big(h(x) - h(0)\big) d\phi(0) \cdot x + h(x) o(|x|) \approx o(|x|).\end{aligned}$$

Od tod sledi, da je $d\psi(0) = h(0) d\phi(0)$, kar smo želeli pokazati.

Iz pogoja (ii) sedaj očitno sledi tudi $h \neq 0$ na $\partial D \cap U$, torej zaradi zveznosti $h > 0$. □

S pomočjo razčlenitve enote lahko lokalne definicijske funkcije zlepimo v globalno definicijsko funkcijo.

Lema 1.2.3. *Za vsako relativno kompaktno domeno D z robom razreda $\mathcal{C}^l$ obstaja globalna definicijska funkcija razreda $\mathcal{C}^l$.*

Dokaz. Zaradi kompaktnosti roba ∂D obstaja končno odprto pokritje $\{U_j;\ j = 1, \dots, m\}$ in lokalne definicijske funkcije $\phi_j \in \mathcal{C}^l(U_j)$, $j = 1, \dots, m$. Po izreku o razčlenitvi enote dobimo za vsak $j = 1, \dots, m$ gladko funkcijo $\chi_j : U_j \to [0, 1]$ s kompaktnim nosilcem, da velja $\sum_{j=1}^m \chi_j = 1$ na neki odprti okolici $U \subset \bigcup_{j=1}^m U_j$ roba ∂D. Za $x \in U$ definiramo $\phi(x) = \sum_j' \chi_j(x)\phi_j(x)$, kjer $'$ pomeni, da vsota teče le po tistih $j \in \{1, \dots, m\}$, za katere je $x \in U_j$. Očitno je ϕ funkcija razreda $\mathcal{C}^l$. Za $x \in D \cap U$ obstaja j, da je $x \in D \cap U_j$ in zato $\phi(x) \leq \chi_j(x)\phi_j(x) < 0$. Obratno, če je $\phi(x) < 0$, obstaja j, da je $\phi_j(x) < 0$, torej $x \in D \cap U_j \subset D \cap U$. Od tod sledi, da velja $D \cap U = \{x \in U;\ \phi(x) < 0\}$. Preverimo še, da je $d\phi \neq 0$ na ∂D. Naj bo $p \in \partial D$. Očitno velja $d\phi(p) = \sum_j' \chi_j(p) d\phi_j(p)$. Predpostavimo lahko, da je $p \in U_1$. Po Lemi 1.2.2 velja $d\phi(p) = \sum_j' \chi_j(p) C_j \phi_1(p)$ za neke pozitivne konstante C_j, torej je $d\phi(p) = C d\phi_1(p) \neq 0$ za $C = \sum_j' \chi_j(p) C_j > 0$. □

1.2.2 Psevdokonveksen rob

Definicija 1.2.4. Naj bo X kompleksen prostor. Pravimo, da ima odprta množica $D \subset X$ *(strogo) psevdokonveksen rob* v točki $p \in \partial D$, če obstaja odprta okolica $U \subset X$ točke p in (strogo) plurisubharmonična funkcija $\phi : U \to [-\infty, \infty)$, za katero velja:

(i) $D \cap U = \{z \in U;\ \phi(z) < 0\}$,

(ii) $\phi = 0$ na $\partial D \cap U$.

Če zgornji pogoj velja za vsako točko $p \in \partial D$, pravimo, da ima domena D *(strogo) psevdokonveksen rob.*

Richberg je dokazal, da lahko funkcijo ϕ v Definiciji 1.2.4 vedno izberemo zvezno (glej [51, Satz 2.5]). Poleg tega je dokazal, da v primeru strogo psevdokonveksnega roba lahko vedno najdemo globalno definicijsko funkcijo, kot v naslednjem izreku.

Izrek 1.2.5 ([51, Satz 3.4])**.** *Naj bo X parakompakten kompleksen prostor in $D \subset X$ domena s strogo psevdokonveksnim robom. Tedaj obstaja odprta okolica $U \subset X$ roba ∂D in zvezna strogo plurisubharmonična funkcija $\phi : U \to \mathbb{R}$, za katero velja $G \cap U = \{z \in U;\ \phi(z) < 0\}$. Če je prostor X Steinov, potem je U lahko kar odprta okolica množice $\bar{D}$.*

Opazimo, da je pogoj v Definiciji 1.2.4 odvisen od izbire definicijske funkcije za D, tj. če najdemo funkcijo ϕ za katero velja (i) in (ii) ter ugotovimo, da ϕ ni (strogo) plurisubharmonična, to še ne pomeni, da D nima (strogo) psevdokonveksnega roba. Na srečo obstaja še en pojem psevdokonveksnosti, ki bo odpravil to pomanjkljivost vsaj za domene z robom razreda $\mathcal{C}^2$ v kompleksnih mnogoterostih.

Definicija 1.2.6. Naj bo X kompleksna mnogoterost, $D \subset X$ odprta množica, ki ima v točki $p \in \partial D$ rob razreda $\mathcal{C}^2$, in ϕ lokalna definicijska funkcija za D razreda $\mathcal{C}^2$ v okolici točke p.

(i) D ima *Levijevo psevdokonveksen rob* v točki p, če velja

$$L_p\phi(v) \geq 0 \quad \text{za vse } v \in T_p^{\mathbb{C}}\partial D,$$

(ii) D ima *strogo Levijevo psevdokonveksen rob* v točki p, če velja

$$L_p\phi(v) > 0 \quad \text{za vse } 0 \neq v \in T_p^{\mathbb{C}}\partial D.$$

(iii) D ima (strogo) Levijevo psevdokonveksen rob, če ima (strogo) Levijevo psevdokonveksen rob v vsaki točki $p \in \partial D$.

Pri tem je $T_p^{\mathbb{C}}\partial D = T_p\partial D \cap J(T_p\partial D)$ maksimalen kompleksen podprostor v $T_p\partial D$. Zlahka se prepričamo, da velja $T_p\partial D = \ker d_p\phi$ in $T_p^{\mathbb{C}}\partial D = \ker \partial_p\phi = \ker \partial_p^c\phi|_{T_p\partial D}$. Izkaže se, da sta pogoja iz Definicije 1.2.6 neodvisna od izbire lokalne definicijske funkcije; oglejmo si skico dokaza. Naj bo ψ še ena $\mathcal{C}^2$ lokalna definicijska funkcija za

D v okolici točke p. Po Lemi 1.2.2 obstaja pozitivna funkcija h razreda $\mathcal{C}^1$ definirana v okolici točke p, da velja $\psi = h \cdot \psi$. Če bi bil h razreda $\mathcal{C}^2$, bi lahko poračunali, da velja

$$L_p\psi(v) = 2\,\mathrm{Re}\left(\overline{\partial_p h(v)} \cdot \partial_p \phi(v)\right) + h(p)L_p\phi(v) \quad \text{za vsak } v \in T_pX.$$

S podobnim argumentom kot v dokazu točke (ii) v Lemi 1.2.2 lahko dokažemo, da zgornja enakost velja tudi v primeru, ko je h le razreda $\mathcal{C}^1$. Natančen dokaz prepuščamo bralcu. Tako velja

$$L_p\psi(v) = h(p)L_p\phi(v) \quad \text{za vsak } v \in T_p^{\mathbb{C}}\partial D.$$

Ker je $h(p) > 0$, je (stroga) Levijeva psevdokonveksnost roba neodvisna od izbire definicijske funkcije.

Ni težko videti, da je (stroga) Levijeva psevdokonveksnost roba odprta lastnost, tj. če je rob ∂D (strogo) Levijevo psevdokonveksen v točki $p \in \partial D$, je (strogo) Levijevo psevdokonveksen tudi v vseh bližnjih točkah $z \in \partial D$. Iz naslednje trditve sledi, da sta stroga Levijeva psevdokonveksnost in stroga psevdokonveksnost ekvivalentna pojma.

Trditev 1.2.7. *Naj bo X kompleksna mnogoterost in $D \subset X$ odprta relativno kompaktna množica s strogo Levijevo psevdokonveksnim robom razreda $\mathcal{C}^l$ ($l \geq 2$). Tedaj obstaja odprta okolica U roba ∂D in globalna definicijska funkcija $\phi : U \to \mathbb{R}$ za D, ki je razreda $\mathcal{C}^l$ in strogo plurisubharmonična na U. Če je X Steinova mnogoterost, potem je U lahko kar odprta okolica množice $\bar{D}$.*

Dokaz. Po Lemi 1.2.3 obstaja globalna definicijska funkcija ψ za D razreda $\mathcal{C}^l$. Pokazali bomo, da je za dovolj velik $A > 0$ funkcija $\phi = e^{A\psi} - 1$ globalna definicijska funkcija za D, ki je razreda $\mathcal{C}^l$ in strogo plurisubharmonična na neki okolici roba ∂D. Prvi dve lastnosti sta očitno veljata za vsak $A > 0$. Račun pokaže, da za vsak $v \in TX$ velja

$$L\phi(v) = Ae^{A\psi}\left(A|\partial\psi(v)|^2 + L\psi(v)\right). \tag{1.3}$$

Sedaj moramo izbrati A dovolj velik, do bo v primeru $L\psi(v) < 0$ prevladal pozitiven člen $A|\partial\psi(v)|^2$. Tako bo Levijeva forma $L\phi(v)$ povsod pozitivno definitna. Fiksirajmo Hermitsko metriko $|\cdot|$ na TX. Za $x \in X$ in $Y \subset X$ označimo $S_x := \{v \in T_xX;\ |v| = 1\}$ in $S_Y := \bigcup_{x\in Y} S_x \subset TX$. Opazimo, da je množica $S_{\partial D}$ kompaktna. Zaradi zveznosti Levijeve forme je tudi množica $K = \{v \in S_{\partial D};\ L\psi(v) \leq 0\}$ kompaktna. Zaradi stroge Levijeve psevdokonveksnosti roba velja $|\partial\psi(v)|^2 > 0$ za vsak $v \in K$. Označimo $m := \min_{v\in K} |\partial\psi(v)|^2 > 0$ in $M := \min_{v\in S_{\partial D}} L\psi(v) \leq 0$. Izberimo A tako velik, da velja $C := Am + M > 0$. Tedaj iz (1.3) sledi

$$L\phi(v) \geq C \quad \text{za vsak } v \in S_{\partial D}.$$

Zaradi zveznosti Levijeve forme to velja tudi za vsak v iz neke odprte okolice $\Omega \subset TX$ množice $S_{\partial D}$ oziroma za vsak $v \in S_U$, kjer je $U \subset X$ neka odprta okolica roba ∂D

(vzamemo na primer $U = X \setminus \pi(S_X \setminus \Omega)$, kjer je $\pi : TX \to X$ naravna projekcija). Zaradi bilinearnosti Levijeve forme dobimo

$$L\phi(v) = |v|^2 L\phi\Big(\frac{v}{|v|}\Big) \geq C|v|^2 > 0 \quad \text{za vsak } 0 \neq v \in TX|_U.$$

Torej je ϕ strogo plurisubharmonična funkcija na U.

Dokaz drugega dela trditve bomo le skicirali. Spomnimo se, da na Steinovem prostoru X obstaja gladka strogo plurisubharmonična funkcija izčrpanja $\psi : X \to \mathbb{R}$ (glej Izrek 1.3.8). Fiksirajmo taka $0 < \delta_1 < \delta_2$, da je $\{z \in U;\ -\delta_2 < \phi(z) < -\delta_1\} \Subset U \cap D$. Izberimo gladko funkcijo $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, da je $\tau(t) = t$ za $t \geq -\delta_1$, $\tau'(t), \tau''(t) > 0$ za $-\delta_2 < t < -\delta_1$ in je $\tau(t)$ konstantna za $t \leq -\delta_2$. Izberimo še gladko funkcijo $\chi : X \to [0,1]$ s kompaktnim nosilcem vsebovanim v D, da je $\chi = 1$ na okolici $D \setminus \{z \in U;\ \phi(z) > -\delta_1\}$. Sedaj definiramo funkcijo $\Phi = \tau \circ \phi + \epsilon\chi\psi$ na $D \cup U$, kjer je $\epsilon > 0$. Ta funkcija je očitno strogo plurisubharmonična na $U \setminus D$ in $D \setminus \{z \in U;\ \phi(z) > -\delta_1\}$. Ni težko preveriti, da je za dovolj majhen ϵ, funkcija Φ strogo plurisubharmonična tudi na $\{z \in U;\ -\delta_1 < \phi(z) < 0\}$. Zagotoviti moramo le, da na tej množici pozitivna definitnost Levijeve forme funkcije $\tau \circ \phi = \phi$ prevlada nad morebitnim negativnim delom Levijeve forme funkcije $\epsilon\chi\psi$ (ta je reda $O(\epsilon)$, saj ima funkcija χ kompakten nosilec). Detajle dokaza prepuščamo bralcu. $\square$

Strogo psevdokonveksnost roba si lahko lokalno zelo dobro predstavljamo s pomočjo naslednje leme o lokalni konveksifikaciji, ki je poznana pod imenom *Narasimhanova lema*, čeprav je je poznal že Kneser [37].

Trditev 1.2.8. *Naj bo X kompleksna mnogoterost in $D \subset X$ odprta množica, ki ima v točki $p \in \partial D$ rob razreda $\mathcal{C}^2$. Tedaj ima D strogo Levijevo psevdokonveksen rob v p če in samo če ima v nekih holomorfnih koordinatah strogo konveksen rob.*

Dokaz. Ker je trditev lokalna, lahko predpostavimo, da je $D \subset \mathbb{C}^n$. Denimo najprej, da ima D strogo Levijevo psevdokonveksen rob v p. Kot v dokazu Trditve 1.2.7 najdemo lokalno definicijsko funkcijo ψ za D v okolici p, ki je razreda $\mathcal{C}^2$ in strogo plurisubharmonična. S translacijo dosežemo $p = 0$ in s $\mathbb{C}$-linearno zamenjavo koordinat dosežemo še $T_0^{\mathbb{C}}\partial D = \{0\} \times \mathbb{C}^{n-1}$ oziroma $\frac{\partial\phi}{\partial z_1}(0) \neq 0$ in $\frac{\partial\phi}{\partial z_l}(0) = 0$ za $l \neq 1$. V teh koordinatah je

$$\phi(z) = 2\,\mathrm{Re}\Big(\frac{\partial\phi}{\partial z_1}(0)z_1\Big) + \mathrm{Re}\Big(\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2\phi}{\partial z_j \partial z_k}(0) z_j z_k\Big) + L_0\phi(z) + o(|z|^2).$$

Vpeljemo nove koordinate $w = F(z)$

$$w_1 = \frac{\partial\phi}{\partial z_1}(0) + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2\phi}{\partial z_j \partial z_k}(0) z_j z_k, \quad \text{in} \quad w_l = z_l \quad \text{za } l \neq 1.$$

Zlahka preverimo, da velja $\det F'(0) = \frac{\partial\phi}{\partial z_1}(0) \neq 0$, torej je F v okolici 0 lokalni biholomorfizem. V teh koordinatah je

$$\phi(w) = 2\,\mathrm{Re}(w_1) + \sum_{j,k=1}^{n} a_{j,k} w_j \bar{w}_k + o(|w|^2)$$

za neke $a_{j,k} \in \mathbb{C}$. Pri tem je seveda $\sum_{j,k=1}^n a_{j,k} w_j \bar{w}_k$ hkrati Levijeva forma in realna Hessejeva forma funkcije ϕ. Pozitivna definitnost te forme na $T_0 \partial D$ torej pomeni, da ima D v teh koordinatah strogo konveksen rob v $p = 0$.

Denimo sedaj, da ima D v koordinatah $w = F(z)$ strogo konveksen rob v p. Naj bo ϕ lokalna definicijska funkcija za D v okolici p. Označimo s $H_z\phi(v)$ realno Hessejevo formo in $R_z\phi(v) = \mathrm{Re}\left(\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2\phi}{\partial z_j \partial z_k}(z) v_j v_k\right)$. Tedaj velja $H_z\phi(v) = L_z\phi(v) + R_z\phi(v) > 0$ za vsak $z \in \partial D$ blizu p in vsak $0 \neq v \in T_p\partial D$. Naj bo sedaj $0 \neq v \in T_p^{\mathbb{C}}\partial D$, tedaj je tudi $0 \neq iv \in T_p^{\mathbb{C}}\partial D$. Zato velja

$$0 < H_z\phi(v) + H_z\phi(iv) = L_z\phi(v) + R_z\phi(v) + L_z\phi(v) - R_z\phi(v) = 2L_z\phi(v).$$

To pa pomeni, da ima D strogo Levijevo psevdokonveksen rob v p. □

Psevdokonveksnost lahko definiramo tudi za kompleksne prostore brez roba.

Definicija 1.2.9. Naj bo X kompleksen prostor. Navzgor polzvezno funkcijo $\phi : X \to [-\infty, \infty)$ imenujemo *funkcija izčrpanja*, če je za vsak $c \in \mathbb{R}$ množica $\{z \in X;\ \phi(z) < c\}$ relativno kompaktna v X.

Definicija 1.2.10. Kompleksen prostor X je strogo psevdokonveksen, če obstaja kompakt K in zvezna funkcija izčrpanja $\phi : X \to \mathbb{R}$, ki je strogo plurisubharmonična na $X \setminus K$.

1.2.3 q-konveksni prostori

Pomembna posplošitev strogo psevdokonveksnih prostorov so q-konveksni prostori.

Definicija 1.2.11. Naj bo X kompleksen prostor. Pravimo, da je odprta množica $D \subset X$ *q-konveksna* v točki $p \in \partial D$, če obstaja odprta okolica $U \subset X$ točke p in strogo q-plurisubharmonična funkcija $\phi : U \to [-\infty, \infty)$, za katero velja $D \cap U = \{z \in U;\ \phi(z) < 0\}$. Če ta pogoj velja za vsako točko $p \in \partial D$, pravimo, da je domena D *q-konveksna*.

Definicija 1.2.12. Kompleksen prostor X je *q-konveksen*, če obstaja kompakt K in zvezna funkcija izčrpanja $\phi : X \to \mathbb{R}$, ki je strogo q-plurisubharmonična na $X \setminus K$. Če lahko kompakt K izberemo prazen, potem pravimo, da je prostor X *q-kompleten*.

Izkaže se, da lahko funkcijo ϕ v Definicijah 1.2.10 in 1.2.12 izberemo gladko, zato so 1-konveksni prostori natanko strogo psevdokonveksni prostori. Vidimo, da je vsak q-konveksen prostor izčrpan z relativno kompaktnimi q-konveksnimi domenami $\{z \in X;\ \phi(z) < c\}$, $c >> 0$, z gladkim robom. Očitno q-konveksnost implicira $(q+1)$-konveksnost. V primeru ko je X kompakten prostor, je pogoj iz Definicij 1.2.10 in 1.2.12 avtomatično izpolnjen za $K = X$. Zato je vsak kompakten prostor 1-konveksen. Kompaktne prostore včasih imenujemo 0-konveksni.

Primer 1.2.13. Naj bo $n > 1$. Označimo z $z = (z_1, \ldots, z_n)$ koordinate v Evklidskem prostoru $\mathbb{C}^n$ in s $t = [t_1 : \ldots : t_n]$ homogene koordinate v projektivnem prostoru $\mathbb{CP}^{n-1}$. Oglejmo si najpreprostejši primer 1-konveksnega prostora X, ki ni niti kompakten niti 1-kompleten. Gre za razpih točke v $\mathbb{C}^n$. Geometrijsko bomo izhodišče $0 \in \mathbb{C}^n$ nadomestili s projektivnim prostorom $\mathbb{CP}^{n-1}$, pri čemer bomo poskrbeli, da bo kompleksna premica v $\mathbb{C}^n$, ki gre skozi izhodišče in točko $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, sedaj namesto izhodišča vsebovala točko $[z_1 : \ldots : z_n] \in \mathbb{CP}^{n-1}$. Tako se te premice v prostoru X ne bodo več sekale. Prostor X bomo realizirali kot kompleksno podmnogoterost v $\mathbb{C}^n \times \mathbb{CP}^{n-1}$. Naj bo torej

$$X = \{(z,t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{CP}^{n-1};\ z_j t_k = z_k t_j,\ 1 \leq j,k \leq n\}.$$

Zlahka preverimo, da je X kompleksna podmnogoterost dimenzije n v $\mathbb{C}^n \times \mathbb{CP}^{n-1}$. Označimo z $R : X \to \mathbb{C}^n$ zožitev naravne projekcije $\mathbb{C}^n \times \mathbb{CP}^{n-1} \to \mathbb{C}^n$, $(z,t) \mapsto z$. Zlahka preverimo, da je R prava holomorfna surjekcija. Poleg tega je $R : X \setminus R^{-1}(0) \to \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ biholomorfna preslikava. Vlakno nad $0 \in \mathbb{C}^n$ je enako $R^{-1}(0) = \{0\} \times \mathbb{CP}^{n-1} \cong \mathbb{CP}^{n-1}$, torej kompaktno. Očitno je funkcija $\phi : X \to \mathbb{R}$ podana s predpisom $\phi(x) = |R(x)|^2$, torej $\phi(z,t) = |z|^2$, gladka funkcija izčrpanja, ki je strogo plurisubharmonična na $X \setminus R^{-1}(0)$.

V naslednjih poglavjih se bomo večinoma ukvarjali z 1-konveksnimi domenami. Za domene imamo sedaj dve rahlo različni definiciji 1-konveksnost; kot 1-konveksne domene v smislu Definicije 1.2.11 in kot 1-konveksnega prostora v smislu Definicije 1.2.12. Da se izognemo zmedi, bomo 1-konveksno domeno v smislu Definicije 1.2.11 imenovali *1-konveksna domena s strogo psevdokonveksnim robom.*

1.3 Karakterizacije 1-konveksnosti

V tem razdelku želimo predstaviti nekaj pomembnejših karakterizacij 1-konveksnih prostorov in jih primerjati s pripadajočimi karakterizacijami Steinovih prostorov. Zaradi enostavnosti bomo predpostavili, da so vsi prostori v tem razdelku 1-števni v neskončnosti in reducirani (tj. vse bilke v strukturnem snopu so brez neničelnih nilpotentnih elementov). Naj bo X kompleksen prostor s strukturnim snopom $\mathcal{O}_X$. Z $\mathcal{O}(X)$ označimo algebro vseh holomorfnih funkcij na X.

Definicija 1.3.1. Naj bo $K \subset X$ kompaktna množica. Množico

$$\widehat{K} := \{x \in X;\ |f(x)| \leq \max_{z \in K} |f(z)| \text{ za vsak } f \in \mathcal{O}(X)\}$$

imenujemo $\mathcal{O}(X)$*-konveksna ogrinjača* množice K. Pravimo, da je množica K $\mathcal{O}(X)$-konveksna, če velja $\widehat{K} = K$.

Včasih namesto $\widehat{K}$ označimo $\widehat{K}_{\mathcal{O}(X)}$, da poudarimo za katero ogrinjačo gre.

Definicija 1.3.2. Kompleksen prostor X je *holomorfno konveksen*, če je za vsako kompaktno množico $K \subset X$ tudi množica $\widehat{K}$ kompaktna.

Kot direktno posledico Definicije 1.3.1 imamo naslednje dejstvo. Za vsaka $\epsilon, M > 0$ in vsak $x \in X \setminus \widehat{K}$ obstaja holomorfna funkcija $f \in \mathcal{O}(X)$, za katero velja $|f(x)| > M$ in $|f(z)| < \epsilon$ za vse $z \in K$. Po drugi strani Definicija 1.3.2 zagotavlja obstoj normalnega izčrpanja holomorfno konveksnega prostora X s kompaktnimi $\mathcal{O}(X)$-konveksnimi množicami (tj. $K_1 \Subset K_2 \Subset K_3 \Subset \ldots \subset X$, $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j = X$ in $\widehat{K}_j = K_j$ za vsak $j \in \mathbb{N}$). S pomočjo teh dveh dejstev lahko skonstruiramo zaporedje holomorfnih funkcij $f_j \in \mathcal{O}(X)$, $j \in \mathbb{N}$, katerega vsota konvergira k neomejeni holomorfni funkciji iz naslednje trditve, ki podaja enostavno a pomembno karakterizacijo holomorfne konveksnosti. Podroben dokaz lahko najdemo v [29, Chap. IV, §2, Theorem 4 in Theorem 12].

Trditev 1.3.3. *Kompleksen prostor X je holomorfno konveksen natanko tedaj, ko za vsako neskončno diskretno množico $T \subset X$ obstaja holomorfna funkcija $h \in \mathcal{O}(X)$, ki je neomejena na T.*

Klasična definicija Steinovega prostora je naslednja.

Definicija 1.3.4. Kompleksen prostor X je *Steinov*, če je holomorfno konveksen in algebra $\mathcal{O}(X)$ loči točke na X.

Po Grauertovem rezultatu [23] na Steinovih prostorih obstaja veliko globalnih holomorfnih funkcij, kot v naslednji trditvi.

Trditev 1.3.5. *Naj bo X Steinov prostor. Tedaj za vsako točko $x \in X$ obstaja končno mnogo funkcij $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}(X)$, da preslikava $f = (f_1, \ldots, f_n)$ preslika odprto okolico U točke x biholomorfno na zaprto analitično podmnožico $A \subset \Omega$ v odprti domeni $\Omega \subset \mathbb{C}^N$, $N = N(x)$.*

Najmanjši možen $N(x)$ v Trditvi 1.3.5 imenujemo *vložitvena dimenzija* prostora X v točki x. Kot direktno posledico definicije imamo naslednjo karakterizacijo Steinovih prostorov.

Izrek 1.3.6. *Kompleksen prostor X je Steinov natanko tedaj, ko je holomorfno konveksen in ne vsebuje kompaktne analitične podmnožice pozitivne dimenzije.*

Osnovni primer Steinovega prostora je seveda $\mathbb{C}^n$. Zlahka preverimo, da je tudi vsak zaprt kompleksen podprostor v $\mathbb{C}^n$ Steinov. Velja tudi obrat, vsak Steinov prostor končne vložitvene dimenzije lahko vložimo v nek $\mathbb{C}^N$, kar ni težko dokazati z uporabo Trditve 1.3.5.

Izrek 1.3.7. *Kompleksen prostor X končne dimenzije je Steinov natanko tedaj, ko je izomorfen zaprtemu kompleksnemu podprostoru v $\mathbb{C}^n$ (za nek $n \in \mathbb{N}$).*

Obstajajo veliko bolj natančni vložitveni izreki, a jih tukaj ne bomo omenjali (glej na primer [13, Chap. 8]). Naslednja karakterizacija Steinovih prostorov že nakazuje, da so si Steinovi in 1-konveksni prostori precej sorodni.

Izrek 1.3.8. *Kompleksen prostor X je Steinov natanko tedaj, ko obstaja strogo plurisubharmonična funkcija izčrpanja $\phi : X \to \mathbb{R}$. Poleg tega lahko ϕ izberemo realno analitično.*

Steinovi prostori so torej natanko 1-kompletni prostori. To karakterizacijo sta dokazala Grauert [26] za kompleksne mnogoterosti v primeru $\mathcal{C}^2$ funkcije ϕ in Narasimhan [44] za kompleksne prostore v primeru zvezne funkcije ϕ. Presenetljivo dejstvo, da zveznost ni potreben pogoj sta dokazala Fornaess in Narasimhan [12]. Predpostavka, da funkcija ϕ ne zavzame vrednosti $-\infty$, pa je zelo pomembna (glej Izrek 1.3.15).

Holomorfno konveksni prostori so nekakšni 'vlaknasti' prostori nad Steinovimi prostori. Pri tem imamo v mislih naslednji Remmertov izrek [49].

Izrek 1.3.9 (Remmertova redukcija). *Naj bo $(X, \mathcal{O}_X)$ holomorfno konveksen prostor. Tedaj obstaja Steinov prostor $(S, \mathcal{O}_S)$ in prava holomorfna surjekcija $R : X \to S$, da velja:*

(i) *R ima povezana vlakna,*

(ii) *$R_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_S$,*

(iii) *kanonična preslikava $\mathcal{O}_S(S) \to \mathcal{O}_X(X)$ je izomorfizem,*

(iv) *če je $F : X \to Y$ holomorfna preslikava v Steinov prostor Y, obstaja enolična holomorfna preslikava $H : S \to Y$, da naslednji diagram komutira.*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "R"'] \arrow[dr, "F"] & \\ S \arrow[rr, "H"] & & Y \end{tikzcd}$$

Preslikavo $R : X \to S$ (oziroma prostor S) imenujemo *Remmertova redukcija* prostora X. Geometrično je do Steinove faktorizacije natančno $S = X/_\sim$, kjer je

$$x_1 \sim x_2 \;\Leftrightarrow\; f(x_1) = f(x_2) \quad \text{za vsak } f \in \mathcal{O}_X(X).$$

Drugače povedano, R sesede vse nikjer diskretne kompaktne analitične podmnožice v X. Kompleksno strukturo na Y pa skonstruiramo s pomočjo Grauertovega izreka o direktni sliki.

Izrek 1.3.9 se izkaže kot zelo uporaben pri obravnavi 1-konveksnih prostorov in je v resnici izhodišče te teorije. Da ga lahko uporabimo za 1-konveksne prostore je seveda najprej treba videti, da so 1-konveksni prostori holomorfno konveksni. To rešitev Levijevega problema v 1-konveksnem primeru sta dokazala Grauert [26] za kompleksne mnogoterosti ter Narasimhan [44] in Grauert [27] za kompleksne prostore.

Trditev 1.3.10. *Vsak 1-konveksen prostor je holomorfno konveksen.*

Ker je 1-konveksen prostor izčrpan z 1-konveksnimi domenami s strogo psevdokonveksnim robom, je trditev dovolj dokazati za tako domeno D. V tem primeru se dokaz zanaša na rešljivost Cousinovega I problema in uporablja dejstvo, da je $H^1(D, \mathcal{O}_X)$ končno dimenzionalen $\mathbb{C}$-vektorski prostor (glej Izrek 1.3.18). Skica dokaza je naslednja. Za dan $p \in \partial D$ moramo skonstruirati $h \in \mathcal{O}_X(D)$, da velja $\lim_{x \to p} |h(x)| = \infty$. Izberemo odprto okolico U točke p, na kateri obstaja $f \in \mathcal{O}_X(U)$, da velja $\{f = 0\} \cap \bar{D} = \{p\}$. Izberemo 1-konveksno domeno $G \Supset D$ s pozitivno razdaljo do $\overline{\{f = 0\}} \cap \partial U$. Fiksiramo majhni okolici $V_1 \subset V_2$ točke p. Definiramo holomorfne funkcije $g_j^{(1)} \in \mathcal{O}_X(G \setminus \bar{V}_1)$ z $g_j^{(1)} = 0$ in meromorfne funkcije $g_j^{(2)} \in \mathcal{M}_X(V_2)$ z $g_j^{(2)} = \frac{1}{f^j}$, $j \in \mathbb{N}$. Tedaj je par $(g_j^{(1)}, g_j^{(2)})$ sistem podatkov za Cousinov I problem in definira kohomološki razred $g_j \in H^1(G, \mathcal{O}_X)$. Torej za dovolj velik J obstajajo $a_1, \dots a_J \in \mathbb{C}$, $a_J \neq 0$, da velja $\sum_{j=1}^J a_j g_j = 0$. Zato obstaja $h \in \mathcal{M}(G)$, za katerega je $h - \sum_{j=1}^J a_j f^{-j} \in \mathcal{O}_X(V_2)$ in $h \in \mathcal{O}_X(G \setminus \bar{V}_1)$. Tako je $h|_D$ funkcija, ki jo iščemo.

Zaradi dejstva, da so 1-konveksni prostori holomorfno konveksni, je njihova teorija popolnoma drugačna od splošne teorije q-konveksnih prostorov. Na primer, obstajajo nekompaktni q-konveksni prostori, ki nimajo nobene nekonstantne holomorfne funkcije, na nekompaktnih 1-konveksnih prostorih pa vedno obstaja veliko holomorfnih funkcij, kar kar očitno sledi iz Remmertove redukcije. Preden si ogledamo, kaj nam Remmertova redukcija pove o 1-konveksnih prostorih, potrebujemo še en rezultat o analitičnih podmnožicah.

Definicija 1.3.11. Nikjer diskretna kompaktna analitična podmnožica $A \subset X$ se imenuje *maksimalna kompaktna analitična podmnožica* v X, če vsebuje vsako nikjer diskretno kompaktno analitično podmnožico v X.

Analitična podmnožica je nikjer diskretna, če nima izoliranih točk oziroma, če je pozitivne dimenzije v vsaki svoji točki. Vemo že, da Steinovi prostori nimajo kompaktnih nikjer diskretnih analitičnih podmnožic. Na drugi strani imajo holomorfno konveksni prostori lahko veliko kompaktnih nikjer diskretnih analitičnih podmnožic. Iz naslednjega Grauertovega rezultata, ki je analogen Izreku 1.3.6 vidimo, da so 1-konveksni prostori nekje vmes.

Izrek 1.3.12. *Kompleksen prostor X je 1-konveksen natanko tedaj, ko je holomorfno konveksen in ima maksimalno kompaktno analitično podmnožico E. V resnici je*

$$E = \{x \in X;\ \dim_x R^{-1}(R(x)) > 0\},$$

kjer je $R : X \to S$ Remmertova redukcija prostora X.

Ker je Remmertova redukcija $R : X \to S$ prava preslikava in E kompaktna analitična množica, je po Remmertovem rezultatu tudi $R(E)$ kompaktna analitična množica. Ker je S Steinov prostor, mora biti $R(E)$ končna množica. Poleg tega je po konstrukciji Remmertove redukcije $S = X/E$ in $R : X \setminus E \to S \setminus R(E)$ biholomorfizem.

Definicija 1.3.13. Naj bo X kompleksen prostor. Denimo, da obstaja kompleksen prostor Y, nikjer diskretna kompaktna analitična podmnožica $A \subset X$ in prava holomorfna surjekcija $\pi : X \to Y$, da velja:

(i) $\pi(A)$ je končna množica,

(ii) $\pi_*(\mathcal{O}_X) \cong \mathcal{O}_Y$,

(iii) $\pi : X \setminus A \to Y \setminus \pi(A)$ je biholomorfizem.

Tedaj pravimo, da je prostor X (oziroma preslikava π) *prava modifikacija* prostora Y *v končno mnogo točkah.* Množico A imenujemo *izjemna množica* prostora X.

To nam da eno izmed najbolj uporabnih karakterizacij 1-konveksnih prostorov.

Izrek 1.3.14. *Kompleksen prostor je 1-konveksen natanko tedaj, ko je prava modifikacija Steinovega prostora v končno mnogo točkah.*

Ta karakterizacija nam omogoča enostavno konstrukcijo 1-konveksnih prostorov; vzamemo Steinov prostor in razpihnemo nekaj točk. V resnici je Primer 1.2.13 1-konveksnega prostora iz konca prejšnjega razdelka natanko tak; Steinovemu prostoru $\mathbb{C}^n$, $(n > 1)$ razpihnemo izhodišče, kanonična projekcija pa je Remmertova redukcija. Poleg tega lahko s pomočjo te karakterizacije veliko izrekov iz Steinovega prostora S posplošimo na 1-konveksen prostor X, tako da jih 'povlečemo' preko Remmertove redukcije $R : X \to S$. Na primer, če izberemo realno analitično strogo plurisubharmonično funkcijo $\phi : S \to [0, \infty)$, ki je 0 natanko na $R(E)$, in jo povlečemo preko Remmertove redukcije, dobimo realno analitično funkcijo $\Phi = \phi \circ R : X \to [0, \infty)$, ki je 0 natanko na izjemni množici E in strogo plurisubharmonična izven E.

Coltoiu [5] ter Coltoiu in Michalache [6] so dokazali še eno karakterizacijo 1-konveksnih prostorov tega tipa analogno Izrek 1.3.8.

Izrek 1.3.15. *Kompleksen prostor X je 1-konveksen natanko tedaj, ko obstaja strogo plurisubharmonična funkcija izčrpanja $\phi : X \to [-\infty, \infty)$. Poleg tega lahko ϕ izberemo realno analitično izven izjemne množice E in enako $-\infty$ na E.*

Remmertova redukcija nam omogoča tudi enostavno karakterizacijo izjemnih množic, ki jo je dokazal Grauert [27].

Trditev 1.3.16. *Naj bo X kompleksen prostor in $A \subset X$ nikjer diskretna kompaktna analitična podmnožica. Tedaj je A izjemna množica natanko tedaj, ko obstaja 1-konveksna domena $U \Subset X$, ki ima A za maksimalno kompaktno analitično podmnožico.*

V naslednjem poglavju bomo s pomočjo povleka preko Remmertove redukcije skonstruirali rešitveni operator za nehomogeno $\bar{\partial}$-enačbo za določene $(0, 1)$-forme na 1-konveksnih domenah s strogo psevdokonveksnim robom (glej Trditev 2.3.1).

Še ena pomembna karakterizacija Steinovih prostorov vključuje slavni Cartanov Izrek B [4] (glej tudi [29]).

Izrek 1.3.17 (Izrek B za Steinove prostore))**.** *Kompleksen prostor X je Steinov natanko tedaj, ko velja eden izmed naslednjih dveh ekvivalentnih pogojev:*

(i) $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ *za vsak koherenten analitičen snop* $\mathcal{F}$ *in vsak* $q \geq 1$,

(ii) $H^1(X, \mathcal{I}) = 0$ *za vsak koherenten analitičen ideal* $\mathcal{I} \lhd \mathcal{O}_X$.

Analog tega izreka za 1-konveksne prostore so dokazali Narasimhan [44] ter Andreotti in Grauert [2] (glej tudi [34]).

Izrek 1.3.18 (Izrek B za 1-konveksne prostore)). *Kompleksen prostor X je 1-konveksen natanko tedaj, ko velja eden izmed naslednjih dveh ekvivalentnih pogojev:*

(i) $\dim_{\mathbb{C}} H^q(X,\mathcal{F}) < \infty$ *za vsak koherenten analitičen snop* $\mathcal{F}$ *in vsak* $q \geq 1$,

(ii) $H^1(X,\mathcal{I}) < \infty$ *za vsak koherenten analitičen ideal* $\mathcal{I} \lhd \mathcal{O}_X$.

V resnici se izkaže, da je kohomologija 1-konveksnega prostora skoncentrirana na izjemni množici.

Definicija 1.3.19. Kompleksen prostor X je *holomorfno spredibilen* v točki $x \in X$, če obstaja holomorfna preslikava $F : X \to \mathbb{C}^m$, da je točka x izolirana v vlaknu $F^{-1}(F(x))$. Množico vseh točk, v katerih X ni holomorfno spredibilen, označimo s $\Sigma(X)$. Pravimo, da je X holomorfno spredibilen v neskončnosti, če je množica $\Sigma(X)$ kompaktna. Pravimo, da je X *holomorfno spredibilen*, če je množica $\Sigma(X)$ prazna (tj. X je holomorfno spredibilen v vsaki točki $x \in X$).

Za $F : X \to \mathbb{C}^n$ označimo

$$\Sigma(F) = \{x \in X;\ dim_x F^{-1}(F(x)) > 0\}.$$

To je analitična množica. Torej je

$$\Sigma(X) = \bigcap_F \Sigma(F); \quad F : X \to \mathbb{C}^n,\ n \in \mathbb{N}$$

analitična podmnožica v X, ki je očitno brez izoliranih točk in vsebuje vse nikjer diskretne analitične množice. Če je torej $\Sigma(X)$ kompaktna množica, je maksimalna kompaktna analitična množica. Velja celo več, kot v naslednji lemi (glej [54, Lemma 3]).

Lema 1.3.20. *Naj bo kompleksen prostor X holomorfno spredibilen v neskončnosti. Tedaj je $\Sigma(X)$ izjemna množica.*

Po Grauertovi karakterizaciji izjemnih množic (glej Trditev 1.3.16) je dovolj, da najdemo neko holomorfno konveksno okolico U množice $\Sigma := \Sigma(X)$. Naj bo $V \Subset X$ neka okolica množice Σ. Tedaj obstaja končno mnogo holomorfnih preslikav $F_j : X \to \mathbb{C}^{m_j}$, $j = 1, \ldots, k$, da velja $\Sigma = (\bigcap_{j=1}^k \Sigma(F_j)) \cap V$. Za preslikavo $F = (F_1, \ldots, F_k) : X \to \mathbb{C}^m$, $m = \sum_{j=1}^k m_j$, velja $\Sigma = \Sigma(F) \cap V$, torej je preslikava F na $V - \Sigma$ diskretna. Po Remmertovem rezultatu (glej IV'' na strani 330 v [50]) je holomorfna slika kompaktne analitične množice spet kompaktna analitična množica, zato je $F(\Sigma) \subset \mathbb{C}^m$ kompaktna analitična množica, torej končna množica. Od tod sledi, da obstaja odprta okolica $W \Subset V$ množice Σ, za katero velja $\partial W \cap F^{-1}(F(\Sigma)) = \emptyset$. Naj bo $W' \Subset \mathbb{C}^m$ Steinova okolica množice $F(\Sigma)$, za katero velja $V \cap F(\partial W) = \emptyset$. Sledi, da F inducira pravo preslikavo iz $U := W \cap F^{-1}(W')$ v W', torej je U holomorfno konveksna okolica množice Σ, ki smo jo iskali.

Norguet in Siu sta dokazala karakterizacijo Steinovih prostorov s plurisubharmoničnimi funkcijami izčrpanja, ki niso nujno strogo plurisubharmonične.

Izrek 1.3.21. *Kompleksen prostor X je Steinov natanko tedaj, ko je holomorfno spredibilen in obstaja zvezna funkcija izčrpanja $\phi : X \to \mathbb{R}$, ki plurisubharmonična na regularnem delu prostora X.*

Za konec omenimo še dve novejši karakterizaciji Steinovih in 1-konveksnih prostorov, ki pa veljata le za končno dimenzionalne prostore. Dokazal jih je Vâjâjtu [54], [55].

Izrek 1.3.22. *Naj bo X kompleksen prostor končne dimenzije. Denimo, da je kohomološka grupa $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ končno dimenzionalna. Tedaj velja:*

(i) *X je Steinov natanko tedaj, ko obstaja holomorfna funkcija $f : X \to \mathbb{C}$ s Steinovimi vlakni,*

(ii) *X je 1-konveksen natanko tedaj, ko je holomorfno spredibilen v neskončnosti in obstaja holomorfna funkcija $f : X \to \mathbb{C}$ z 1-konveksnimi vlakni.*

Izrek 1.3.23. *Naj bo X kompleksen prostor dimenzije n. Denimo, da so kohomološke grupe $H^j(X, \mathcal{O}_X)$, $1 \leq j \leq n-1$, končno dimenzionalne. Tedaj velja:*

(i) *X je Steinov natanko tedaj, ko je holomorfno spredibilen,*

(ii) *X je 1-konveksen natanko tedaj, ko je holomorfno spredibilen v neskončnosti.*

Čeprav so 1-konveksni prostori precej sorodni Steinovim, pa med njimi obstaja nekaj bistvenih razlik, ki teorijo na 1-konveksnih prostorih precej otežijo. Prva razlika je v vložitvah v $\mathbb{C}^n$. Za razliko od Steinovih prostorov 1-konveksnih prostorov seveda ne moremo vložiti v $\mathbb{C}^n$. Problem predstavlja izjemna množica E (predvsem kompaktnost), saj bi bila njena slika v $\mathbb{C}^n$ končna množica. Zato se lahko vprašamo ali je 1-konveksne prostore mogoče vložiti v $\mathbb{CP}^m$ oz. $\mathbb{C}^n \times \mathbb{CP}^m$. Na žalost tudi to v splošnem ni mogoče, saj je lahko izjemna množica E precej zapletena in že nje same ne moremo vložiti v $\mathbb{CP}^m$ oz. $\mathbb{C}^n \times \mathbb{CP}^m$. Na srečo lahko v veliko primerih problem preko Remmertove redukcije $R : X \to S$ prenesemo na Steinov prostor S in tega vložimo v $\mathbb{C}^n$. Druga razlika, ki predstavlja večjo težavo, je vprašanje obstoja okolic. Po klasičnem rezultatu, ki ga je dokazal Siu, vsak lokalno zaprt Steinov Y v kompleksnem prostoru X dopušča bazo Steinovih okolic v X. Takih okolic za 1-konveksne podprostore ne moremo najti. V veliki večini primerov 1-konveksen podprostor ne dopušča niti 1-konveksne okolice, kot lahko vidimo že v najbolj enostavnem primeru $\{0\} \times \mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{CP}^1$.

Poglavje 2

Rešitveni operator za $\bar{\partial}$-enačbo

2.1 Pomožne trditve

Naslednji dve trditvi sta zapisani v [51, Lemma 2.2 in Satz 3.2] v nekoliko šibkejši obliki. Trditev 2.1.1 se od [51, Lemma 2.2] razlikuje le po tem, da smo namesto točke $z^0 \in A$ vzeli kompaktno podmnožico $K \subset A$, ter dodali trditev (ii). Trditev 2.1.2 pa se od [51, Satz 3.2] razlikuje le po gladkosti funkcije.

Trditev 2.1.1. *Naj bo A analitična podmnožica v $D \subset \mathbb{C}^N$ in $K \subset A$ kompaktna množica, ki ima odprto Steinovo okolico v D. Tedaj obstaja odprta okolica $\Omega \subset D$ množice K in gladka plurisubharmonična funkcija $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ z naslednjimi lastnostmi:*

(i) *ψ je strogo plurisubharmonična na $\Omega \setminus A$,*

(ii) *Levijeva forma funkcije ψ je pozitivno definitna na $A \cap \Omega$ v smereh, ki niso Zariski tangentne na A,*

(iii) *$\psi = 0$ na $A \cap \Omega$ in $\psi > 0$ na $\Omega \setminus A$.*

Dokaz. Sledili bomo dokazu iz [51, Lemma 2.2]. Naj bo $\mathcal{I} = \mathcal{I}_A \subset \mathcal{O}_D$ snop idealov generiran z A. Izberimo odprto Steinovo okolico $U \subset D$ množice K (taka okolica obstaja po predpostavki). Za vsako N-terico $f = (f_1, \ldots, f_N) \in H^0(U, \mathcal{I})^N$ označimo z $J(f; z)$ kompleksno Jacobijevo matriko preslikave f v točki $z \in U$.

Trdimo, da za vsako točko $w \in U \setminus A$ obstaja $f \in H^0(U, \mathcal{I})^N$, da je determinanta matrike $J(f; w)$ različna od 0. Res, po Cartanovem Izreku A namreč obstaja $f_0 \in H^0(U, \mathcal{I})$, da velja $f_0(w) \neq 0$. Za $z \in U$ definiramo $f_j(z) := \frac{(z_j - w_j) f_0(z)}{f_0(w)}$, $j = 1, \ldots, N$. Tedaj za $f := (f_1, \ldots, f_N)$ velja $J(f; w) = Id$, torej $\det J(f; w) = 1 \neq 0$.

Analitična množica

$$B = \{z \in U;\ \det J(f; z) = 0 \text{ za vse } f \in H^0(U, \mathcal{I})^N\}$$

je vsebovana v $A \cap U$. Ker je K kompaktna množica, obstaja odprta okolica $\Omega \subset D$ množice K in končno mnogo preslikav $f^{(1)}, \ldots, f^{(q)} \in H^0(U, \mathcal{I})^N$, da velja

$$B \cap \Omega = \{z \in U;\ \det J(f^{(j)}; z) = 0 \text{ za vse } j = 1, \ldots, q\}.$$

Definirajmo $f = (f_1, \dots, f_m) := (f^{(1)}, \dots, f^{(q)})$. Tedaj ima matrika $J(f; z)$ maksimalen rang za vse $z \in \Omega \setminus A$. Ker se ta lastnost ohrani, če v $f = (f_1, \dots, f_m)$ dodamo končno mnogo elementov iz $H^0(U, \mathcal{I})$, lahko predpostavimo, da velja

$$A \cap \Omega = \{z \in U;\ f_j(z) = 0 \text{ za vse } j = 1, \dots, m\}.$$

Za $z \in \Omega$ definiramo

$$\psi(z) := \sum_{j=1}^{m} f_j(z)\overline{f_j(z)} = \sum_{j=1}^{m} |f_j(z)|^2.$$

Očitno je ψ gladka realna funkcija, za katero velja $\psi = 0$ na $A \cap \Omega$ in $\psi > 0$ na $\Omega \setminus A$. Zlahka preverimo, da je Levijeva forma $L_z\psi(v)$ funkcije ψ v točki $z \in \Omega$ evalvirana na vektorju $v \in \mathbb{C}^N$ enaka $|J(f; z)v|^2$. Res, za vsak $j = 1, \dots, m$ velja

$$L_z|f_j|^2(v) = \sum_{k,l=1}^{N} \frac{\partial^2 (f_j\overline{f_j})(z)}{\partial z_k \partial \bar z_l} v_k \bar v_l = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f_j}{\partial z_k} v_k \cdot \overline{\sum_{l=1}^{N} \frac{\partial f_j}{\partial z_l} v_l} = |\partial_z f(v)|^2 ,$$

zato je

$$L_z\psi(v) = \sum_{j=1}^{m} L_z|f_j|^2(v) = \sum_{j=1}^{m} |\partial_z f_j(v)|^2 = |J(f; z)v|^2.$$

Od tod sledi, da je ψ plurisubharmonična na Ω. Dalje, ψ je strogo plurisubharmonična na $\Omega \setminus A$, saj ima matrika $J(f; z)$ tam maksimalen rang. Poleg tega je Levijeva forma funkcije ψ pozitivno definitna na $A \cap \Omega$ v smereh, ki niso Zariski tangentne na A, saj je v teh smereh vsaj eden izmed členov v $|J(f; z)v|^2 = \sum_{j=1}^{m} |\partial_z f_j(v)|^2$ različen od 0. □

Trditev 2.1.2. *Naj bo A analitična podmnožica v $D \subset \mathbb{C}^N$, $K \subset A$ kompaktna množica in $\phi : A \to \mathbb{R}$ strogo plurisubharmonična funkcija razreda $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 2$). Tedaj lahko ϕ razširimo na odprto okolico $\Omega \subset D$ množice K do strogo plurisubharmonične funkcije razreda $\mathcal{C}^k$.*

Dokaz. Dokaz je identičen dokazu iz [51, Satz 3.2.b]. Iz dokaza je razvidno, da je stopnja gladkosti razširitve odvisna od stopnje gladkosti začetne funkcije ϕ. Če je začetna funkcija razreda $\mathcal{C}^k$, je tudi razširitev razreda $\mathcal{C}^k$. □

V naslednji lemi je definirana funkcija M_ϵ, ki je gladek analog za maksimum funkcijo in je bila že velikokrat uporabljena v teoriji plurisubharmoničnih funkcij (glej na primer [34, § 4]). Mi jo bomo nekoliko prilagodili našim potrebam. Potrebovali jo bomo pri konstrukciji določene Steinove domene (glej Trditev 2.2.1).

Lema 2.1.3. *Fiksirajmo $\epsilon > 0$ in izberimo konveksno funkcijo $A_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ razreda $\mathcal{C}^\infty$, da velja $A_\epsilon(x) = x$ za $x \geq 0$ in $A_\epsilon(x) = -x - \epsilon$ za $x \leq -\epsilon$. Tedaj funkcija $M_\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana z $M_\epsilon(x, y) = \frac{x+y}{2} + A_\epsilon(\frac{x-y}{2})$ ustreza naslednjim lastnostim:*

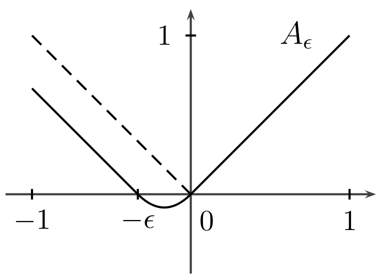
(i) *$M_\epsilon(x, y) = x$ za $x \geq y$,*

(ii) $M_\epsilon(x,y) = y - \epsilon$ *za* $x \leq y - 2\epsilon$,

(iii) $M_\epsilon(x,y) \geq x$,

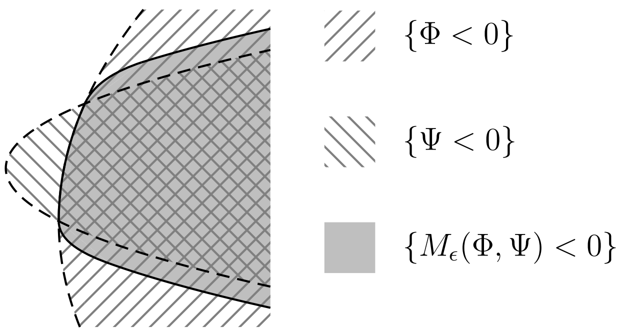
(iv) $|M_\epsilon(x,y) - \max\{x,y\}| \leq \epsilon$,

(v) *če je* X *kompleksna mnogoterost in* $\Phi, \Psi : X \to \mathbb{R}$ *strogo plurisubharmonični funkciji razreda* $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 2)$, *potem je tudi* $M_\epsilon(\Phi,\Psi) : X \to \mathbb{R}$ *strogo plurisubharmonična funkcija razreda* $\mathcal{C}^k$.



Slika 2.1: Funkcija A_ϵ.

Opazimo lahko, da funkcija $M_\epsilon(x,y)$ ni simetrična v x in y, je pa simetrična v x in $y+\epsilon$. V resnici lahko nanjo gledamo kot na simetrično gladko maksimum funkcijo argumentov x in $y+\epsilon$. Slika 2.1 prikazuje graf funkcije A_ϵ in Slika 2.2 prikazuje ničelno nivojsko množico funkcije $M_\epsilon(\Phi,\Psi)$ glede na ničelnimi nivojski množici funkcij Φ in Ψ.



Slika 2.2: Ničelna nivojska množica funkcije $M_\epsilon(\Phi,\Psi)$.

Dokaz. Lastnosti (i) in (ii) očitno sledita iz definicij funkcij A_ϵ in M_ϵ. Zaradi konveksnosti funkcije A_ϵ velja $A_\epsilon(x) \geq x$ in $|A_\epsilon(x) - |x|| \leq \epsilon$. Iz prve ocene sledi lastnost (iii), druga ocena pa skupaj z enakostjo $\max\{x,y\} = \frac{x+y}{2} + |\frac{x-y}{2}|$ implicira lastnost (iv). Za dokaz lastnosti (v) definiramo $N := (\Phi,\Psi)$. Očitno je funkcija $M_\epsilon(\Phi,\Psi)$ razreda $\mathcal{C}^k$. Njena Levijeva forma je enaka

$$L_z M_\epsilon(\Phi,\Psi)(v) = \langle H_{N(z)} M_\epsilon \cdot \partial_z N(v), \partial_z N(v)\rangle + D_{N(z)} M_\epsilon \cdot L_z N(v),$$

kjer D in H označujeta diferencialni operator in Hessejev operator, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pa označuje Hermitski skalarni produkt. Velja

$$H_{N(z)} M_\epsilon = \frac{1}{4} A''_\epsilon \Big(\frac{\Phi(z) - \Psi(z)}{2} \Big) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ker je funkcija A_ϵ konveksna, je matrika $H_{N(z)} M_\epsilon$ nenegativno definitna, torej je izraz $\langle H_{N(z)} M_\epsilon \cdot \partial_z N(v), \partial_z N(v) \rangle$ nenegativen. Dalje velja

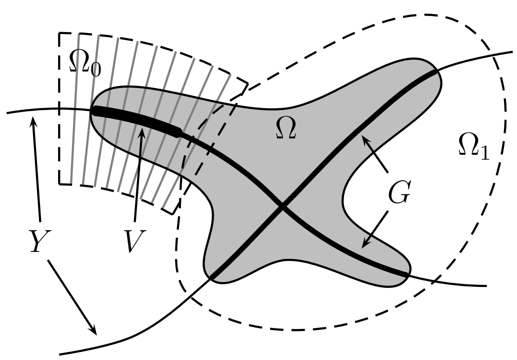
$$D_{N(z)} M_\epsilon = \frac{1}{2} \left(1 + A'_\epsilon \Big(\frac{\Phi(z) - \Psi(z)}{2} \Big), 1 - A'_\epsilon \Big(\frac{\Phi(z) - \Psi(z)}{2} \Big) \right).$$

Zaradi konveksnosti funkcije A_ϵ velja $-1 \leq A'_\epsilon \leq 1$, zato sta člena v $D_{N(z)} M_\epsilon$ nenegativna in ne oba enaka 0. Ker sta za $v \neq 0$ člena v $L_z N(v) = (L_z \Phi(v), L_z \Psi(z))^T$ pozitivna, je izraz $D_{N(z)} M_\epsilon \cdot L_z N(v)$ pozitiven, kar implicira lastnost (v). $\square$

2.2 Razširitve Steinovih domen

V tem razdelku bomo pokazali kako 'razširimo' Steinovo domeno G v Steinovi podvarieteti $Y \subset \mathbb{C}^N$ do Steinove domene v ambientnem prostoru $\mathbb{C}^N$ s posebnimi lastnostmi. To nam bo v pomoč pri obravnavi 1-konveksnih domen, saj je njihova Remmertova redukcija taka domena G.

Trditev 2.2.1. *Naj bo $Y \subset \mathbb{C}^N$ Steinova podvarieteta, $G \Subset Y$ Steinova domena s strogo psevdokonveksnim robom $\partial G \subset Y_{reg}$ razreda $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 2)$ in $V \subset G \cap Y_{reg}$ odprta množica. Denimo, da obstaja odprta okolica $\Omega_0 \subset \mathbb{C}^N$ množice $\bar{V}$ in holomorfna retrakcija $r : \Omega_0 \to Y \cap \Omega_0$. Naj bo $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^N$ odprta okolica množice $\bar{G} \setminus \Omega_0$. Tedaj obstaja Steinova domena $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ s strogo psevdokonveksnim robom razreda $\mathcal{C}^k$, za katero velja $\Omega \subset \Omega_0 \cup \Omega_1$, $\Omega \cap Y = G$ in $r(\Omega \cap \Omega_0) \subset G$.*



Slika 2.3: Domena Ω.

Dokaz. Ideja dokaza je naslednja. Domeno Ω bomo konstruirali kot ničelno podnivojnico primerno izbrane strogo plurisubharmonične funkcije. Za izhodišče bomo vzeli globalno strogo plurisubharmonično definicijsko funkcijo ϕ za domeno G in jo po Trditvi 2.1.2 razširili na neko okolico $\Omega_2 \subset \mathbb{C}^N$ množice $\bar{G}$. Ničelna podnivojnica te funkcije ni nujno kompaktno vsebovana v Ω_2. To bomo popravili tako, da bomo funkciji ϕ prišteli $M\psi$, kjer je $M > 0$ in ψ funkcija iz Trditve 2.1.1. Za dovolj velik M bo tako ničelna podnivojnica funkcije $\Psi = \phi + M\psi$ kompaktno vsebovana v Ω_2 in $\Omega_0 \cup \Omega_1$. Funkcijo Ψ bomo morali seveda še precej popraviti, da bo domena Ω ustrezala vsem zaključkom iz trditve. Glavni problem bo izpolniti pogoj $r(\Omega \cap \Omega_0) \subset G$, saj se ničelna podnivojnica funkcije Ψ ne retraktira nujno na $\bar{G}$ (težava je predvsem tam, kjer imata domeni G in V del roba skupen). To težavo bi lahko odpravili, če bi namesto funkcije Ψ vzeli funkcijo $\Phi = \phi \circ r + \psi$. Problem je v tem, da je ta funkcija definirana le na definicijski domeni retrakcije Ω_0, ki ne vsebuje cele domene $\bar{G}$. V končni fazi bomo torej morali funkciji Φ in Ψ nekako zlepiti, kar bomo storili s pomočjo Leme 2.1.3. Čisto na koncu bomo poskrbeli še, da bo rob dobljene domene gladek. Oglejmo si sedaj podroben dokaz.

Ker je $G \subset Y$ Steinova domena s strogo psevdokonveksnim robom razreda $\mathcal{C}^k$, obstaja strogo plurisubharmonična funkcija ϕ razreda $\mathcal{C}^k$, definirana na odprti okolici $W' \subset Y$ množice $\bar{G}$ (z izoliranimi kritičnimi točkami), da velja $G = \{z \in W';\ \phi(z) < 0\}$. Predpostavimo lahko, da je $W' = (\Omega_0 \cup \Omega_1) \cap Y$.

Po Trditvi 2.1.2 lahko funkcijo ϕ razširimo na neko odprto okolico $\Omega_2 \subset \mathbb{C}^N$ množice $\bar{G}$ do strogo plurisubharmonične funkcije razreda $\mathcal{C}^k$. Po Trditvi 2.1.1 obstaja odprta okolica $\Omega_3 \subset \mathbb{C}^N$ množice $\bar{G}$ in plurisubharmonična funkcija $\psi : \Omega_3 \to \mathbb{R}$ razreda $\mathcal{C}^\infty$, ki je strogo plurisubharmonična povsod razen na $Y \cap \Omega_3$ v smereh, ki so Zariski tangentne na Y, in zanjo velja $\psi = 0$ na $Y \cap \Omega_3$ ter $\psi > 0$ na $\Omega_3 \setminus Y$. Predpostavimo lahko, da je $\Omega_2 = \Omega_3 = \Omega_0 \cup \Omega_1$.

Definiramo funkciji $\Phi = \phi \circ r + \psi$ na Ω_0 in $\Psi = \phi + M\psi$ na $\Omega_0 \cup \Omega_1$, kjer bomo konstanto M izbrali pozitivno. Funkcija Ψ je očitno strogo plurisubharmonična na $\Omega_0 \cup \Omega_1$. Enako velja za funkcijo Φ na Ω_0. Res, funkciji $\phi \circ r$ in ψ sta tam plurisubharmonični, pri čemer je ψ strogo plurisubharmonična povsod razen na Y v Zariski tangentnih smereh, kjer pa je $\phi \circ r = \phi$ strogo plurisubharmonična. Konstanto M izberemo tako veliko, da je $\{z \in \Omega_0 \cup \Omega_1;\ \Psi(z) \leq 0\}$ kompaktna množica (tj. $\Psi > 0$ blizu roba množice $\Omega_0 \cup \Omega_1$) in velja $\{z \in \Omega_0 \cap \Omega_1;\ \Psi(z) \leq 0\} \subset \{z \in \Omega_0 \cap \Omega_1;\ \Phi(z) < -\delta\}$ za nek $\delta > 0$.

Sedaj bomo funkciji Φ in Ψ 'zlepili'. Za $\epsilon > 0$ naj bo M_ϵ funkcija iz Leme 2.1.3. Če izberemo $\epsilon < \frac{\delta}{2}$, potem iz definicije δ in točke (ii) iz Leme 2.1.3 sledi, da se funkcija $M_\epsilon(\Phi, \Psi)$ ujema s funkcijo $\Psi - \epsilon$ v neki okolici množice $\{z \in \Omega_0 \cap \Omega_1;\ \Psi(z) = 0\}$ (za vse dovolj majhne ϵ lahko to okolico izberemo isto), torej jo lahko razširimo na neko okolico Ω_4 množice $\{z \in \Omega_1;\ \Psi(z) = 0\}$ s $\Psi - \epsilon$. Če ϵ po potrebi nekoliko zmanjšamo, lahko privzamemo še, da je $\{z \in \Omega_0 \cup \Omega_4;\ M_\epsilon(\Phi(z), \Psi(z)) = 0\}$ kompaktna množica.

Označimo z $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{C}^N$ domeno omejeno z $\{z \in \Omega_0 \cup \Omega_4;\ M_\epsilon(\Phi(z), \Psi(z)) = 0\}$. Očitno je $\tilde{\Omega}$ vsebovana v $\Omega_0 \cup \Omega_1$. Velja $G \cap \Omega_0 \subset \tilde{\Omega}$, saj je tam $M_\epsilon(\Phi, \Psi) = \phi < 0$. Podobno je $G \cap \Omega_1 \subset \tilde{\Omega}$, saj je $\tilde{\Omega} \cap \Omega_1 = \{z \in \Omega_1;\ \Psi(z) < \epsilon\}$. Velja tudi $r(\tilde{\Omega} \cap \Omega_0) \subset G$, saj je $M_\epsilon(\Phi, \Psi) \geq \Phi$ in po konstrukciji preslikava r preslika množico

$\{z \in \Omega_0;\ \Phi(z) < 0\}$ v G. Če je rob $\partial\tilde{\Omega} = \{z \in \Omega_0 \cup \Omega_4;\ M_\epsilon(\Phi(z), \Psi(z)) = 0\}$ gladek (tj. funkcija $M_\epsilon(\Phi, \Psi)$ nima kritičnih točk na $\partial\tilde{\Omega}$), potem je $\tilde{\Omega}$ Steinova domena s strogo psevdokonveksnim robom razreda $\mathcal{C}^k$ in lahko vzamemo $\Omega = \tilde{\Omega}$. Če temu ni tako, moramo domeno $\tilde{\Omega}$ nekoliko perturbirati, da zadostimo še tej zadnji želeni lastnosti in hkrati ohranimo ostale lastnosti.

Opazimo lahko, da po konstrukciji funkcija $M_\epsilon(\Phi, \Psi)$ nima kritičnih točk na $\partial\tilde{\Omega} \cap Y$, zato enako velja na neki kompaktni okolici $K \subset \Omega_0 \cup \Omega_4$ te množice. Po Morsejevi lemi (glej [40, Chapter VII, Lemma 8.5]) lahko funkcijo $M_\epsilon(\Phi, \Psi)$ poljubno dobro aproksimiramo z neko drugo strogo plurisubharmonično funkcijo ρ razreda $\mathcal{C}^k$, ki ima samo lepe izolirane kritične točke in zanjo velja $\rho = M_\epsilon(\Phi, \Psi)$ na K. Če je aproksimacija dovolj dobra, je množica $\{z \in \Omega_0 \cup \Omega_4;\ \rho(z) = 0\}$ kompaktna. Nazadnje, da se znebimo še kritičnih točk na robu, domeno omejeno z $\{z \in \Omega_0 \cup \Omega_4;\ \rho(z) = 0\}$ nekoliko vbočimo v okolici vsake kritične točke na robu. Kako to naredimo je prikazano v [33, Main lemma 2.7 in Fig. 1] na straneh 79-80 (glej kako konstruirajo domeno D_- iz domene D_ξ). Tako dobimo domeno Ω, ki zadošča vsem lastnostim iz trditve. $\square$

2.3 Konstrukcija rešitvenega operatorja

Naj bo D domena v kompleksni mnogoterosti X. Označimo s $\mathcal{C}^l_{0,1}(\bar{D})$ množico vseh $(0,1)$-form s koeficienti v $\mathcal{C}^l(\bar{D})$. Naj bo še $U \subset D$ odprta množica (množici D in U imata lahko del roba skupen). Označimo s $\mathcal{C}^l_{0,1}(\bar{D}; U)$ množico vseh $(0,1)$-form s koeficienti v $\mathcal{C}^l(\bar{D})$, ki imajo nosilec vsebovan v $\bar{U}$. V primeru $l = 0$ bomo označevali kar $\mathcal{C}(\bar{D}) = \mathcal{C}^0(\bar{D})$ in $\mathcal{C}_{0,1}(\bar{D}; U) = \mathcal{C}^0_{0,1}(\bar{D}; U)$.

Naslednja trditev podaja omejen linearen rešitveni operator za nehomogeno $\bar{\partial}$-enačbo za $\bar{\partial}$-sklenjene forme iz $\mathcal{C}_{0,1}(\bar{D}; U)$. Klasično Steinovo verzijo tega rezultata so dokazali Lieb, Range in Siu (glej [18, str. 56, Theorem 2.5.3] in tamkajšnje reference).

Trditev 2.3.1. *Naj bo D relativno kompaktna 1-konveksna domena s strogo psevdokonveksnim robom razreda $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 2)$ v kompleksni mnogoterosti X in $U \subset D$ Steinova domena, katere zaprtje $\bar{U}$ ne seka izjemne množice domene D. Tedaj obstaja linearen operator $T : \mathcal{C}_{0,1}(\bar{D}; U) \to \mathcal{C}(\bar{D})$ z naslednjimi lastnostmi:*

(i) *če je $f \in \mathcal{C}^1_{0,1}(\bar{D}; U)$ in velja $\bar{\partial} f = 0$, potem velja $\bar{\partial}(Tf) = f$,*

(ii) *če je $f \in \mathcal{C}^l_{0,1}(\bar{D}; U)$ za nek $l \in \{0, \ldots, k\}$, potem velja*

$$\|Tf\|_{\mathcal{C}^{j,1/2}(\bar{D})} \leq M \|f\|_{\mathcal{C}^j_{0,1}(\bar{D})}, \quad j \in \{0, \ldots, l\}.$$

Konstanta M je odvisna le od D, U in j.

Dokaz. Ideja dokaza je, da problem zreduciramo na Steinov primer, za katerega je rezultat že znan. Vzeli bomo Remmertovo redukcijo $R : D' \to Y$ nekoliko večje 1-konveksne domene $D' \supset \bar{D}$ in Steinov prostor Y vložili v $\mathbb{C}^N$. Nato bomo s pomočjo Trditve 2.2.1 našli Steinovo domeno $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ s strogo psevdokonveksnim robom, za katero bo veljalo $\Omega \cap Y = R(D)$ in nam bo omogočala, da forme iz $\mathcal{C}_{0,1}(\overline{R(D)}; R(U))$ razširimo na $\bar{\Omega}$.

Po definiciji obstaja odprta okolica $W \subset X$ roba ∂D in strogo plurisubharmonična funkcija $\varphi : W \to \mathbb{R}$ razreda $\mathcal{C}^k$ brez kritičnih točk na ∂D, za katero velja $D \cap W = \{z \in W;\ \varphi(z) < 0\}$. Za dovolj majhen $\epsilon > 0$ je tudi $D' := \{z \in W;\ \varphi(z) < \epsilon\} \cup D \subset X$ 1-konveksna domena, katere izjemna množica sovpada z izjemno množico domene D.

Naj bo $R : D' \to Y$ Remmertova redukcija. Označimo z E izjemno množico domene D in definirajmo $G := R(D)$, $V := R(U)$, $F := R(E)$. Tedaj je G Steinova domena s strogo psevdokonveksnim robom razreda $\mathcal{C}^k$, V je Steinova domena in Y je Steinov prostor z izoliranimi singularnostmi vsebovanimi v F. Vsako formo $\alpha \in \mathcal{C}^j_{0,1}(\bar{D}; U)$ lahko na naraven način identificiramo s formo v $\mathcal{C}^j_{0,1}(\bar{G}; V)$. Res, ker je $R : D' \setminus E \to Y \setminus F$ biholomorfizem, je potisk $R_\star \alpha$ forme α dobro definiran na $\bar{G} \setminus F$. Ker ima forma α nosilec vsebovan v $\bar{U}$, ima forma $R_\star \alpha$ nosilec vsebovan v $\bar{V}$ in jo lahko zato razširimo z 0 čez F (saj je $F \cap \bar{V} = \emptyset$). Tako je $R_\star : \mathcal{C}_{0,1}(\bar{D}; U) \to \mathcal{C}_{0,1}(\bar{G}; V)$ dobro definiran linearen operator, ki komutira z $\bar{\partial}$ ter ohranja norme in stopnjo gladkosti form.

Klasični rezultati (glej [3],[43]) zagotavljajo obstoj prave holomorfne vložitve $i : Y \to \mathbb{C}^N$ (za nek N). Prostor Y bomo identificirali z njegovo sliko $i(Y)$. Po izreku o cevastih okolicah, ki sta ga dokazala Docquier in Grauert (glej [7] ali [18, str. 67, Theorem 3.3.3]), obstaja odprta okolica $\Omega_0 \subset \mathbb{C}^N$ množice $\bar{V}$ in holomorfna retrakcija $r : \Omega_0 \to Y \cap \Omega_0$. Izberimo odprto okolico $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^N$ množice $\bar{G} \setminus \Omega_0$, da velja $r(\Omega_0 \cap \Omega_1) \cap \bar{V} = \emptyset$. Po Trditvi 2.2.1 obstaja Steinova domena $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ s strogo psevdokonveksnim robom razreda $\mathcal{C}^k$, za katero velja $\Omega \subset \Omega_0 \cup \Omega_1$, $\Omega \cap Y = G$ in $r(\Omega \cap \Omega_0) \subset G$.

Vsako formo $\alpha \in \mathcal{C}^j_{0,1}(\bar{G}; V)$ lahko s predpisom $P(\alpha) = r^\star \alpha$ (povlek) na $\bar{\Omega} \cap \Omega_0$ in $P(\alpha) = 0$ na $\bar{\Omega} \cap \Omega_1$ razširimo do forme $P(\alpha) \in \mathcal{C}^j_{0,1}(\bar{\Omega}; V')$, kjer je $V' = r^{-1}(V) \cap \Omega$. Res, po izbiri množice Ω_1 se predpisa ujemata na preseku $\Omega \cap \Omega_0 \cap \Omega_1$ in ker je r holomorfna preslikava, je $P(\alpha)$ $(0,1)$-forma. Tako je $P : \mathcal{C}_{0,1}(\bar{G}; V) \to \mathcal{C}^j_{0,1}(\bar{\Omega}; V')$ linearen operator, ki komutira z $\bar{\partial}$ ter ohranja norme in stopnjo gladkosti form.

Sedaj lahko uporabimo rezultat iz Steinovega primera (glej [18, str. 56, Theorem 2.5.3]), ki podaja omejen linearen rešitveni operator za $\bar{\partial}$-enačbo $\tilde{T} : \mathcal{C}_{0,1}(\bar{\Omega}) \to \mathcal{C}(\bar{\Omega})$. Naj bo $S : \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \to \mathcal{C}(\bar{G})$ zožitveni operator $S(\alpha) = \alpha|_{\bar{G}}$. Tedaj ima operator

$$T = R^\star \circ S \circ \tilde{T} \circ P \circ R_\star : \mathcal{C}_{0,1}(\bar{D}; U) \to \mathcal{C}(\bar{D})$$

vse lastnosti iz trditve. □

Opomba 2.3.2. Zanimivo bi bilo vedeti, ali lahko najdemo rešitveni operator z analognimi lastnostmi za $(0,1)$-forme, katerih koeficienti so enaki 0 le na neki fiksni okolici izjemne množice domene D, ali celo za $(0,1)$-forme, katerih koeficienti so enaki 0 le vzdolž izjemne množice domene D do nekega dovolj visokega reda. Če bi želeli dokazati lemo za forme prvega tipa preko iste metode, bi morali le posplošiti izrek o cevastih okolicah na primer Steinovega prostora z izoliranimi singularnostmi, tj. konstruirati bi morali cevasto okolico za regularni del prostora Y (ali za $Y \setminus W$, kjer je W okolica singularnega dela prostora Y). Taka cevasta okolica seveda ne more obstajati okoli singularnega dela prostora Y. Dokaz leme za forme drugega tipa bi zahteval podrobnejšo analizo.

Poglavje 3

Spreji

3.1 Definicije

Naj bosta X in Z kompleksni mnogoterosti, D domena v X in $k \in \{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$. Rekli bomo, da je preslikava $f : \bar{D} \to Z$ razreda $\mathcal{A}^k$, če je razreda $\mathcal{C}^k(\bar{D})$ in holomorfna na D. Obravnavali bomo prereze surjektivne preslikave $\pi : Z \to \bar{D}$, ki je bodisi zožitev na $\bar{D}$ holomorfne submerzije $\pi : \tilde{Z} \to X$ ali svežnej razreda $\mathcal{A}^k$. Spomnimo se definicije takega svežnja.

Definicija 3.1.1. Naj bosta X in Y kompleksni mnogoterosti in $D \subset X$ domena z robom razreda $\mathcal{C}^l$ (za nek $l \geq 2$). Pravimo, da je svežnej $\pi : Z \to \bar{D}$ z vlaknom Y *razreda* $\mathcal{A}^k$ ($k \in \mathbb{Z}_+$), če za vsako točko $x \in \bar{D}$ obstaja relativno odprta okolica $U \ni x$ v $\bar{D}$ in izomorfizem svežnjev $\phi : Z|_U \to U \times Y$, ki je razreda $\mathcal{C}^k$ in holomorfen nad $U \cap D$.

Označimo z $Z_x := \pi^{-1}(x)$ vlakno nad točko $x \in \bar{D}$. Za $z \in Z$ označimo z $VT_zZ := \ker D\pi(z)$ tangentni prostor na vlakno $Z_{\pi(z)}$ v točki z, ki ga imenujemo *vertikalni tangentni prostor* mnogoterosti Z v točki z. *Vertikalni tangentni svežnej* VTZ z vlakni VT_zZ je holomorfen vektorski podsvežnej tangentnega svežnja TZ.

Spomnimo se definicije holomorfnega spreja prerezov (glej [18, Definition 5.9.1, str. 215]).

Definicija 3.1.2. Naj bo $D \subset X$ domena z robom razreda $\mathcal{C}^l$ ($l \geq 2$) in $0 \in P \subset \mathbb{C}^N$ odprta množica. Lokalen *sprej π-prerezov razreda* $\mathcal{A}^k(D)$ je $\mathcal{C}^k$ preslikava $f : \bar{D} \times P \to Z$, ki je holomorfna na $D \times P$ in zanjo velja

$$\pi(f(x,t)) = x, \quad x \in \bar{D},\ t \in P.$$

Pravimo, da je f *dominanten* na $K \subset \bar{D}$, če je parcialni odvod

$$\partial_t|_{t=0} f(x,t) : T_0\mathbb{C}^N \cong \mathbb{C}^N \to VT_{f(x,0)}Z$$

surjektiven za vsak $x \in K$. Pravimo, da f fiksira $L \subset \bar{D}$, če velja

$$f(x,t) = f(x,0), \quad t \in P$$

za vsak $x \in L$. Prerez $f_0 := f(\cdot, 0)$ imenujemo *jedro* spreja prerezov f. Če je $P = \mathbb{C}^N$, potem pravimo, da je f *globalen* sprej prerezov.

Vsak globalen sprej prerezov je seveda tudi lokalen sprej prerezov, zato bomo besedo 'lokalen' izpuščali, ko bomo govorili o sprejih prerezov, ki niso nujno globalni.

Podobno definiramo holomorfen sprej prerezov nad odprto domeno v bazni mnogoterosti. Pogoj dominantnosti bo zelo pomemben pri procesu lepljenja sprejev prerezov (glej Trditev 3.3.1). V primeru kanonične projekcije $\pi : X \times Y \to X$ lahko π-prereze identificiramo s preslikavami iz X v Y in spreje prerezov s spreji preslikav.

Spreja prerezov ne smemo mešati s klasičnim pojmom spreja, ki ga je uvedel Gromov [30]. Spomnimo se še njegove definicije. Naj bo $p : V \to Z$ holomorfen vektorski sveženj. Označimo z $V_z := p^{-1}(z)$ vlakno nad točko $z \in Z$ in z 0_z ničelni element v V_z. Opazimo lahko, da je V_z na naraven način $\mathbb{C}$-linearen podprostor tangentnega prostora $T_{0_z}V$.

Definicija 3.1.3. Naj bo $\pi : Z \to X$ holomorfna submerzija in D domena v X. Lokalen π-*sprej* na $Z|_D = \pi^{-1}(D)$ je četverka (V, Ω, p, s), kjer je $p : V \to Z|_D$ holomorfen vektorski sveženj, $\Omega \subset V$ odprta okolica ničelnega prereza in $s : \Omega \to Z|_D$ holomorfna preslikava, za katero velja

$$s(V_z) \subset Z_{\pi(z)}, \quad s(0_z) = z, \quad z \in Z|_D.$$

Pravimo, da s dominanten na $K \subset Z|_D$, če je zožitev diferenciala

$$Ds(0_z) : V_z \to VT_zZ$$

surjektivna za vsak $z \in K$. Če je $\Omega = V$, potem pravimo, da je trojica (V, p, s) *globalen* sprej.

Nad vsako relativno kompaktno Steinovo domeno $D \subset X$ vedno obstaja dominanten sprej prerezov s predpisanim jedrom [18, Lemma 5.10.4, str. 220] (glej tudi Trditev 3.4.1 in predhodno diskusijo). Če je D 1-konveksna domena, bi lahko pričakovali obstoj spreja prerezov s predpisanim jedrom, ki je dominanten na komplementu izjemne množice $E \subset D$. Poskus v tej smeri je bil narejen v [46, § 4] (glej tudi [47, Corollary 2.6]). Na žalost pa je dokaz v [46] nepopoln (glej Razdelek 3.4 ali [19, Appendix]). Obstoju sprejev prerezov nad 1-konveksnimi domenami se bomo posvetili v Razdelku 3.4.

3.2 Posplošena Cartanova lema o razcepu

V tem razdelku bomo dokazali verzijo posplošene Cartanove leme o razcepu za 1-konveksne Cartanove pare z ocenami do roba (glej Izrek 3.2.3). Definicija 1-konveksnega Cartanovega para je naslednja (primerjaj z Definicijama 2.1 in 2.6 v [33]; za definicijo Cartanovega para v standardnem Steinovem primeru glej [18, Definition 5.7.1, str. 209]).

Definicija 3.2.1. Par (D_0, D_1) domen v kompleksni mnogoterosti X je *1-konveksen Cartanov par* razreda $\mathcal{C}^k$, če ustreza naslednjim pogojem:

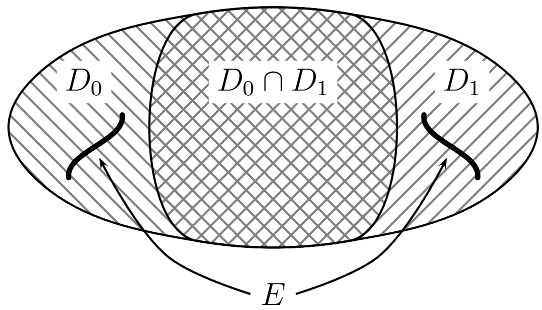
(i) D_0, D_1 in $D_0 \cup D_1$ so relativno kompaktne 1-konveksne domene s strogo psevdokonveksnim robom razreda $\mathcal{C}^k$ in $D_0 \cap D_1$ je relativno kompaktna Steinova domena s strogo psevdokonveksnim robom razreda $\mathcal{C}^k$,

(ii) $\overline{D_0 \setminus D_1} \cap \overline{D_1 \setminus D_0} = \emptyset$,

(iii) izjemna množica E domene $D_0 \cup D_1$ ne seka množice $\overline{D_0 \cap D_1}$.

Pravimo, da je D_1 *konveksna izboklina* na D_0, če poleg zgornjega obstaja še biholomorfna preslikava iz odprte okolice množice $\bar{D}_1$ na odprto množico v $\mathbb{C}^n$ ($n = \dim_{\mathbb{C}} X$), ki preslika D_1 in $D_0 \cap D_1$ na strogo konveksni domeni.

Opazimo lahko, da je domena D_1 v definiciji konveksne izbokline seveda Steinova.



Slika 3.1: 1-konveksen Cartanov par (D_0, D_1).

Naslednji izrek je 1-konveksna verzija posplošene Cartanove leme o razcepu, ki jo najdemo v [8, Theorem 3.2] (glej tudi [18, Proposition 5.8.1]).

Izrek 3.2.2. *Naj bo (D_0, D_1) 1-konveksen Cartanov par razreda $\mathcal{C}^l$ $(l \geq 2)$ v kompleksni mnogoterosti X. Definiramo $D_{0,1} = D_0 \cap D_1$ in $D = D_0 \cup D_1$. Za vsako omejeno odprto konveksno množico $0 \in P \in \mathbb{C}^N$ in vsak $r \in (0,1)$ obstaja $\epsilon > 0$, ki izpolnjuje naslednji pogoj. Za vsako preslikavo $\gamma : \bar{D}_{0,1} \times P \to \mathbb{C}^N$ razreda $\mathcal{A}^k$ $(k \in \{0, 1 \ldots, l\})$ oblike*

$$\gamma(x,t) = t + c(x,t), \quad x \in \bar{D}_{0,1}, t \in P,$$

kjer velja $\|c\|_{\mathcal{C}^k(\bar{D}_{0,1} \times P)} < \epsilon$, obstajata preslikavi $\alpha : \bar{D}_0 \times rP \to \mathbb{C}^N$ in $\beta : \bar{D}_1 \times rP \to \mathbb{C}^N$ razreda $\mathcal{A}^k$ oblike

$$\alpha(x,t) = t + a(x,t), \quad x \in \bar{D}_0,\ t \in rP,$$

$$\beta(x,t) = t + b(x,t), \quad x \in \bar{D}_1,\ t \in rP,$$

ki sta gladko odvisni od γ ter izpolnjujeta pogoj

$$\gamma(x, \alpha(x,t)) = \beta(x,t), \quad x \in \bar{D}_{0,1},\ t \in rP$$

in ocene

$$\|a\|_{\mathcal{C}^k(\bar{D}_0\times rP)} \leq M\|c\|_{\mathcal{C}^k(\bar{D}_{0,1}\times P)},$$

$$\|b\|_{\mathcal{C}^k(\bar{D}_1\times rP)} \leq M\|c\|_{\mathcal{C}^k(\bar{D}_{0,1}\times P)},$$

kjer je konstanta M odvisna le od D. Če je c enak 0 do reda $m \in \mathbb{Z}_+$ vzdolž $t = 0$, enako velja tudi za a in b. Če je X' zaprta analitična podmnožica v X, ki ne seka množice $\bar{D}_{0,1}$, lahko zagotovimo, da sta a in b enaka 0 do predpisanega končnega reda vzdolž $(X' \cap \bar{D}_0) \times rP$ in $(X' \cap \bar{D}_1) \times rP$.

Označimo z A_r, B_r oz. C_r Banachove prostore preslikav $\bar{D}_0 \times rP \to \mathbb{C}^N$, $\bar{D}_1 \times rP \to \mathbb{C}^N$ oz. $\bar{D}_{0,1} \times rP \to \mathbb{C}^n$, ki so razreda $\mathcal{A}^k$ in imajo končno $\mathcal{C}^k$ normo.

Najprej bomo dokazali naslednjo lemo (glej [18, Lemma 5.8.2, str. 212]).

Lema 3.2.3. *Privzemimo hipoteze iz Izreka 3.2.2. Obstajata omejena linearna operatorja $\mathcal{A} : C_r \to A_r$ in $\mathcal{B} : C_r \to B_r$, ki zadoščata enakosti*

$$\phi = \mathcal{A}\phi - \mathcal{B}\phi, \quad \phi \in C_r.$$

Če je ϕ enak 0 do reda $m \in \mathbb{Z}_+$ vzdolž $t = 0$, enako velja tudi za $\mathcal{A}\phi$ in $\mathcal{B}\phi$. Če je X' zaprta analitična podmnožica v X, ki ne seka množice $\bar{D}_{0,1}$, lahko zagotovimo, da se $\mathcal{A}\phi$ in $\mathcal{B}\phi$ ujemata z Id do predpisanega končnega reda vzdolž $(X' \cap \bar{D}_0) \times rP$ in $(X' \cap \bar{D}_1) \times rP$.

Dokaz. Dokaz je v bistvu enak kot v [18, str. 212]. Zaradi pogoja (ii) v Definiciji 3.2.1 obstaja gladka funkcija $\chi : X \to [0, 1]$, za katero velja $\chi = 0$ v okolici množice $\overline{D_0 \setminus D_1}$ in $\chi = 1$ v okolici množice $\overline{D_1 \setminus D_0}$. Tako lahko za vsak $\phi \in C_r$ produkt $\chi(x)\,\phi(x,t)$ razširimo do $\mathcal{C}^k$ funkcije na $\bar{D}_0 \times rP$, ki je enaka 0 na $\overline{D_0 \setminus D_1} \times rP$, in produkt $(\chi(x) - 1)\,\phi(x,t)$ razširimo do $\mathcal{C}^k$ funkcije na $\bar{D}_1 \times rP$, ki je enaka 0 na $\overline{D_1 \setminus D_0} \times rP$. Velja

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_x(\chi\phi(\cdot,t)) &= \phi(\cdot,t)\bar{\partial}\chi \qquad \text{na } D_0, \\ \bar{\partial}_x((\chi-1)\phi(\cdot,t)) &= \phi(\cdot,t)\bar{\partial}\chi \qquad \text{na } D_1. \end{aligned}$$

Pri tem lahko $\phi(\cdot,t)\,\bar{\partial}\chi$ razširimo do $(0,1)$-forme na $\bar{D}$ razreda $\mathcal{C}^k$, ki je holomorfno odvisna od parametra t.

Izberimo funkcije $f_1, \ldots, f_l \in \mathcal{O}(X)$, ki so enake 0 do reda m vzdolž podvarietete X' in nimajo skupnih ničel na $\bar{D}_{0,1}$. Ker je $D_{0,1}$ po predpostavki Steinova domena s strogo psevdokonveksnim robom, po Cartanovem delilnem izreku (glej [18, Corollary 2.4.4, str. 54]) obstajajo holomorfne funkcije $g_1, \ldots, g_l$ v neki okolici U množice $\bar{D}_{0,1}$, da velja $\sum_{j=1}^{l} f_j g_j = 1$ na U. Opazimo lahko, da je $g_j\phi(\cdot,t)\bar{\partial}\chi$ družina $\bar{\partial}$-sklenjenih $(0,1)$-form na $\bar{D}$ z nosilci vsebovanimi v $\bar{D}_{0,1}$, ki so holomorfno odvisne od parametra t. Poleg tega zaradi pogoja (iii) v Definiciji 3.2.1 množica $\bar{D}_{0,1}$ ne seka izjemne množice domene D. Po Trditvi 2.3.1 obstaja omejen linearen rešitveni operator $T : \mathcal{C}_{0,1}(\bar{D}; D_{0,1}) \to \mathcal{C}(\bar{D})$ za $\bar{\partial}$-enačbo. Za $\phi \in C_r$ in $t \in rP$ definiramo

$$(\mathcal{A}\phi)(x,t) := \chi(x)\,\phi(x,t) - \sum_{j=1}^{l} f_j(x)\,T(g_j\phi(\cdot,t)\,\bar{\partial}\chi)(x), \qquad x \in \bar{D}_0,$$

$$(\mathcal{B}\phi)(x,t) := (\chi(x)-1)\,\phi(x,t) - \sum_{j=1}^{l} f_j(x)\,T(g_j\phi(\cdot,t)\,\bar{\partial}\chi)(x), \quad x \in \bar{D}_1.$$

Očitno velja $\phi = \mathcal{A}\phi - \mathcal{B}\phi$ na $\bar{D}_{0,1} \times rP$. Ker je T rešitveni operator za $\bar{\partial}$-enačbo (glede na spremenljivko x) in komutira z odvajanji po spremenljivkah $t \in \mathbb{C}^N$, velja $\bar{\partial}_x(\mathcal{A}\phi) = 0$, $\bar{\partial}_x(\mathcal{B}\phi) = 0$ in $\bar{\partial}_t(\mathcal{A}\phi) = 0$, $\bar{\partial}_t(\mathcal{B}\phi) = 0$ v notranjosti pripadajočih domen. Poleg tega izbira funkcij $f_1, \ldots, f_l$ zagotavlja, da sta $\mathcal{A}\phi$ in $\mathcal{B}\phi$ enaka 0 do reda m vzdolž $(X' \cap \bar{D}_0) \times rP$ in $(X' \cap \bar{D}_1) \times rP$. Omejenost operatorjev $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ sledi iz omejenosti operatorja T. □

Dokaz Izreka 3.2.2. Fiksiramo število $R \in (r,1)$ in definiramo $\gamma_0(x,t) := t$. Naj bosta operatorja $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ kot v Lemi 3.2.3. Za $\gamma \in C_1$ blizu γ_0 in $\phi \in C_r$ blizu 0 definiramo preslikavo $\Psi(\gamma,\phi)$ z vrednostmi v $\mathbb{C}^N$ s predpisom

$$\Psi(\gamma,\phi)(x,t) = \gamma(x, t + \mathcal{A}\phi(x,t)) - (t + \mathcal{B}\phi(x,t)), \quad x \in \bar{D}_{0,1}, t \in rP.$$

Tedaj je $(\gamma,\phi) \mapsto \Psi(\gamma,\phi)$ gladka preslikava iz odprte okolice točke $(\gamma_0, 0)$ v Banachovem prostoru $C_1 \times C_r$ v Banachov prostor C_r. Res, Ψ je očitno zvezna preslikava, ki je linearna v spremenljivki γ in njen parcialni odvod po spremenljivki ϕ je enak

$$(\partial_\phi \Psi(\gamma,\phi)\tau)(x,t) = \partial_t\gamma(x, t + \mathcal{A}\phi(x,t)) \cdot \mathcal{A}\tau(x,t) - \mathcal{B}\tau(x,t).$$

Ta preslikava je spet linearna v spremenljivki γ in zvezna zaradi naslednjih Cauchyjevih ocen v spremenljivki t,

$$\sup\{|\partial_x^\mu \partial_t^{\nu+1}\gamma(x,t)|;\ |\mu| + |\nu| \le k, x \in \bar{D}_{0,1}, t \in RP\} \le C\|\gamma\|_{\mathcal{C}^k(\bar{D}_{0,1}\times P)},$$

ki poskrbijo za $\partial_t\gamma$ del. Podoben argument deluje za višje odvode preslikave Ψ.

Po Lemi 3.2.3 velja

$$\Psi(\gamma_0,\phi) = \mathcal{A}\phi - \mathcal{B}\phi = \phi,$$

torej je $\partial_\phi\Psi(\gamma_0,\phi)$ identična preslikava. Po izreku o implicitni funkciji obstaja gladka preslikava $\gamma \mapsto \Phi(\gamma)$ iz odprte okolice točke γ_0 v C_R v odprto okolico točke 0 v C_r, za katero velja $\Phi(\gamma_0) = 0$ in $\Psi(\gamma, \Phi(\gamma)) = 0$. Preslikavi

$$\alpha_\gamma(x,t) = t + \mathcal{A} \circ \Phi(\gamma)(x,t), \quad \beta_\gamma(x,t) = t + \mathcal{B} \circ \Phi(\gamma)(x,t)$$

tedaj izpolnjujeta vse zaključke v izreku. □

3.3 Metoda lepljenja

Ko govorimo o lepljenju sprejev prerezov, imamo v mislih naslednjo trditev, ki je eno izmed najpomembnejših orodij v tej teoriji. Standarden Steinov primer te trditve je bil dokazan v [8, Proposition 4.3] (glej tudi [9, Proposition 2.4] in [18, Proposition 5.9.2, str. 216]).

Trditev 3.3.1. *Naj bo* (D_0, D_1) *1-konveksen Cartanov par razreda* $\mathcal{C}^l$ $(l \geq 2)$ *v kompleksni mnogoterosti* X*. Definiramo* $D_{0,1} = D_0 \cap D_1$ *in* $D = D_0 \cup D_1$*. Naj bo* $\pi : Z \to \bar{D}$ *bodisi svežen razreda* $\mathcal{A}^k$ $(k \leq l)$ *bodisi zožitev na* $\bar{D}$ *holomorfne submerzije* $\tilde{Z} \to X$*. Za vsak sprej* π*-prerezov* $f : \bar{D}_0 \times P_0 \to Z$ *razreda* $\mathcal{A}^k$*, ki je dominanten na* $\bar{D}_{0,1}$*, obstaja odprta množica* $0 \in P \subset P_0$*, za katero velja naslednje:*

(i) *za vsak sprej* π*-prerezov* $g : \bar{D}_1 \times P_0 \to Z$ *razreda* $\mathcal{A}^k$*, ki je dovolj blizu* f *v* $\mathcal{C}^k(\bar{D}_{0,1} \times P_0)$*, obstaja sprej* π*-prerezov* $\tilde{f} : \bar{D} \times P \to Z$ *razreda* $\mathcal{A}^k$*, ki je blizu* f *v* $\mathcal{C}^k(\bar{D}_0 \times P)$ *(glede na* $\mathcal{C}^k(\bar{D}_{0,1} \times P_0)$ *razdaljo med* f *in* g*), katerega jedro* $\tilde{f}_0$ *je homotopno* f_0 *na* $\bar{D}_0$ *in* g_0 *na* $\bar{D}_1$*,*

(ii) *če se* f *in* g *ujemata do reda* $m \in \mathbb{Z}_+$ *vzdolž* $\bar{D}_{0,1} \times \{0\}$*, lahko zagotovimo, da se* $\tilde{f}$ *ujema do reda* m *z* f *vzdolž* $\bar{D}_0 \times \{0\}$ *in z* g *vzdolž* $\bar{D}_1 \times \{0\}$*,*

(iii) *če je* σ *ničelna množica končno mnogo* $\mathcal{A}^k(D_0)$ *funkcij in velja* $\sigma \cap \bar{D}_{0,1} = \emptyset$*, lahko zagotovimo, da se* $\tilde{f}_0$ *ujema z* f_0 *do reda* m *vzdolž* σ*.*

Začeli bomo z lemo, ki nam podaja prehodno preslikavo med parom bližnjih sprejev prerezov (primerjaj s [8, Proposition 4.4] in [18, Proposition 5.9.3, str. 216]).

Lema 3.3.2. *Privzemimo predpostavke Trditve 3.3.1. Naj bo* $\epsilon > 0$*. Obstaja odprta (konveksna) množica* $0 \in P_1 \subset P_0$*, za katero velja naslednje. Če sta* f *in* g *dovolj blizu v* $\mathcal{C}^k(\bar{D}_{0,1} \times P_0)$*, potem obstaja preslikava* $\gamma : \bar{D}_{0,1} \times P_1 \to \mathbb{C}^N$ *razreda* $\mathcal{A}^k$*, za katero velja*

$$\gamma(x,t) = t + c(x,t), \quad \|c\|_{\mathcal{C}^k(\bar{D}_{0,1} \times P_1)} < \epsilon,$$

$$f(x,t) = g(x, \gamma(x,t)), \quad x \in \bar{D}_{0,1}, \ t \in P_1.$$

Če se f *in* g *ujemata do reda* $m \in \mathbb{Z}_+$ *vzdolž* $\bar{D}_{0,1} \times \{0\}$*, lahko preslikavo* γ *izberemo oblike* $\gamma(x,t) = t + \sum_{|J|=m} c_J(x,t) t^J$*, kjer so* $c_J \in \mathcal{A}^k(D_{0,1} \times P_1)^N$*.*

Dokaz. Označimo z E podsvežen svežnja $\bar{D}_{0,1} \times \mathbb{C}^N$ z vlakni

$$E_x = \ker(\partial_t|_{t=0} f(x,t) : \mathbb{C}^N \to VT_{f(x,0)}Z), \quad x \in \bar{D}_{0,1}.$$

Opazimo lahko, da je E vektorski svežen razreda $\mathcal{A}^k$. Trdimo, da je E komplementiran, tj. obstaja podsvežen E' razreda $\mathcal{A}^k$ svežnja $\bar{D}_{0,1} \times \mathbb{C}^N$, za katerega velja $\bar{D}_{0,1} \times \mathbb{C}^N = E \oplus E'$. Za holomorfne vektorske svežnje nad Steinovimi mnogoterostmi brez roba to sledi iz Cartanovega izreka B (glej [31, str. 256]). Enak dokaz deluje tudi za vektorske svežnje razreda $\mathcal{A}^k$ z uporabo verzije izreka B, ki jo je za take svežnje dokazal Heunemann [32].

Za vsak $x \in \bar{D}_{0,1}$ in $t \in \mathbb{C}^N$ lahko zapišemo $t = t_x \oplus t'_x \in E \oplus E'$. Preslikava

$$\partial_t|_{t=0} f(x,t) : E' \to VTZ|_{f_0(\bar{D}_{0,1})}$$

je izomorfizem. Po izreku o implicitni preslikavi obstaja odprta (konveksna) množica $0 \in P_1 \subset P_0$, za katero velja naslednje. Za vsak sprej π-prerezov $g : \bar{D}_1 \times P_0 \to Z$ razreda $\mathcal{A}^k$, ki je dovolj blizu f v $\mathcal{C}^k(\bar{D}_{0,1} \times P_0)$, obstaja enolična preslikava

$$\tilde{\gamma}(x,t) = \tilde{\gamma}(x, t_x \oplus t'_x) = t_x \oplus (t'_x + \tilde{c}(x,t)) \in E_x \oplus E'_x \cong \mathbb{C}^N$$

razreda $\mathcal{A}^k(\bar{D}_{0,1} \times P_1)$, za katero velja $f(x, \tilde{\gamma}(x,t)) = g(x,t)$, pri čemer je norma $\|\tilde{c}\|_{\mathcal{C}^k(\bar{D}_{0,1} \times P_1)}$ nadzorovana s $\mathcal{C}^k(\bar{D}_{0,1} \times P_0)$ razdaljo med f in g. Če po potrebi zmanjšamo P_1, ima preslikava $\tilde{\gamma}$ inverz po vlaknih $\gamma(x,t) = t_x \oplus (t'_x + \hat{c}(x,t)) = t + c(x,t)$, ki zadošča vsem zaključkom iz leme. □

Dokaz Trditve 3.3.1. Naj bosta $0 \in P_1 \subset P_0$ in $\gamma(x,t) = t + c(x,t)$ množica in preslikava iz Leme 3.3.2. Fiksiramo $r \in (0,1)$ in definiramo množico $P := rP_1$. Če je g dovolj blizu f v $\mathcal{C}^k(\bar{D}_{0,1} \times P_0)$, potem je c dovolj blizu 0 v $\mathcal{C}^k(\bar{D}_{0,1} \times P_1)$ in po Izreku 3.2.2 obstajata preslikavi $\alpha : \bar{D}_0 \times P \to \mathbb{C}^N$ in $\beta : \bar{D}_1 \times P \to \mathbb{C}^N$ razreda $\mathcal{A}^k$, za kateri velja

$$\gamma(x, \alpha(x,t)) = \beta(x,t), \quad x \in \bar{D}_{0,1}, t \in P.$$

Če to združimo z enakostjo

$$f(x,t) = g(x, \gamma(x,t)), \quad x \in \bar{D}_{0,1}, t \in P_1$$

iz Leme 3.3.2, dobimo

$$f(x, \alpha(x,t)) = g(x, \gamma(x, \alpha(x,t))) = g(x, \beta(x,t)), \quad x \in \bar{D}_{0,1}, t \in P.$$

Zato se preslikavi $f(x, \alpha(x,t))$ in $g(x, \beta(x,t))$ združita v sprej π-prerezov $\tilde{f} : \bar{D} \times P \to Z$, ki ima želene lastnosti. □

3.4 Obstoj sprejev

Najbolj pogost način konstrukcije sprejev in sprejev prerezov je naslednji. Denimo, da na $Z|_D$ obstaja končno mnogo vertikalnih holomorfnih vektorskih polj V_j, $j = 1, \ldots, N$ (tj. holomorfnih prerezov vertikalnega tangentnega svežnja $VTZ|_D$), katerih tokovi ϕ^j_t obstajajo (in so holomorfni) za vse dovolj majhne čase $t \in P \subset \mathbb{C}$. Tedaj je preslikava $s : Z|_D \times P^N \to Z$ s predpisom

$$s(z; t_1, \ldots, t_N) = \phi^N_{t_N} \circ \ldots \circ \phi^1_{t_1}(z)$$

π-sprej na $Z|_D$. Velja $\partial_{t_j} s(z; 0, \ldots, 0) = V_j(z)$. Če vektorska polja V_j generirajo vertikalni tangentni sveženj VTZ v vsaki točki $z \in K \subset Z|_D$, potem je sprej s

dominanten na K. Podobno je za vsak holomorfen π-prerez $f_0 : D \to Z$ preslikava $f : D \times P^N \to Z$ s predpisom

$$f(x; t_1, \ldots, t_N) = s(f_0(x); t_1, \ldots, t_N) = \phi^N_{t_N} \circ \ldots \circ \phi^1_{t_1} \circ f_0(x),$$

holomorfen sprej π-prerezov z jedrom f_0, ki je dominanten na $f_0^{-1}(K)$. Nadalje, če so vsi tokovi ϕ^j_t stacionarni na $L \subset Z|_D$, potem f fiksira $f_0^{-1}(L)$. Če so vsa vektorska polja V_j kompletna (tj. njihovi tokovi obstajajo za vse čase $t \in \mathbb{C}$), potem sta zgornja dva spreja globalna. Za konstrukcijo spreja prerezov f je dovolj, da so vektorska polja V_j definirana na neki okolici grafa $f_0(D) \subset Z|_D$. V primeru, ko je D relativno kompaktna Steinova domena (in f_0 holomorfen na okolici $\bar{D}$), lahko taka vektorska polja vedno konstruiramo s pomočjo Cartanovega Izreka A, ki ga uporabimo na Steinovi okolici množice $f_0(\bar{D})$. Tako imamo naslednjo trditev (močnejšo verzijo in podroben dokaz lahko najdemo v [18, Lemma 5.10.4, str. 220], za primer z robom glej [9, Corollary 4.2] in [8, Lemma 4.2]).

Trditev 3.4.1. *Naj bo D relativno kompaktna domena v Steinovi mnogoterosti S in $\pi : Z \to S$ holomorfna submerzija. Za vsak holomorfen π-prerez $f_0 : S \to Z$ obstaja holomorfen sprej π-prerezov $f : D \times P \to Z$ z jedrom $f_0|_D$, ki je dominanten na D.*

Naj bo sedaj X kompleksna mnogoterost in $D \Subset X$ 1-konveksna domena s strogo psevdokonveksnim robom razreda $\mathcal{C}^l$ $(l \geq 2)$ in izjemno množico E. Naj bo $\pi : Z \to \bar{D}$ bodisi svežen razreda $\mathcal{A}^k$ $(k \leq l)$ bodisi zožitev holomorfne submerzije $\tilde{Z} \to X$. V obeh primerih za vsako točko $z \in Z$ obstaja odprta okolica $\Omega \subset Z$ izomorfna $U \times V$, kjer je U relativno odprta množica v $\bar{D}$ vsebovana v neki koordinatni karti na X in V odprta množica v $\mathbb{C}^m$, tako da je v koordinatah $z = (x, y) \in U \times V$ preslikava π kar projekcija $(x, y) \to x$. Tak Ω bomo imenovali *posebna koordinatna karta* na Z.

Za dan π-prerez $f_0 : \bar{D} \to Z$ razreda $\mathcal{A}^k$ bi radi konstruirali sprej π-prerezov $f : \bar{D} \times P \to Z$ razreda $\mathcal{A}^k$ z jedrom f_0, ki je dominanten na $\bar{D} \setminus E$ in fiksira E. Glavni problem je konstruirati tak sprej prerezov v neki (1-konveksni) okolici $U \Subset D$ izjemne množice E.

Poskus v tej smeri je bil narejen v [46, § 4] (glej tudi [47, Corollary 2.6]) z uporabo zgoraj opisane metode. V tem primeru množica $f_0(\bar{U})$ seveda nima Steinove okolice (v večini primerov nima niti 1-konveksne okolice). Zato moramo namesto množice $\bar{U}$ vzeti množico $\bar{U} \setminus g^{-1}(0)$, kjer je $g : D \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija, ki je enaka 0 na E. Množica $U \setminus g^{-1}(0)$ je tedaj Steinova in zato obstaja Steinova okolica $\Omega \subset Z$ množice $f_0(\bar{U} \setminus g^{-1}(0))$. Vendar pa, če imamo dana vektorska polja V_j na Ω kot zgoraj, njihovi tokovi $\phi^j_t(z)$ ne obstajajo nujno (ostanejo v Ω) za vse dovolj majhne čase neodvisno od točke $z \in f_0(\bar{U} \setminus g^{-1}(0))$, saj je množica Ω lahko zelo tanka (v smeri vlaken) blizu množice $f(g^{-1}(0))$. Eden od glavnih prispevkov v [46] je konstrukcija posebne okolice Ω, ki je *konična* vzdolž $f_0(g^{-1}(0))$; tj. ko se približujemo množici $f_0(g^{-1}(0))$, širina okolice Ω v smeri vlaken pada kvečjemu polinomsko v odvisnosti od razdalje do množice $f_0(g^{-1}(0))$. To še vedno ni dovolj, da bi bili tokovi definirani za vse dovolj majhne čase. Dodatno bi potrebovali še, da vektorska polja naraščajo kvečjemu polinomsko, ko se približujemo robu okolice Ω;

ta del v [46] manjka. Če bi imeli taka vektorska polja V_j, bi definirali polja $G^n V_j$, kjer je G po vlaknih konstantna razširitev funkcije $g \circ \pi : f_0(D) \to \mathbb{C}$. Za dovolj velik n bi tokovi teh vektorskih polj obstajali za vse dovolj majhne čase, poleg tega bi jih lahko razširili čez $f_0(g^{-1}(0))$ z identiteto. Končno mnogo takih vektorskih polj bi tedaj generiralo vertikalni tangentni svežen j VTZ na Ω. Zato bi bil pripadajoči sprej prerezov dominanten izven $g^{-1}(0)$ in bi fiksiral $g^{-1}(0)$. Z nekaj dodatnega dela bi tak sprej prerezov lahko popravili do spreja prerezov, ki je dominanten izven E in fiksira E.

V tem trenutku ne vemo, kako bi skonstruirali vektorska polja s kvečjemu polinomsko rastjo. Da se izognemo tej težavi, bomo uvedli naslednji pogoj.

Pogoj $\mathcal{E}$. Naj bo X 1-konveksna mnogoterost z izjemno množico E. Pravimo, da holomorfna submerzija $\pi : Z \to X$ izpolnjuje *Pogoj* $\mathcal{E}$, če za vsako odprto okolico $U_0 \subset X$ množice E in vsak holomorfen π-prerez $f_0 : U_0 \to Z$ obstaja odprta okolica $U \subset U_0$ množice E in holomorfen sprej π-prerezov $f : U \times P \to Z$ z jedrom $f_0|_U$, ki je dominanten na $U \setminus E$ in fiksira E.

Pričakujemo, da je Pogoj $\mathcal{E}$ vedno izpolnjen, a tega trenutno ne znamo dokazati. Najpomembnejši zadostni pogoji, ki implicirajo Pogoj $\mathcal{E}$, so podani v naslednji lemi.

Trditev 3.4.2. *Naj bo X 1-konveksna mnogoterost z izjemno množico E.*

(i) *Naj bo $\pi : Z \to X$ holomorfna submerzija. Denimo, da obstaja odprta okolica $D \subset X$ množice E in π-sprej (V, Ω, p, s) na $Z|_D$, ki je dominanten na $Z|_{D\setminus E}$. Tedaj π izpolnjuje Pogoj $\mathcal{E}$.*

(ii) *Če je Y eliptična mnogoterost v smislu Gromova [30], potem kanonična projekcija $\pi : X \times Y \to X$ izpolnjuje Pogoj $\mathcal{E}$.*

(iii) *Če je Y taka kompleksna mnogoterost, da globalna vektorska polja na Y generirajo tangentni prostor $T_y Y$ v vsaki točki $y \in Y$, potem kanonična projekcija $\pi : X \times Y \to X$ izpolnjuje Pogoj $\mathcal{E}$.*

Dokaz. (i) Naj bo $U_0 \subset X$ odprta okolica množice E in $f_0 : U_0 \to Z$ holomorfen π-prerez. Fiksiramo 1-konveksno okolico $U \Subset U_0 \cap D$ množice E. Na $V|_{f_0(U)}$ lahko gledamo kot na holomorfen vektorski svežen j nad U.

Trdimo, da obstaja končno mnogo holomorfnih prerezov $W_1, \ldots, W_N$ vektorskega svežnja $V|_{f_0(U)} \to U$, ki generirajo $V_{f_0(x)}$ za vsak $x \in U \setminus E$ in so enaki 0 na E. To lahko dokažemo z naslednjim argumentom. Označimo z $\mathcal{F}$ koherenten analitičen snop zarodkov prerezov vektorskega svežnja $V|_{f_0(U)} \to U$ in z $R : U \to S$ Remmertovo redukcijo množice U. Ker je R prava holomorfna preslikava, je po Grauertovem izreku o direktni sliki direktna slika $R_*\mathcal{F}$ snopa $\mathcal{F}$ spet koherenten analitičen snop. Ker je S Steinov prostor, lahko uporabimo Cartanov Izrek A, da najdemo končno mnogo globalnih prerezov $\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_N \in R_*\mathcal{F}(U)$, ki lokalno generirajo $R_*\mathcal{F}$ na U in so enaki 0 na končni množici $R(E)$. Ti prerezi porodijo pripadajoče globalne prereze $s_1, \ldots, s_N \in \mathcal{F}(U)$. Zožitev $R : U \setminus E \to S \setminus R(E)$ Remmertove redukcije je biholomorfizem. Zato je za vsak $x \in U \setminus E$ bilka $\mathcal{F}_x$ izomorfna bilki $(R_*\mathcal{F})_{R(x)}$. Od tod sledi, da prerezi $s_1, \ldots, s_N$ lokalno generirajo $\mathcal{F}$ na $U \setminus E$. Ti prerezi porodijo holomorfne prereze $W_1, \ldots, W_N$ vektorskega svežnja $V|_{f_0(U)} \to U$, ki generirajo $V_{f_0(x)}$ za vsak $x \in U \setminus E$ in so enaki 0 na E.

Za dovolj majhno odprto množico $0 \in P \subset \mathbb{C}^N$ je preslikava

$$f(x,t) = s\Big(\sum_{j=1}^{N} t_j W_j(x)\Big), \quad x \in U,\ t \in P$$

holomorfen sprej π-prerezov z jedrom $f_0|_U$. Velja

$$\partial_{t_j}|_{t=0} f(x,t) = Ds(0_{f_0(x)}) W_j(x).$$

Ker vektorska polja $W_1, \ldots, W_N$ generirajo $V_{f_0(x)}$ v vsaki točki $x \in U \setminus E$ in je π-sprej s dominanten na $Z|_{D \setminus E}$, sledi, da je f dominanten na $D \setminus E$. Poleg tega f fiksira E, saj so vektorska polja $W_1, \ldots, W_j$ enaka 0 na E.

(ii) Po definiciji je kompleksna mnogoterost Y eliptična, če (in samo če) obstaja globalen dominanten sprej v smisli definicije 3.1.3 glede na konstantno submerzijo $Y \to \{*\}$. Tedaj očitno tudi kanonična projekcija $X \times Y \to X$ dopušča globalen dominanten sprej. Zato je točka (ii) le poseben primer točke (i).

(iii) Naj bo $U_0 \subset X$ odprta okolica množice E in $f_0 : U_0 \to Y$ holomorfna preslikava. Fiksirajmo odprto okolico $U \Subset U_0$ množice E. Ker je $f_0(\bar{U}) \subset Y$ kompaktna množica, predpostavka na Y zagotavlja obstoj končno mnogo globalnih holomorfnih vektorskih polj $V_1, \ldots, V_N$ na Y, ki generirajo tangentni prostor $T_y Y$ v vsaki točki $y \in f_0(\bar{U})$. Označimo s ϕ_t^j tokove vektorskih polj V_j. Preslikava $f : U \times P^N \to Y$ definirana s predpisom

$$f(x; t_1, \ldots, t_N) = \phi^j_{t_N} \circ \ldots \circ \phi^1_{t_1}(f_0(x))$$

je holomorfen sprej preslikav z jedrom $f_0|_U$. Velja

$$\partial_{t_j}|_{t=0} f(x,t) = V_j(f_0(x)).$$

Po izbiri vektorskih polj sledi, da je f dominanten na U; vendar pa ni nujno, da fiksira množico E. Da to popravimo, izberemo končno mnogo holomorfnih funkcij $g_1, \ldots, g_M \in \mathcal{O}(U)$, katerih skupna ničelna množica je natanko E. Nato vsak člen $\phi^j_{t_j}$ v definiciji preslikave f nadomestimo s kompozicijo M členov $\phi^j_{t_{j,k} g_k(x)}$ za $k = 1, \ldots, M$. Nov sprej preslikav je tedaj dominanten na $U \setminus E$ in fiksira E. $\square$

Pogoj $\mathcal{E}$ eksplicitno zagotavlja obstoj sprejev prerezov z želenimi lastnostmi le nad neko okolico izjemne množice E. To pa je že dovolj, da lahko najdemo spreje prerezov z želenimi lastnostmi tudi nad poljubnimi relativno kompaktnimi 1-konveksnimi domenami, kot v naslednjem izreku.

Izrek 3.4.3. *Naj bo D relativno kompaktna 1-konveksna domena s strogo psevdokonveksnim robom razreda $\mathcal{C}^l$ $(l \geq 2)$ in izjemno množico E v kompleksni mnogoterosti*

X in naj bo $\pi : Z \to \bar{D}$ bodisi sveženj razreda $\mathcal{A}^k$ ($k \leq l$) bodisi zožitev na $\bar{D}$ holomorfne submerzije $\tilde{Z} \to X$. Denimo, da submerzija $\pi : Z|_D \to D$ izpolnjuje Pogoj $\mathcal{E}$. Za vsak π-prerez $f_0 : \bar{D} \to Z$ razreda $\mathcal{A}^k$ obstaja sprej π-prerezov $f : \bar{D} \times P \to Z$ razreda $\mathcal{A}^k$ z jedrom f_0, ki je dominanten na $\bar{D} \setminus E$ in fiksira E.

Za dokaz tega izreka bomo uporabili standardno tehniko 'razširjanja' sprejev prerezov korak za korakom na večje in večje domene v bazni mnogoterosti. Začetni sprej prerezov nam bo seveda zagotovil Pogoj $\mathcal{E}$. Glavni korak v dokazu bo pokazati, kako sprej prerezov 'razširimo' čez 1-konveksen Cartanov par. Z 'razširiti' v resnici mislimo aproksimirati sprej prerezov definiran nad manjšo množico v bazni mnogoterosti s sprejem prerezov definiranim nad večjo množico v bazni mnogoterosti. Sledili bomo dokazu v [9], ki se nanaša na Steinov primer. V vsakem koraku bomo morali poskrbeti da ima nov sprej prerezov jedro f_0, fiksira E in (najpomembneje) je še vedno dominanten izven E. Množico parametrov $0 \in P \subset \mathbb{C}^N$ bomo lahko na vsakem koraku zmanjšali.

Trditev 3.4.4. *Naj bo (D_0, D_1) 1-konveksen Cartanov par razreda $\mathcal{C}^l$ ($l \geq 2$) v kompleksni mnogoterosti X. Definiramo $D_{0,1} = D_0 \cap D_1$ in $D = D_0 \cup D_1$ ter označimo z E izjemno množico domene D_0. Naj bo $\pi : Z \to \bar{D}$ bodisi sveženj razreda $\mathcal{A}^k$ ($k \leq l$) bodisi zožitev na $\bar{D}$ holomorfne submerzije $\tilde{Z} \to X$. Naj bo $f_0 : \bar{D} \to Z$ π-prerez razreda $\mathcal{A}^k$ in $f : \bar{D}_0 \times P_0 \to Z$ ($0 \in P_0 \subset \mathbb{C}^N$) sprej π-prerezov razreda $\mathcal{A}^k$ z jedrom $f_0|_{\bar{D}_0}$, ki je dominanten na $\bar{D}_0 \setminus E$ in fiksira E. Predpostavimo, da je množica $f_0(\bar{D}_1)$ vsebovana v neki posebni koordinatni karti na Z. Če je $N \geq \dim_{\mathbb{C}} Z$, potem obstaja odprta množica $0 \in P \subset P_0$ in sprej π-prerezov $F : \bar{D} \times P \to Z$ razreda $\mathcal{A}^k$ z jedrom f_0, ki je dominanten na $\bar{D} \setminus E$ in fiksira E. Poleg tega lahko F izberemo poljubno blizu f v $\mathcal{C}^k(\bar{D}_0 \times P)$.*

Dokaz. Naj m in M označujeta kompleksni dimenziji mnogoterosti X in Z. Predpostavimo lahko, da je $\bar{D}_1$ domena v $\mathbb{C}^m$, da je P_0 polidisk in da sta množici $f(\bar{D}_{0,1} \times P_0)$ in $f_0(\bar{D}_1)$ vsebovani v isti posebni koordinatni karti $\Omega \subset Z$, $\Omega \cong \bar{D}_1 \times V$. Tedaj velja

$$\begin{aligned} f(x,t) &= (x, \tilde{f}(x,t)), \quad && x \in \bar{D}_{0,1},\ t \in P_0, \\ f_0(x) &= (x, \tilde{f}_0(x,t)), \quad && x \in \bar{D}_1, \quad t \in P_0. \end{aligned}$$

Po Taylorjevem razvoju v spremenljivki $t \in \mathbb{C}^N$ velja

$$\tilde{f}(x,t) = \tilde{f}_0(x) + \sum_{j=1}^{N} g_j(x) t_j + \sum_{j,k=1}^{N} h_{j,k}(x,t) t_j t_k, \quad x \in \bar{D}_{0,1}, t \in P_0$$

za neke preslikave $h_{j,k} : \bar{D}_{0,1} \times P_0 \to \mathbb{C}^{M-m}$ razreda $\mathcal{A}^k$. Definiramo

$$L_x(t) = \sum_{j=1}^{N} g_j(x)\, t_j.$$

Tedaj je $L_x = \partial_t|_{t=0}\tilde{f}(x,t) : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^{M-m}$ linearna preslikava za vse $x \in \bar{D}_{0,1}$. Izberemo polidisk $0 \in P' \Subset P_0$ in uporabimo aproksimacijski izrek Mergelyanovega tipa [9, Corollary 1.5], da aproksimiramo preslikave $h_{j,k}$ v $\mathcal{C}^k(\bar{D}_{0,1} \times \bar{P}')$ s celimi preslikavami $\hat{h}_{j,k} : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^{M-m}$. Podobno aproskimiramo preslikave g_j v $\mathcal{C}^k(\bar{D}_{0,1})$ s celimi preslikavami $\hat{g}_j : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^{M-m}$. Tako za vsak $x \in \mathbb{C}^m$ dobimo linearno preslikavo

$$\hat{L}_x : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^{M-m}, \quad \hat{L}_x(t) = \sum_{j=1}^{N} \hat{g}_j(x)t_j.$$

Predpostavimo lahko, da je ta preslikava surjektivna za vsak $x \in \bar{D}_1$. Res, množica Q vseh nesurjektivnih linearnih preslikav iz $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^N, \mathbb{C}^{M-m})$ ima kodimenzijo $N - (M-m)+1$ (to sledi na primer iz [18, Lemma 7.9.2, str. 324]). Osnovni transverzalnostni izrek (glej [18, Theorem 7.8.5, str. 317]), ki ga uporabimo na preslikavi $x \to \hat{L}_x$, nam da želeni rezultat pri pogoju $N - (M-m) + 1 > m$, ki je izpolnjen po predpostavki. Transverzalnost v tem primeru pomeni, da slika preslikave ne seka množice Q.

Definiramo preslikavo

$$\tilde{G}(x,t) = \tilde{f}_0(x) + \hat{L}_x(t) + \sum_{j,k=1}^{N} \hat{h}_{j,k}(x,t)t_j t_k, \quad x \in \bar{D}_1, t \in \mathbb{C}^N.$$

Izberemo odprto množico $0 \in P_1 \subset P'$, da je slika $\tilde{G}(\bar{D}_1 \times P_1)$ vsebovana v C. Tedaj je preslikava $G : \bar{D}_1 \times P_1 \to Z$ definirana z $G(x,t) = (x, \tilde{G}(x,t))$ sprej π-prerezov razreda $\mathcal{A}^k$ z jedrom $f_0|_{\bar{D}_1}$, ki je dominanten na $\bar{D}_1$ in blizu f v $\mathcal{C}^k(\bar{D}_{0,1} \times P_1)$ (morda moramo zmanjšati P_1). Sedaj lahko uporabimo Trditev 3.3.1, da zlepimo ta dva spreja prerezov v končen sprej prerezov $F : \bar{D} \times P \to Z$, ki ima vse želene lastnosti. □

Opazimo lahko, da je pogoj $N \geq \dim_{\mathbb{C}} Z$ potreben le za dominantnost končnega spreja prerezov.

Dokaz Izreka 3.4.3. Izberemo plurisubharmonično funkcijo $\phi : V \to [0,\infty)$ razreda $\mathcal{C}^l$ definirano na odprti okolici V množice $\bar{D}$, ki je strogo plurisubharmonična izven E, ima le izolirane kritične točke ter zanjo velja $E = \{x \in V;\ \phi(x) = 0\}$ in $D = \{x \in V;\ \phi(x) < c\}$ za nek $c > 0$, ki ni kritična vrednost za ϕ.

Pogoj $\mathcal{E}$ nam zagotavlja obstoj odprte okolice $U \subset D$ množice E in obstoj holomorfnega spreja π-prerezov $f : U \times P \to Z$ ($0 \in P \subset \mathbb{C}^N$) z jedrom $f_0|_U$, ki je dominanten na $U \setminus E$ in fiksira E. Predpostavimo lahko, da je $N \geq \dim_{\mathbb{C}} Z$, sicer le dodamo nekaj parametrov in naredimo sprej neodvisen od njih. Izberemo število $c_0 > 0$, ki je regularna vrednost za ϕ, da velja $D_0 = \{x \in V;\ \phi(x) \leq c_0\} \subset U$.

Po [33, Corollary 2.8] obstaja končno zaporedje 1-konveksnih domen $D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_m = D$, da za vsak $j = 1,\ldots,m$ velja $D_j = D_{j-1} \cup B_j$, kjer je (D_{j-1}, B_j) 1-konveksen Cartanov par razreda $\mathcal{C}^l$. Poleg tega lahko zagotovimo, da je za vsak $j = 1,\ldots,m$ množica $f_0(\bar{B}_j)$ vsebovana v neki posebni koordinatni karti na Z.

Z induktivno uporabo Trditve 3.4.4 na 1-konveksnih Cartanovih parih (D_{j-1}, B_j), $j = 1, \ldots, m$, lahko razširimo sprej π-prerezov f iz $\bar{D}_0$ na $\bar{D}_1$, iz $\bar{D}_1$ na $\bar{D}_2$ in tako naprej, dokler ne dosežemo $\bar{D}_m = \bar{D}$. $\square$

Kot direktno posledico Izreka 3.4.3 dobimo verzijo brez roba.

Posledica 3.4.5. *Naj bo X 1-konveksna mnogoterost z izjemno množico E, $D \subset X$ relativno kompaktna domena, ki vsebuje E, in $\pi : Z \to X$ holomorfna submerzija, ki izpolnjuje Pogoj $\mathcal{E}$. Za vsak holomorfen π-prerez $f_0 : X \to Z$ obstaja holomorfen sprej π-prerezov $f : D \times P \to Z$ z jedrom $f_0|_D$, ki je dominanten na $D \setminus E$ in fiksira E.*

Edina stvar, ki je napačna oziroma nepopolna v [46], je dokaz obstoja holomorfnega spreja π-prerezov, ki ima predpisano jedro in je dominanten na komplementu izjemne množice (glej začetek razdelka za podrobnejšo razlago). Obstoj takega spreja je sedaj podan v Izreku 3.4.3. Tako pod dodatno predpostavko, da submerzija π izpolnjuje Pogoj $\mathcal{E}$, rezultati v [46] ostanejo veljavni.

Poglavje 4

Aproksimacija holomorfnih preslikav

4.1 Lokalna aproksimacija

Spreji prerezov so se izkazali kot zelo uporabno orodje pri obravnavi številnih analitičnih problemov. Eden izmed teh problemov je aproksimacija holomorfnih preslikav. V tem razdelku bomo predstavili lokalen aproksimacijski izrek Mergelyanovega tipa. Sledili bomo metodam, ki so bile razvite v [9] za primer Steinovih domen, in jih dopolnili s tehnikami sprejev prerezov nad 1-konveksnimi domenami, ki smo jih razvili v prejšnjem poglavju. Naslednji izrek je analog izreka [9, Theorem 5.1].

Izrek 4.1.1. *Naj bo D relativno kompaktna 1-konveksna domena s strogo pseudokonveksnim robom razreda $\mathcal{C}^l$ $(l \geq 2)$ in izjemno množico E v kompleksni mnogoterosti X, in naj bo $\pi : Z \to X$ holomorfna submerzija, ki izpolnjuje Pogoj $\mathcal{E}$. Vsak π-prerez $f : \bar{D} \to Z$ razreda $\mathcal{A}^k$ $(k \leq l)$ lahko aproksimiramo v $\mathcal{C}^k(\bar{D})$ s π-prerezi, ki so holomorfni na odprtih okolicah domene $\bar{D}$ in se ujemajo z f na E. Poleg tega lahko aproksimacijske π-prereze izberemo homotopne f na $\bar{D}$ preko homotopije π-prerezov razreda $\mathcal{A}^k(D)$, ki se ujemajo z f na E.*

Dokaz. Dokaz je praktično enak kot v [9], le da bomo uporabili tehnike sprejev prerezov nad 1-konveksnimi domenami.

Naj m in M označujeta kompleksni dimenziji mnogoterosti X in Z. Označimo s $pr_1 : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{M-m} \to \mathbb{C}^m$, $pr_2 : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{M-m} \to \mathbb{C}^{M-m}$ kanonični projekciji in z $B \subset \mathbb{C}^m$, $B' \subset \mathbb{C}^{M-m}$ odprti enotski krogli. Ker je π holomorfna submerzija, torej lokalno kar običajna projekcija $\mathbb{C}^M \to \mathbb{C}^m$, za vsako točko $z \in Z$ obstajata odprti okolici $z \in W \subset Z$, $\pi(z) \in V = \pi(W) \subset X$ in biholomorfni preslikavi $\Phi : W \to B \times B'$, $\phi : V \to B$, da velja

$$\Phi(z) = \Big(\phi(\pi(z)), \phi'(z)\Big) \in B \times B', \quad z \in W,$$

kjer je $\phi' = pr_2 \circ \Phi$. Tak par (W, Φ) imenujemo posebna koordinatna karta na Z.

Fiksirajmo π-prerez $f : \bar{D} \to Z$ razreda $\mathcal{A}^k$. Po Narasimhanovi lemi o lokalni konveksifikaciji lahko rob ∂D lokalno konveksificiramo in tako najdemo končno mnogo posebnih koordinatnih kart (W_j, Φ_j) na Z, $j = 1, \ldots, J$, kjer je $V_j = \pi(W_j)$ in $\Phi_j = (\phi_j \circ \pi, \phi'_j)$ kot zgoraj, da je $\{V_j;\ j = 1, \ldots, J\}$ odprto pokritje za ∂D, ki ne seka E, in velja

(i) $\phi_j(\partial D \cap V_j)$ je strogo konveksna hiperploskev v B,

(ii) $f(\bar{D} \cap V_j) \subset W_j$ in $\overline{\phi'_j(f(D \cap V_j))} \subset B'$.

Izberemo število $0 < r < 1$, tako da množice $U_j := \phi_j^{-1}(rB)$, $j = 1, \ldots, J$, še vedno pokrivajo ∂D.

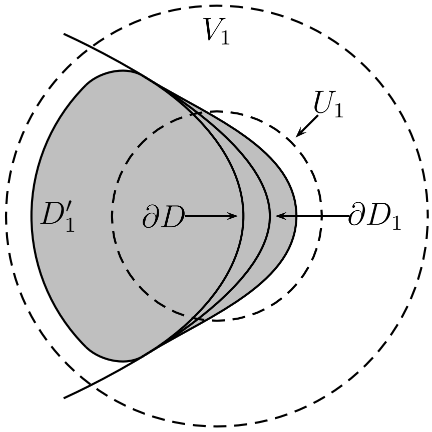
Indukcijsko bomo konstruirali zaporedje $D = D_0 \subset D_1 \subset \ldots \subset D_J \Subset X$ 1-konveksnih domen s strogo psevdokonveksnim robom razreda $\mathcal{C}^l$ (in isto izjemno množico) ter π-prereze $f_j : \bar{D}_j \to Z$ razreda $\mathcal{A}^k$, kjer je $f_0 = f$, tako da je f_j blizu f_{j-1} v $\mathcal{C}^k(D_{j-1})$ in se ujema z f na E za vsak $j = 1, \ldots, J$. Na vsakem koraku bomo zagotovili, da bo lastnost (ii) veljala tudi, če (D, f) zamenjamo z (D_j, f_j). Zaradi tega bo domena D_j v splošnem odvisna od $\mathcal{C}^0(\bar{D}_{j-1})$ razdalje med f_j in f_{j-1}, in izbrali jo bomo tako, da bo veljalo

$$D_{j-1} \subset D_j \subset D_{j-1} \cup V_j, \quad \partial D_{j-1} \cap U_j \subset D_j.$$

Tako bo končna domena D_J vsebovala $\bar{D}$ v svoji notranjosti in končni prerez f_J bo aproksimiral f poljubno dobro v $\mathcal{C}^k(\bar{D})$ in se bo ujemal z f na E.

Vsi koraki v indukciji so enaki, zato je dovolj, če razložimo kako dobimo (D_1, f_1) iz (D, f). Najprej bomo konstruirali domeno $D'_1 \subset V_1$ z robom razreda $\mathcal{C}^l$, ki je konveksna izboklina na D, da bo veljalo $\bar{D} \cap \bar{U}_1 \subset D'_1$. Izberemo gladko funkcijo $\chi : \mathbb{C}^m \to [0, 1]$ s kompaktnim nosilcem vsebovanim v B, da velja $\chi = 1$ na rB. Naj bo $\tau : B \to \mathbb{R}$ strogo konveksna definicijska funkcija razreda $\mathcal{C}^l$ za hiperploskev $\phi_j(\partial D \cap V_j)$; predpostavimo lahko, da nima kritičnih točk. Izberemo $r_0 \in (r, 1)$ blizu 1, tako da hiperploskev $\{\tau = 0\} = \phi_j(\partial D \cap V_j)$ seka sfero $\partial(r_0 B)$ transverzalno. Izberemo $\delta > 0$ dovolj majhen, da je $\tau - \delta\chi$ še vedno strogo konveksna funkcija brez kritičnih točk. Če domeni $r_0 B \cap \{\tau - \delta\chi < 0\}$ zaoblimo robove (tj. presek množic $\{\tau - \delta\chi = 0\}$ in $\partial(r_0 B)$), dobimo tako domeno D''_1, da ima domena $D'_1 = \phi^{-1}(D''_1)$ želene lastnosti (glej Sliko 4.1).

Po Izreku 3.4.3 obstaja sprej π-prerezov $F : \bar{D} \times P \to Z$ $(0 \in P \subset \mathbb{C}^N)$ razreda $\mathcal{A}^k$ z jedrom $f|_{\bar{D}}$, ki je dominanten na $\bar{D} \setminus E$ in fiksira E. Če po potrebi zmanjšamo P, lahko privzamemo, da lastnost (ii) velja tudi, če f zamenjamo z F_t za vse $t \in P$. Z uporabo posebne koordinatne karte (W_1, Φ_1) lahko najdemo odprto množico $\Omega \subset V_1$, ki vsebuje $\bar{D}'_1 \cap \bar{D}$, in holomorfen sprej π-prerezov $G : \Omega \times P_0$ $(0 \in P_0 \subset P)$ s sliko vsebovano v W_1, ki je blizu F v $\mathcal{C}^k(\bar{D}'_1 \cap \bar{D} \times P_0)$. To storimo na enak način kot v dokazu Trditve 3.4.4, le da moramo aproksimirati tudi prvi koeficient v Taylorjevem razvoju (saj je $f = F_0$ definiran le na $\bar{D}$). Ker mora slika tega novega koeficienta ostati v W_1, se lahko zgodi, da je Ω le majhna okolica množice $\bar{D}'_1 \cap \bar{D}$ in ne vsebuje cele domene $\bar{D}'_1$.



Slika 4.1: Domeni D_1' in D_1 (povzeto iz [9, Fig. 1]).

Radi bi uporabili Trditev 3.3.1 in zlepili spreja π-prerezov F in G v en sam sprej π-prerezov. Tega ne moremo storiti direktno, saj njuni definicijski domeni ne tvorita 1-konveksnega Cartanovega para. Toda še vedno lahko uporabimo Lemo 3.3.2, da poiščemo prehodno preslikavo $\gamma : \bar{D}_1' \cap \bar{D} \times P_1 \to \mathbb{C}^N$ $(0 \in P_1 \subset P_0)$ razreda $\mathcal{A}^k$ med F in G, ki je blizu $\gamma_0(x,t) = t$ v $\mathcal{C}^k(\bar{D}_1' \cap \bar{D})$ in zanjo velja $F(x,t) = G(x, \gamma(x,t))$ za $x \in \bar{D}_1' \cap \bar{D}$, $t \in P_1$. Z uporabo Izreka 3.2.2 na preslikavi in 1-konveksnem Cartanovem paru $(\bar{D}, \bar{D}_1')$ dobimo množico $0 \in P_2 \subset P_1$ in preslikavi $\alpha : \bar{D} \times P_2 \to \mathbb{C}^N$, $\beta : \bar{D}_1' \times P_2 \to \mathbb{C}^N$ razreda $\mathcal{A}^k$, ki sta blizu γ_0 v $\mathcal{C}^k(\bar{D})$, $\mathcal{C}^k(\bar{D}_1')$, in zanju velja $\gamma(x, \alpha(x,t)) = \beta(x,t)$ za $x \in \bar{D}_1' \cap \bar{D}$, $t \in P_2$. Spreja π-prerezov $F(x, \alpha(x,t))$ and $G(x, \beta(x,t))$ se tedaj združita v en sam sprej π-prerezov definiran na $\bar{D} \cup (\bar{D}_1' \cap \Omega)$, ki je blizu F v $\mathcal{C}^k(\bar{D} \times P_2)$ in fiksira E. Jedro tega novega spreja π-prerezov, ki ga označimo z f_1, je π-prerez razreda $\mathcal{A}^k$, ki je blizu f v $\mathcal{C}^k(\bar{D})$ in se ujema z f na E.

Ostane nam le še, da f_1 zožimo na primerno izbrano 1-konveksno domeno $D_1 \Subset X$, ki je vsebovana v $\bar{D} \cup (\bar{D}_1' \cap \Omega)$ in zadošča vsem želenim lastnostim. Izberemo domeno D_1 tako, da se izven V_1 ujema z D in velja

$$D_1 \cap V_1 = \phi_1^{-1}(\{\tau - \epsilon\chi < 0\})$$

za $0 < \epsilon < \delta$. Če izberemo $\epsilon > 0$ dovolj majhen, sta lastnosti (i) in (ii) izpolnjeni za (D_1, f_1). S tem je indukcijski korak zaključen.

Kljub temu, da nismo mogli direktno uporabiti Trditve 3.3.1, smo vseeno uporabili enako tehniko, da smo dobili aproksimacijske π-prereze. Zato lahko sklepamo tudi, da so aproksimacijski π-prerezi homotopni f na $\bar{D}$ preko homotopije π-prerezov razreda $\mathcal{A}^k(D)$, ki se ujemajo z f na E. $\square$

4.2 Globalna aproksimacija in princip Oka

Definicijske domene aproksimacijskih prerezov v Izreku 4.1.1 se v splošnem krčijo proti $\bar{D}$; natančnejša kot je aproksimacija, manjša je definicijska domena aproksimacijskega prereza. Če želimo dobiti aproksimacijo z globalnimi prerezi, moramo uvesti dodatne predpostavke. Da se izognemo topološkim obstrukcijam, bomo predpostavili, da se začetni prerez zvezno razširi do globalnega prereza. Še pomembneje, privzeti bomo morali, da je submerzija π v resnici sveženj z Oka vlaknom. S tem bomo kompenzirali dejstvo, da začetni π-prerez (jedro spreja π-prerezov) ni holomorfen na domeni, kamor želimo razširiti sprej π-prerezov.

Najenostavnejša izmed večih ekvivalentnih definicij Oka mnogoterosti je naslednja (glej [18, Definition 5.4.1, str. 192]).

Definicija 4.2.1. Kompleksna mnogoterost Y je *Oka mnogoterost*, če lahko vsako holomorfno preslikavo iz odprte okolice kompaktne konveksne množice $K \subset \mathbb{C}^m$ $(m \in \mathbb{N})$ v Y aproksimirano enakomerno na K s celimi preslikavami $\mathbb{C}^m \to Y$.

To lastnost imenujemo tudi *konveksna aproksimacijska lastnost* ali na kratko CAP (izhaja iz angleškega poimenovanja 'convex approximation property'). Ta lastnost implicira polni princip Oka za preslikave iz Steinovih mnogoterosti v Y (glej [18, Theorem 5.4.4, str. 193]).

Najprej omenimo rezultat, ki je direktna posledica Izreka 4.1.1 in glavnega rezultata v [46]. Sledi pa tudi iz našega glavnega Izreka 4.2.3 v tem razdelku (neodvisno od [46]) preko preprostega indukcijskega argumenta, ki ga skiciramo v dokazu.

Posledica 4.2.2. *Naj bo X 1-konveksna mnogoterost z izjemno množico E in naj bo $D \Subset X$ 1-konveksna domena z robom razreda $\mathcal{C}^l$ $(l \geq 2)$ ter $\mathcal{O}(X)$-konveksnim zaprtjem, da velja $E \subset D$. Naj bo $\pi : Z \to X$ holomorfna submerzija, ki izpolnjuje Pogoj $\mathcal{E}$. Predpostavimo, da je $\pi : Z|_{X \setminus \bar{D}} \to X \setminus \bar{D}$ holomorfen sveženj z Oka vlaknom. Za vsak zvezen π-prerez $f_0 : X \to Z$ razreda $\mathcal{A}^k$ $(k \leq l)$ na $\bar{D}$ obstaja homotopija $f_t : X \to Z$ zveznih π-prerezov razreda $\mathcal{A}^k$ na $\bar{D}$, da je f_t blizu f_0 v $\mathcal{C}^k(\bar{D})$ in se ujema z f_0 na E za vsak $t \in [0, 1]$, ter je f_1 holomorfen na X.*

Dokaz (skica). Zaradi enostavnosti predpostavimo, da je $\pi : Z \to X$ holomorfen sveženj z Oka vlaknom nad celo mnogoterostjo X. Izberimo gladko funkcijo izčrpanja $\phi : X \to \mathbb{R}$, ki je strogo plurisubharmonična Morseova funkcija izven E, da velja $\phi > 0$ na $\bar{D}$. Izberimo zaporedje števil $0 < c_1 < c_2 < \ldots$, ki niso kritične vrednosti funkcije ϕ, da velja $\lim_{j\to\infty} c_j = \infty$. Označimo $D_0 := D$ in $D_j := \{x \in X;\ \phi(x) < c_j\}$ za $j \in \mathbb{N}$. Interval parametrov $[0, 1]$ homotopije razdelimo na podintervale $I_j = [t_j, t_{j+1}]$, kjer je $t_j = 1 - 2^{-j}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Fiksirajmo $\epsilon > 0$. Konstruirali bomo homotopijo zveznih π-prerezov $f_t : X \to Z$ $(t \in [0, 1))$, da bo za vsak $j = 0, 1, 2, \ldots$ in $t \in I_j$ π-prerez f_t razreda $\mathcal{A}^k$ na $\bar{D}_j$, ki se ujema z f_0 na E in zadošča

$$\sup_{t \in I_j} \|f_t - f_{t_j}\|_{\mathcal{C}^k(\bar{D}_j)} < 2^{-j-1}\epsilon.$$

Limitni π-prerez $f_1 := \lim_{t\to 1} f_t : X \to Z$ je tedaj holomorfen na X in ϵ blizu f_0 v $\mathcal{C}^k(\bar{D})$.

Predpostavimo induktivno, da smo homotopijo že skonstruirali za $t \in [0, t_j]$, in razložimo, kako jo skonstruiramo za $t \in I_j$. Zvezen π-prerez $f_{t_j} : X \to Z$ je razreda $\mathcal{A}^k$ na $\bar{D}_j$. Z uporabo Izreka 4.2.3 (glej spodaj) na paru domen $D_j \Subset D_{j+2} \Subset X$

dobimo homotopijo zveznih π-prerezov $\tilde{f}_t : \bar{D}_{j+2} \to Z$ za $t \in I_j$, ki ima vse željene lastnosti, le da še ni definirana na celem X. To homotopijo zlahka popravimo do globalne homotopije, pri čemer jo ohranimo nespremenjeno na $\bar{D}_{j+1}$ in pri $t = t_j$. Res, izberimo gladko funkcijo $\chi : X \to [0,1]$ s kompaktnim noslicem vsebovanim v D_{j+2}, da velja $\chi = 1$ on $\bar{D}_{j+1}$, in definirajmo

$$f_t(x) := \tilde{f}_{t\chi(x)+t_j(1-\chi(x))}(x).$$

$\square$

Posledica 4.2.2 je 'odprta' verzija našega naslednjega razultata, v katerem vlogo mnogoterosti X (brez roba) prevzame zaprta domena $\bar{D}' \Subset X$ (z robom). Gre za Oka princip z aproksimacijo za prereze svežnjev razreda $\mathcal{A}^k$ z Oka vlakni nad kompaktnimi 1-konveksnimi domenami. Analogni rezultat v Steinovem primeru je bil dokazan v [9, Theorem 1.7]. Klasičen primer holomorfnih svežnjev nad Steinovimi mnogoterostmi sta obravnavala Grauert in Kerner (glej [25] in [28]), primer holomorfnih svežnjev s homogenimi vlakni nad 1-konveksnimi mnogoterostmi pa sta obravnavala Henkin in Leiterer (glej [33]).

Izrek 4.2.3. *Naj bo X kompleksna mnogoterost in naj bosta $D \Subset D' \Subset X$ omejeni 1-konveksni domeni s strogo psevdokonveksnim robom razreda $\mathcal{C}^l$ ($l \geq 2$) in isto izjemno množico E, pri čemer je zaprtje $\bar{D}$ $\mathcal{O}(D')$-konveksno. Naj bo $\pi : Z \to \bar{D}'$ sveženj razreda $\mathcal{A}^k$ ($k \leq l$) z Oka vlaknom, ki izpolnjuje Pogoj $\mathcal{E}$. Za vsak zvezen π-prerez $f_0 : \bar{D}' \to Z$ razreda $\mathcal{A}^k$ na $\bar{D}$ obstaja homotopija $f_t : \bar{D}' \to Z$ zveznih π-prerezov razreda $\mathcal{A}^k$ na $\bar{D}$, da je f_t blizu f_0 v $\mathcal{C}^k(\bar{D})$ in se ujema z f_0 na E za vsak $t \in [0,1]$, ter je f_1 razreda $\mathcal{A}^k$ na $\bar{D}'$.*

Izrek 4.2.3 še vedno velja, če $\bar{D}$ nadomestimo s poljubno kompaktno $\mathcal{O}(D')$-konveksno množico $K \subset D'$ in predpostavimo, da je začetni prerez f_0 holomorfen v okolici množice K.

Ideja dokaza je podobna kot v dokazu obstoja sprejev (glej razdelek 3.4). Začetni prerez 'odebelimo' v sprej prerezov, ki ga nato razširimo na večje in večje domene v bazni mnogoterosti. V dokazu bosta dva glavna koraka; razložiti bomo morali, kako sprej prerezov razširimo čez konveksno izboklino in čez kritično točko. Glavna razlika je v tem, da je bil prej začetni prerez (jedro spreja prerezov) že definiran in holomorfen na večji domeni, kamor smo želeli razširiti sprej prerezov. Temu sedaj ne bo tako, zato ga ne bomo mogli obdržati fiksnega.

Najprej si oglejmo, kako sprej prerezov razširimo čez konveksno izboklino.

Trditev 4.2.4. *Naj bo (D_0, D_1) 1-konveksen Cartanov par razreda $\mathcal{C}^l$ ($l \geq 2$) v kompleksni mnogoterosti X, kjer je D_1 konveksna izboklina na D_0. Definiramo $D_{0,1} = D_0 \cap D_1$ in $D = D_0 \cup D_1$ ter označimo z E izjemno množico domene D_0. Naj bo $\pi : Z \to \bar{D}$ bodisi sveženj razreda $\mathcal{A}^k$ ($k \leq l$) bodisi zožitev holomorfne submerzije $\tilde{Z} \to X$, da $\pi : Z|_{D_0} \to D_0$ izpolnjuje Pogoj $\mathcal{E}$ in je $\pi : Z_{\bar{D}_1} \to \bar{D}_1$ trivialen sveženj z Oka vlaknom. Za vsak zvezen π-prerez $f_0 : \bar{D} \to Z$ razreda $\mathcal{A}^k$ na $\bar{D}_0$ obstaja homotopija $f_t : \bar{D} \to Z$ zveznih π-prerezov razreda $\mathcal{A}^k$ na $\bar{D}_0$, da je f_t blizu f_0 v $\mathcal{C}^k(\bar{D}_0)$ in se ujema z f_0 na E za vsak $t \in [0,1]$, ter je f_1 razreda $\mathcal{A}^k$ na $\bar{D}$.*

Dokaz. Po Izreku 3.4.3 obstaja sprej π-prerezov $F : \bar{D}_0 \times P \to Z$ razreda $\mathcal{A}^k$ z jedrom f, ki je dominanten na $\bar{D}_0 \setminus E$ in fiksira E. Z uporabo trivializacije $Z|_{\bar{D}_1} \cong \bar{D}_1 \times Y$ (Y je vlakno) lahko zapišemo

$$F(x,t) = (x, \tilde{F}(x,t)) \in \bar{D}_{0,1} \times Y, \quad x \in \bar{D}_{0,1}, t \in P.$$

Po definiciji konveksne izbokline lahko predpostavimo, da sta $D_{0,1}$ in D_1 strogo konveksni domeni v $\mathbb{C}^m$. Izberemo polidisk $0 \in P_0 \Subset P$. Za $0 < \lambda < 1$ je preslikava $\tilde{F}_\lambda(x,t) = \tilde{F}(\lambda x, t)$ holomorfna na $\frac{1}{\lambda} D_{0,1} \times P \supset \bar{D}_{0,1} \times \bar{P}_0$. Če izberemo λ dovolj blizu 1, je $\tilde{F}_\lambda$ poljubno blizu $\tilde{F}$ v $\mathcal{C}^k(\bar{D}_{0,1} \times P)$. Ker je Y Oka mnogoterost, lahko aproksimiramo $\tilde{F}_\lambda$ v $\mathcal{C}^k(\bar{D}_{0,1} \times \bar{P}_0)$ s celo preslikavo $\tilde{G}$ in definiramo

$$G(x,t) = (x, \tilde{G}(x,t)) \in \bar{D}_1 \times Y, \quad x \in \bar{D}_1, t \in P.$$

Če so zgornje aproksimacije dovolj natančne, lahko uporabimo Trditev 3.3.1 in zlepimo spreja π-prerezov F in G v en sam sprej π-prerezov $H : \bar{D} \times P_1 \to Z$ ($0 \in P_1 \subset P_0$) razreda $\mathcal{A}^k$, ki je blizu F v $\mathcal{C}^k(\bar{D}_0 \times P_1)$ in fiksira E. Jedro $H_0 =: f_1$ tega spreja π-prerezov je tedaj razreda $\mathcal{A}^k$ na $\bar{D}$, blizu f_0 v $\mathcal{C}^k(\bar{D}_0)$, in se ujema z f_0 na E. Poleg tega je f_1 homotopen f_0 na $\bar{D}_0$ preko homotopije z želenimi lastnostmi. Ni težko videti, da se ta homotopija razširi na $\bar{D}$. Za podrobnosti glej [20]. $\square$

Naslednja trditev nam pove, kako sprej prerezov razširimo čez tanek totalno realen ročaj pripet na rob domene. To trditev bomo uporabili pri razširjanju spreja prerezov čez kritično točko (glej kritični primer v dokazu Izreka 4.2.3 spodaj).

Trditev 4.2.5. *Naj bo Z kompleksna mnogoterost, X 1-konveksna mnogoterost z izjemno množico E in $\pi : Z \to X$ holomorfna submerzija, ki izpolnjuje Pogoj $\mathcal{E}$. Naj bo $D \Subset X$ 1-konveksna domena, za katero je $E \subset D$, in $M \subset X$ totalno realna podmnogoterost razreda $\mathcal{C}^1$, da sta $\bar{D}$ in $\bar{D} \cup M$ kompaktni $\mathcal{O}(X)$-konveksni podmnožici. Za vsako odprto okolico $U \subset X$ množice $\bar{D}$, zvezen π-prerez $f : U \cup M \to Z$, ki je holomorfen na U, $\epsilon > 0$ in $k \geq 0$ obstaja odprta okolica $V \subset X$ množice $\bar{D} \cup M$ in holomorfen π-prerez $g : V \to Z$, ki se ujema z f na E ter je ϵ blizu f v $\mathcal{C}^k(\bar{D})$ in $\mathcal{C}(M)$. Poleg tega lahko g izberemo homotopen f preko homotopije π-prerezov, ki so holomorfni v okolicah množice $\bar{D}$ in zvezni v okolicah množice M.*

Dokaz. Izberimo odprto okolico $U_0 \Subset U$ množice $\bar{D}$. Po Posledici 3.4.5 obstaja holomorfen sprej π-prerezov $F : U_0 \times P \to Z$ z jedrom $f|_{U_0}$, ki je dominanten na $U_0 \setminus E$ in fiksira E. Če po potrebi skrčimo U_0 in P, lahko sprej π-prerezov F zvezno razširimo na $M \times P$.

Po standardnem rezultatu (glej na primer [18, p. 72, Corollary 3.5.2]) ima množica $B := M \setminus D \subset X$ bazo Steinovih okolic. Po drugi strani ima množica $\bar{D} \cup M$ bazo 1-konveksnih okolic. V primeru, ko je domena D Steinova (tj. $E = \emptyset$), je bilo to dokazano v [13, Theorem 3.1] z lepljenjem določenih plurisubharmoničnih funkcij (glej tudi [18, p. 78, Theorem 3.7.1]). Enak dokaz deluje tudi v našem 1-konveksnem primeru, saj se lepljenje dogaja samo v okolici množice $M \cap \partial D$, tj. stran od izjemne množice E.

Fiksirajmo odprto Steinovo okolico $\Omega \Subset X$ množice B z gladkim strogo psevdokonveksnim robom, da velja $\bar{\Omega} \cap E = \emptyset$, in odprto 1-konveksno okolico $D_0 \Subset U_0$ množice $\bar{D}$ z gladkim strogo psevdokonveksnim robom. Označimo $K := \bar{D}_0 \cap \bar{\Omega}$ in $S := K \cup B$. Sedaj lahko uporabimo [13, Theorem 3.2] in aproksimiramo sprej π-prerezov F, ki je holomorfen nad okolico U_0 množice K in zvezen nad B, s sprejem π-prerezov $G : \Omega_0 \times P_0 \to Z$ $(0 \in P_0 \Subset P)$, ki je holomorfen nad neko okolico Ω_0 množice S ter je blizu F v $\mathcal{C}^k(K \times P_0)$ in $\mathcal{C}(B \times P_0)$. Če je aproksimacija dovolj natančna, potem je jedro G_0 homotopno $f = F_0$ preko homotopije π-prerezov, ki so holomorfni na okolici množice K in zvezni na okolici množice B.

Preostane nam, da spreja π-prerezov F in G zlepimo v en sam sprej π-prerezov. V ta namen izberimo 1-konveksno okolico V množice $\bar{D} \cup M$ z gladkim strogo psevdokonveksnim robom, da je $V \Subset D_0 \cup (\Omega \cap \Omega_0)$. Domeni $V \cap D_0$ zgladimo robove, da dobimo 1-konveksno domeno A, in domeni $V \cap \Omega$ zgladimo robove, da dobimo Steinovo domeno B. Ti dve domeni tvorita 1-konveksen Cartanov par (A, B) razreda $\mathcal{C}^\infty$. Pri tem velja $A \cup B = V$, $D \Subset A \Subset U_0$, $B \Subset \Omega_0$ in $A \cap B \subset K$. Z uporabo Trditve 3.3.1 lahko spreja π-prerezov $F|_{\bar{A} \times P_0}$ in $G|_{\bar{B} \times P_0}$ zlepimo v en sam sprej π-prerezov $H : \bar{V} \times P_1 \to Z$ $(0 \in P_1 \subset P_0)$. Njegovo jedro $g := G_0|_V$ je holomorfen π-prerez, ki izpolnjuje vse pogoje iz trditve. ☐

Dokaz Izreka 4.2.3. Najprej pokažimo, da lahko predpostavimo, da je f_0 holomorfen na neki odprti okolici $U \subset D'$ množice $\bar{D}$. Če temu ni tako, lahko s pomočjo Izreka 4.1.1 najdemo π-prerez g holomorfen na odprti okolici $U_0 \subset D'$ množice $\bar{D}$, ki je blizu f v $\mathcal{C}^k(\bar{D})$ in se ujema z f_0 na E. Dalje, če je aproksimacija dovolj natančna in okolico U_0 po potrebi nekoliko skrčimo, potem je g homotopen f_0 na U_0 preko homotopije $g_t : U_0 \to Z$ zveznih π-prerezov, ki so razreda $\mathcal{A}^k$ na $\bar{D}$ in se ujemajo z f_0 na E. Izberemo gladko funkcijo $\chi : X \to [0, 1]$ s kompaktnim nosilcem vsebovanim v U_0, da velja $\chi = 1$ na odprti okolici U množice $\bar{D}$. Definiramo $\tilde{g}_t(x) := g_{t\chi(x)}(x)$. To je homotopija globalnih zveznih π-prerezov, ki so razreda $\mathcal{A}^k$ na $\bar{D}$ in se ujemajo z f_0 na E, pri čemer je $\tilde{g}_1$ holomorfen na $U \subset \bar{D}$. Torej lahko f_0 zamenjamo z $\tilde{g}_1$.

Predpostavke zagotavljajo obstoj strogo plurisubharmonične funkcije ϕ razreda $\mathcal{C}^l$ definirane na odprti okolici $V \subset X$ množice $\bar{D}' \setminus D$, za katero velja $D \cap V \subset \{x \in V;\ \phi(x) < 0\} \Subset U$ in $D' \cap V = \{x \in V;\ \phi(x) < 1\}$. Poleg tega lahko predpostavimo, da je ϕ Morseova funkcija z *lepimi kritičnimi točkami* $p_1, \ldots, p_J \in V$ (v smislu [18, Definition 3.9.2, str. 89]), kjer je $0 < \phi(p_1) < \ldots < \phi(p_J) < 1$. Izberemo zaporedje števil $0 < c_1 < \ldots < c_{2J} < 1$, da velja $c_{2j-1} < \phi(p_j) < c_{2j}$ za vsak $j = 1, \ldots, J$ in definiramo $c_0 := 0$, $c_{2J+1} = 1$. Označimo $D_j = D \cup \{x \in V;\ \phi(x) < c_j\}$, $j = 0, \ldots, 2J+1$. Interval parametrov $[0, 1]$ homotopije razdelimo na podintervale $I_j = [t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, \ldots, 2J$, kjer je $t_j = \frac{j}{2J+1}$, $j = 0, \ldots, 2J+1$.

Skonstruirali bomo homotopijo $f_t : \bar{D}' \to Z$ zveznih π-prerezov, da bo za vsak $j = 0, \ldots, 2J$ in $t \in I_j$ π-prerez f_t razreda $\mathcal{A}^k$ na $\bar{D}_j$, se bo ujemal z f_0 na E in bo $\frac{\epsilon}{2J+1}$ blizu f_{t_j} v $\mathcal{C}^k(\bar{D}_j)$. Tako bo f_t ϵ blizu f_0 v $\mathcal{C}^k(\bar{D})$ za vsak $t \in [0, 1]$.

Induktivno predpostavimo, da smo homotopijo že skonstruirali za $t \in [0, t_j]$, in sedaj bomo razložili, kako jo skonstruiramo za $t \in I_j = [t_j, t_{j+1}]$. Obravnavamo dva primera.

Nekritičen primer: Če je j sod, potem ϕ nima kritičnih točk v $\bar{D}_{j+1} \setminus D_j$. Po lemi o izboklinah (glej na primer [33, Lemma 2.2] ali [18, Lemma 5.10.3, str. 218]) obstaja končno zaporedje

$$D_j = \Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \ldots \subset \Omega_m = D_{j+1}$$

(pri čemer je m odvisen od j) 1-konveksnih domen s strogo psevdokonveksnim robom razreda $\mathcal{C}^l$, da za vsak $i = 1, \ldots, m$ velja $\Omega_i = \Omega_{i-1} \cup B_i$, kjer je B_i konveksna izboklina na Ω_{i-1}. Poleg tega lahko zagotovimo, da je $\pi : Z|_{\bar{B}_i} \to \bar{B}_i$ trivialen sveženj za vsak i. Z induktivno uporabo Trditve 4.2.4 na 1-konveksnih Cartanovih parih (Ω_{i-1}, B_i), $i = 1, \ldots, m$, dobimo želeno homotopijo na intervalu $[t_j, t_{j+1}]$.

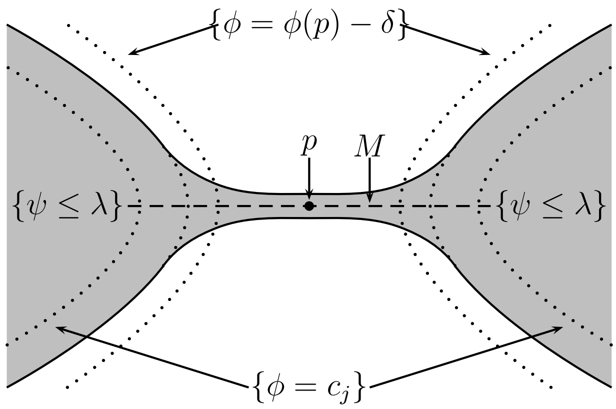
Kritičen primer: Če je j lih, potem ima ϕ eno samo kritično točko $p \in D_{j+1} \setminus \bar{D}_j$. Označimo z M stabilno mnogoterost skozi p gradientnega toka funkcije ϕ. Za dovolj majhen $\delta > 0$ nam [18, Proposition 3.10.4, str. 96] (glej tudi [10, Lemma 3.1]) podaja strogo plurisubharmonično funkcijo ψ na $\{x \in V;\ \phi(x) < \phi(p) + 3\delta\}$ razreda $\mathcal{C}^l$, za katero velja:

(i) $\{\phi \leq c_j\} \cup M \subset \{\psi \leq 0\} \subset \{\phi \leq \phi(p) - \delta\} \cup M$,

(ii) $\{\phi \leq \phi(p) + \delta\} \subset \{\psi \leq 2\delta\} \subset \{\phi < \phi(p) + 3\delta\}$,

(iii) ψ kritičnih vrednosti v $(0, 3\delta)$,

(iv) $\psi = \phi + s$ izven neke okolice točke p za nek $s > \delta$.



Slika 4.2: Tipična nivojska množica funkcije ψ (povzeto iz [18, Fig. 3.5, str. 94]).

Interval $I_j = [t_j, t_{j+1}]$ razdelimo na štiri podintervale $J_1 = [t_j, s_1]$, $J_2 = [s_1, s_2]$, $J_3 = [s_2, s_3]$, $J_4 = [s_3, t_{j+1}]$, kjer je $t_j < s_1 < s_2 < s_3 < t_{j+1}$, in nadaljujemo v štirih korakih.

Korak 1: Po nekritičnem primeru deformiramo π-prerez f_{t_j} do π-prereza f_{s_1} razreda $\mathcal{A}^k$ na $D \cup \{\phi \leq \phi(p) - \frac{\delta}{2}\}$ preko homotopije $f_t : \bar{D}' \to Z$ $(t \in J_1)$ π-prerezov z želenimi lastnostmi.

Korak 2: Množica $M \setminus (D \cup \{\phi < \phi(p) - \delta\})$ je d-dimenzionalna totalno realna krogla $B \subset X$ pripeta s svojo robno $(d-1)$-sfero ∂B na $\{\phi = \phi(p) - \delta\}$ (pri tem je d Morseov indeks kritične točke p). Sedaj uporabimo Trditev 4.2.5 in aproksimiramo π-prerez f_{s_1} v $\mathcal{C}^k(D \cup \{\phi \leq \phi(p) - \delta\})$ s π-prerezom f_{s_2} holomorfnim v neki odprti okolici W_0 množice $D \cup \{\phi \leq \phi(p) - \delta\} \cup B$, ki se ujema z f_0 na E. Dalje, če je aproksimacija dovolj natančna in izberemo W_0 dovolj majhen, potem je f_{s_2} homotopen f_{s_1} na W_0 preko homotopije $f_t : W_0 \to Z$ $(t \in J_2)$ holomorfnih π-prerezov, ki se ujemajo z f_0 na E. Kot na začetku dokaza, lahko to homotopijo popravimo do globalne homotopije, pri čemer jo ohranimo nespremenjeno v neki odprti okolici W množice $D \cup \{\phi \leq \phi(p) - \delta\} \cup B$ in pri $t = s_1$.

Korak 3: Po (i) je za dovolj majhen $\lambda > 0$ množica $D \cup \{\psi \leq \lambda\}$ vsebovana v W (in vsebuje $\bar{D}_j$). Po nekritičnem primeru za funkcijo ψ (glej (iii)) deformiramo π-prerez f_{s_2} do π-prereza f_{s_3} razreda $\mathcal{A}^k$ na $D \cup \{\psi \leq 2\delta\}$ preko homotopije $f_t : \bar{D}' \to Z$ $(t \in J_3)$ π-prerezov z želenimi lastnostmi.

Korak 4: Po (ii) je π-prerez f_{s_3} holomorfen v okolici kompaktne množice $\{\phi \leq \phi(p) + \delta\}$. Po nekritičnem primeru ga lahko deformiramo do π-prereza $f_{t_{j+1}}$ razreda $\mathcal{A}^k$ na $\bar{D}_{j+1}$ preko homotopije $f_t : \bar{D}' \to Z$ $(t \in J_4)$ π-prerezov z želenimi lastnostmi.

Če so aproksimacije v vseh štirih korakih dovolj natančne, potem je za vsak $t \in I_j$ π-prerez f_t $\frac{\epsilon}{2J+1}$ blizu f_{t_j} v $\mathcal{C}^k(\bar{D}_j)$. S tem je dokaz indukcijskega koraka zaključen.

Opazimo lahko, da smo dejstvo, da je π sveženj z Oka vlaknom potrebovali le izven množice $\bar{D}$. □

Pod dodatnimi topološkimi predpostavkami na vlakno svežnja π, ki bodo omogočale zvezno razširjanje prerezov, lahko dokažemo naslednjo posledico Izreka 4.2.3 (primerjaj z [18, Theorem 5.14.1, str. 233]).

Posledica 4.2.6. *Naj bo X kompleksna mnogoterost in naj bosta $D \Subset D' \Subset X$ omejeni 1-konveksni domeni s strogo psevdokonveksnim robom razreda $\mathcal{C}^l$ $(l \geq 2)$ in isto izjemno množico, pri čemer je zaprtje $\bar{D}$ $\mathcal{O}(D')$-konveksno. Naj bo $\pi : Z \to \bar{D}'$ sveženj razreda $\mathcal{A}^k$ $(k \leq l)$, ki izpolnjuje Pogoj $\mathcal{E}$, z vlaknom Y, ki je Oka mnogoterost in izpolnjuje pogoj $\pi_q(Y) = 0$ za vse $q < \dim_{\mathbb{C}} X$. Tedaj lahko vsak π-prerez $f : \bar{D} \to Z$ razreda $\mathcal{A}^k$ aproksimiramo v $\mathcal{C}^k(\bar{D})$ s π-prerezom $g : \bar{D}' \to Z$ razreda $\mathcal{A}^k$, ki se ujema z f na E.*

Dokaz. V dokazu Izreka 4.2.3 smo dejstvo, da je začetni prerez zvezen na X potrebovali le pri prehodu čez kritično točko p indeksa d strogo plurisubharmonične Morseove funkcije ϕ (*Korak 2* v *Kritičnem primeru*). Pri taki točki moramo znati zvezno razširiti dan π-prerez f, definiran na podnivojski množici $D \cup \{\phi \leq \phi(p) - \frac{\delta}{2}\}$, čez d-dimenzionalno totalno realno kroglo $B \subset X$ pripeto s svojo robno $(d-1)$-sfero ∂B na $\{\phi = \phi(p) - \frac{\delta}{2}\}$, kjer je $D \cup \{\phi \leq \phi(p) - \frac{\delta}{2}\} \cup B$ krepki deformacijski retrakt podnivojske množice $D \cup \{\phi \leq \phi(p) + \epsilon\}$ za nek $\epsilon > 0$.

Če smo izbrali δ dovolj majhen, potem je množica $\bar{B}$ vsebovana v majhni okolici točke p, nad katero je π trivialen sveženj z vlaknom Y. Z uporabo te trivializacije lahko lokalne π-prereze identificiramo s preslikavami v vlakno Y. Vidimo, da želena razširitev obstaja če in samo če je preslikava $f : \partial B \to Y$ homotopna konstantni preslikavi. To je vsekakor res, če velja $\pi_{d-1}(Y) = 0$, kar je res po predpostavki, saj Morseovi indeksi strogo plurisubharmonične funkcije nikoli ne presegajo $\dim_{\mathbb{C}} X$. $\square$

4.3 Prave holomorfne preslikave

V tem razdelku želimo le omeniti še eno aplikacijo tehnike lepljenja sprejev holomorfnih preslikav.

Izrek 4.3.1. *Naj bosta X in Y kompleksni mnogoterosti kompleksnih dimenzij m in n, in naj bo $D \subset X$ 1-konveksna domena z gladkim strogo psevdokonveksnim robom. Predpostavimo, da kanonična projekcija $D \times Y \to D$ izpolnjuje Pogoj $\mathcal{E}$, da velja $2m \leq n$, in naj bo $q \in \{1, \ldots, n - 2m + 1\}$. Tedaj velja naslednje.*

(i) *Če je Y q-konveksna, potem obstaja prava holomorfna preslikava $D \to Y$.*

(ii) *Če je Y q-kompletna, potem lahko vsako zvezno preslikavo $\bar{D} \to Y$, ki je holomorfna na D, aproksimiramo enakomerno po kompaktih v D s pravimi holomorfnimi preslikavami $D \to Y$.*

Steinovo verzijo Izreka 4.3.1 lahko najdemo v [10] skupaj z nekoliko splošnejšo verzijo in dodatnimi posledicami. Z uporabo tehnik razvitih v disertaciji dokaz v [10] zlahka prenesemo v naš 1-konveksen primer.

Literatura

[1] Ahlfors, L. V.: *Complex Analysis.* 3rd ed., McGraw-Hill Book Co., New York (1979)

[2] Andreotti, A., Grauert, H.: Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes. *Bull. Soc. Math. France* **90**, 193–259 (1962)

[3] Bishop, E.: Mappings of partially analytic spaces. *Amer. J. Math.* **83**, 209–242 (1961)

[4] Cartan, H.: Séminaire Henri Cartan de l'Ecole Supérieure, 1951/1952. *Fonctions analytiques de plusieurs variables complexes.* Secrétariat mathématique, 11 Rue Pierre Curie, Paris (1952)

[5] Coltoiu, M.: A note on Levi's problem with discontinuous functions. *Enseign. Math., II* **31**, 299–304 (1985)

[6] Coltoiu, M., Michalache, N.: Strongly plurisubharmonic exhaustion functions on 1-convex spaces. *Math. Ann.* **270**, 63–68 (1985)

[7] Docquier, F., Grauert, H.: Levisches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.* **140**, 94–123 (1960)

[8] Drinovec-Drnovšek, B., Forstnerič, F.: Holomorphic curves in complex spaces. *Duke Math. J.* **139**, 203–254 (2007)

[9] Drinovec-Drnovšek, B., Forstnerič, F.: Approximation of holomorphic mappings on strongly pseudoconvex domains. *Forum Math.* **20**, 817–840 (2008)

[10] Drinovec-Drnovšek, B., Forstnerič, F.: Strongly pseudoconvex domains as subvarieties of complex manifolds. *Amer. J. Math.* **132**, 331–360 (2010)

[11] Drinovec-Drnovšek, B., Forstnerič, F.: Disc functionals and Siciak-Zaharyuta extremal functions on singular varieties. *Ann. Polon. Math.* **106**, 171–191 (2012)

[12] Fornaess, J. E., Narasimhan, R.: The Levi problem on complex spaces with singularises. *Math. Ann.* **248**, 47–72 (1980)

[13] Forstnerič, F.: Holomorphic submersions from Stein manifolds. *Ann. Inst. Fourier* **54**, 1913–1942 (2004)

[14] Forstnerič, F.: Runge approximation on convex sets implies Oka's property. *Ann. Math.* **163**, 689–707 (2006)

[15] Forstnerič, F.: Manifolds of holomorphic mappings from strongly pseudoconvex domains. *Asian J. Math.* **11**, 113–126 (2007)

[16] Forstnerič, F.: Oka manifolds. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **347**, 1017-–1020 (2009)

[17] Forstnerič, F.: The Oka principle for sections of stratified fiber bundles. *Pure Appl. Math. Quarterly* **6**, 843–874 (2010)

[18] Forstnerič, F.: *Stein Manifolds and Holomorphic Mappings: The Homotopy Principle in Complex Analysis*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, vol. 56. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (2011)

[19] Forstnerič, F.; Lárusson, F.: Holomorphic flexibility properties of compact complex surfaces. *Int. Math. Res. Notices IMRN* (2013) `http://dx.doi.org/10.1093/imrn/rnt044`

[20] Forstnerič, F., Prezelj, J.: Oka's principle for holomorphic fiber bundles with sprays. *Math. Ann.* **317**, 117–154 (2000)

[21] Forstnerič, F., Prezelj, J.: Extending holomorphic sections from complex subvarieties. *Math. Z.* **236**, 43–68 (2001)

[22] Forstnerič, F., Prezelj, J.: Oka's principle for holomorphic submersions with sprays. *Math. Ann.* **322**, 633–666 (2002)

[23] Grauert, H.: Charakterisierung der holomorph vollständigen kompleksen Räume. *Math. Ann.* **129**, 233–259 (1955)

[24] Grauert, H.: Holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen. *Math. Ann.* **133**, 450–472 (1957)

[25] Grauert, H.: Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen. *Math. Ann.* **135**, 263–273 (1958)

[26] Grauert, H.: On Levi's problem and the imbedding of real analytic manifolds. *Ann. Math., II. Ser.* **68**, 460–472 (1958)

[27] Grauert, H.: Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. *Math. Ann.* **146**, 331–368 (1962)

[28] Grauert, H., Kerner, H.: Approximation von holomorphen Schnittflächen in Faserbündeln mit homogener Faser. *Arch. Math.* **14**, 328–333 (1963)

[29] Grauert, H., Remmert, R.: *Theory of Stein Spaces*. Grundlehren der math. Wiss., vol. 227. Springer-Verlag, New York (1977)

[30] Gromov, M.: Oka's principle for holomorphic sections of elliptic bundles. *J. Amer. Math. Soc.* **2**, 851–897 (1989)

[31] Gunning, R. C., Rossi, H.: *Analytic functions of several complex variables.* Prentice–Hall, Englewood Cliffs (1965)

[32] Heunemann, D.: Theorem B for Stein manifolds with strictly pseudoconvex boundary. *Math. Nachr.* **128**, 87–101 (1986)

[33] Henkin, G. M., Leiterer, J.: The Oka-Grauert principle without induction over the basis dimension. *Math. Ann.* **311**, 71–93 (1998)

[34] Henkin, G. M., Leiterer, J.: *Andreotti-Grauert theory by integral formulas.* Birkhäuser, Boston (1988)

[35] Hörmander, L.: L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator. *Acta Math.* **113**, 89–152 (1965)

[36] Hörmander, L.: *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables.* Third Ed. North-Holland Mathematical Library, **7**, North Holland, Amsterdam (1990).

[37] Kneser, H.: Die Randwerte einer analytischen Funktion zweier Veränderlichen. *Monatsh. Math. Phys.* **43**, 364–380 (1936)

[38] Kohn, J.: Harmonic integrals on strongly pseudoconvex manifolds. I, *Ann. Math.* **78**, 112–148 (1963)

[39] Kohn, J.: Harmonic integrals on strongly pseudoconvex manifolds. II, *Ann. Math.* **79**, 450–472 (1964)

[40] Laurent-Thiébaut, C.: *Holomorphic function theory in several variables: An introduction.* Springer-Verlag, London (2011)

[41] Lelong, P.: Fonctions plurisousharmonique; mesures de Radon associés. Applications aux fonctions analytiques. *Colloque sur les fonctions de plusieurs variables*, Brussels (1953)

[42] Lieb, I., Michel, J.: *The Cauchy-Riemann complex: Integral formulæ and Neumann problem.* Aspects of Mathematics **E34**, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig (2002)

[43] Narasimhan, R.: Imbedding of holomorphically complete complex spaces. *Amer. J. Math.* **82**, 917–934 (1960)

[44] Narasimhan, R.: The Levi problem for complex spaces II. *Math. Ann.* **146**, 195–216 (1962)

[45] Ohsawa, T., Takegoshi, K.: On the extension of L^2 holomorphic functions. *Math. Z.* **195**, 197—204 (1987)

[46] Prezelj, J.: A relative Oka-Grauert principle for holomorphic submersions over 1-convex spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **362**, 4213–4228 (2010)

[47] Prezelj, J., Slapar, M.: The generalized Oka-Grauert principle for 1-convex manifolds. *Mich. Math. J.* **60**, 495–506 (2011)

[48] Range, R. M.: *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables.* Springer-Verlag, New York (1986)

[49] Remmert, R.: Sur les espaces analytiques holomorphiquement séparables et holomorphiquement convexes. *C.R. Acad. Sci., Paris* **243**, 118–121 (1956)

[50] Remmert, R.: Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. *Math. Ann.* **133**, 328–370 (1957)

[51] Richberg, R.: Stetige streng pseudoconvexe Funktionen. *Math. Ann.* **175**, 257–286 (1968)

[52] Starčič, T.: Stein neighborhood basis of embedded strongly pseudoconvex domains and approximation of mappings. *J. Geom. Anal.* **18**, 1133—1158 (2008)

[53] Stopar, K.: Approximation of holomorphic mappings on 1-convex domains, sprejet v objavo v *Int. J. Math.*, `arXiv:1305.4256`

[54] Vâjâitu, V.: A characterization of 1-convex spaces. *J. Math. Pures Appl.* **84**, 189–197 (2005)

[55] Vâjâitu, V.: A cohomological Steinness criterion for holomorphically spreadable complex spaces. *Czech. Math. J.* **60**, 655–667 (2010)