Povzetek

Pogost računski problem je izračun vrednosti določenega integrala funkcije f, če ne poznamo njenega nedoločenega integrala, poznamo pa vrednosti funkcije f v danih točkah. V takem primeru lahko za numerično integriranje uporabimo Gaussove kvadraturne formule. Uteži in vozle Gaussove kvadraturne formule poiščemo tako, da izračunamo lastne vrednosti in lastne vektorje tridiagonalne matrike. Tako numerično izračunamo vrednost določenega integrala, radi pa bi še ocenili napako, ki je pri tem nastala. Za oceno napake vpeljemo anti-Gaussove kvadraturne formule.

Anti-Gaussova kvadraturna formula je kvadraturna formula stopnje $2n + 1$ na $n + 2$ točkah, ki integrira polinome stopnje kvečjemu $2n + 3$ z napako, ki je enako velika, a nasprotnega predznaka kot napaka Gaussove kvadraturne formule na $n + 1$ točkah. Namenjena je za ocenjevanje napake, ki nastane pri integriranju z Gaussovo kvadraturno formulo. Napako precej natančno ocenimo tako, da integral izračunamo z obema kvadraturnima formulama, nato pa razliko rezultatov razpolovimo. Anti-Gaussova kvadraturna formula ima pozitivne uteži, njeni vozli pa ležijo na integracijskem intervalu in se prepletajo z vozli Gaussove kvadraturne formule. V najslabših primerih lahko največ dva vozla ležita zunaj integracijskega intervala. Poleg tega jo je enostavno izračunati, saj ima razen enega koeficienta iste koeficiente rekurzije kot Gaussova kvadraturna formula na $n+2$ točkah, njeni koeficienti rekurzije pa so razen dveh koeficientov isti kot koeficienti rekurzije Gaussove kvadraturne formule na $n + 1$ točkah, ki smo jih izračunali že na začetku.

Anti-Gaussove kvadraturne formule lahko nadgradimo in jih povežemo s simetričnimi Gauss-Lobattovimi kvadraturnimi formulami. To so Gauss-Lobattove kvadraturne formule, ki so povezane z nenegativno simetrično mero na realni osi. Izboljšana anti-Gaussova kvadraturna formula je kvadraturna formula stopnje $2n + 1$ na $n + 2$ točkah, ki integrira polinome stopnje kvečjemu $2n+3$ z napako, ki je nasprotnega predznaka kot napaka simetrične Gaussove kvadraturne formule na $n+1$ točkah, pomnožena z $\gamma > 0$. Izkaže se, da so za posebno vrednost parametra γ simetrične Gauss-Lobattove kvadraturne formule enake izboljšanim anti-Gaussovim kvadraturnim formulam. Zato imajo za mnogo integrandov simetrične Gaussove kvadraturne formule in simetrične Gauss-Lobattove kvadraturne formule kvadraturno napako nasprotnega predznaka, s tem pa si lahko pomagamo pri oceni napake Gaussove kvadraturne formule. Izboljšano anti-Gaussovo kvadraturno formulo je preprosto izračunati, saj za njene koeficiente rekurzije velja podobno kot za koeficiente rekurzije anti-Gaussove kvadraturne formule.

Ključne besede: numerična integracija, kvadraturne formule, lastne vrednosti in lastni vektorji, ortogonalni polinomi, anti-Gaussove kvadraturne formule.

Math. Subj. Class (2000): 65D30, 65D32, 65F15, 42C05, 41A55.

Literatura

[1] M. Abramowitz in I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions.* Dover Publications, Inc., New York, 1965.

[2] D. Calvetti in L. Reichel. Symmetric Gauss-Lobatto and Modified Anti-Gauss Rules. *BIT*, št. 43, str. 541-554, 2003.

[3] W. Gautschi. Gauss-Radau formulae for Jacobi and Laguerre weight functions. *Math. Comput. Simulation*, št. 54, str. 403-412, 2000.

[4] W. Gautschi. High-order Gauss-Lobatto formulae. *Numer. Algorithms*, št. 25, str. 213-222, 2000.

[5] W. Gautschi. Gauss-Kronrod Quadrature - A Survey. V *Numerical Methods and Approximation Theory III.* Uredil G. V. Milovanović. University of Niš, str. 39-66, 1988.

[6] G. H. Golub. Some Modified Matrix Eigenvalue Problems. *SIAM Review*, št. 15, str. 318-334, 1973.

[7] G. H. Golub in C. F. Van Loan. *Matrix Computations*, 2. izdaja. The Johns Hopkins University Press, Baltimore in London, 1990.

[8] G. H. Golub in J. H. Welsch. Calculation of Gauss Quadrature Rules. *Math. Comput.*, št. 23, str. 221-230, 1969.

[9] D. J. Higham in N. J. Higham. *MATLAB Guide.* SIAM, Philadelphia, 2000.

[10] D. P. Laurie. Anti-Gaussian Quadrature Formulas. *Math. Comput.*, št. 65, str. 739-747, 1996.

[11] J. Stoer in R. Bulirsch. *Introduction to Numerical Analysis.* Springer, New York, 1983.

[12] E. Zakrajšek. *Uvod v numerične metode*, 2. popravljena izdaja. Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 2000.