

Povzetek

Diplomsko delo predstavi modele iz populacijske dinamike in obravnava področja matematike ter matematične izreke, ki so potrebni za njihovo analizo.

Na začetku predstavimo nekaj modelov, ki opisujejo eno samo populacijsko vrsto in interakcijo med več vrstami, s čimer bralec dobi občutek, kako se lotimo problema modeliranja. Matematično ti modeli predstavljajo sisteme diferencialnih enačb. Omejimo se na modele, opisane z avtonomnimi sistemi navadnih diferencialnih enačb. Omenimo tudi nekaj slavnih primerov iz realnega sveta, kjer je nepoznavanje odnosov med različnimi vrstami in nepredvidevanje možnih ekoloških posledic vodilo v katastrofo.

Modeli, ki opisujejo dinamiko populacijskih vrst v naravi, so večinoma nelinearni, zato je del drugega poglavja namenjen obravnavi nelinearnih sistemov. Dokažemo Hartman-Grobmanov izrek, ki nam pove, da si pri obravnavi nelinearnih sistemov lahko pomagamo z linearizacijo. Spoznamo različne tipe ravnovesnih leg linearnih in nelinearnih sistemov ter vpeljemo pojem stabilnosti in izrek Ljapunova, ki nam pomaga pri določanju stabilnosti ravnovesnih leg. Napišemo Routh-Hurwitzov kriterij, ki pove, kdaj dobimo stabilen sistem v primeru interakcije k populacijskih vrst. Pridobljeno znanje uporabimo na primerih iz populacijske dinamike. Posvetimo se predvsem razmerju plen – plenilec in tekmovanju.

Skozi celotno delo se pojavljajo napovedi o oscilacijah v populacijskih vrstah v naravi in temu zato namenimo tretje poglavje. Najprej uvedemo pojme, kot so dinamični sistem, limitne množice in limitni cikli ter nekaj osnovnih lastnosti, ki zanje veljajo. Po uvedbi vseh potrebnih pojmov se posvetimo Poincaré-Bendixsonovi teoriji, Bendixsonovemu izreku, Dulacovemu izreku in Hopfovi bifurkaciji, ki govorijo o obstoju oziroma neobstoju ciklov, in pokažemo njihovo uporabnost v populacijski dinamiki.

Večina od zgoraj naštetih področij matematike, obravnavanih v tem delu, je zelo obširnih. Zato je razumljivo, da v je v tem delu pokrit le majhen del vsakega od njih, del, ki nam služi pri obravnavi modelov populacijske dinamike.

Math. Subj. Class. (2000):

92D25, 34A12, 34C05, 34C25, 34C30, 34D20, 37G15, 70K05, 70K20

Ključne besede:

modeliranje, populacijska dinamika, matematična biologija, sistemi navadnih diferencialnih enačb, nelinearna diferencialna enačba, fazni portreti, linearizacija, Hartman-Grobmanov izrek, funkcija Ljapunova, Lotka-Volterra, dinamični sistemi, Poincaré-Bendixson, Hopfova bifurkacija

Key words:

modelling, population dynamics, mathematical biology, systems of ordinary differential equations, nonlinear differential equation, phase portraits, linearization, Hartman-Grobman theorem, Lyapunov function, Lotka-Volterra, dynamical systems, Poincaré-Bendixson, Hopf bifurcation

Literatura

- [1] A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon and A. G. Maier, *Qualitative Theory of Second-Order Dynamical Systems*, John Wiley and Sons, 1973.
- [2] D. K. Arrowsmith, C. M. Place, *Dynamical Systems: Differential Equations, Maps and Chaotic Behaviour*, Chapman and Hall, 1992.
- [3] R. B. Banks, *Growth and Diffusion Phenomena*, Springer-Verlag, 1994.
- [4] B. Barnes, G. R. Fulford, *Mathematical Modelling with Case Studies*, Taylor and Francis, 2002.
- [5] R. L. Borelli, C. S. Coleman, *Differential Equations, A Modeling Perspective*, John Wiley and Sons, 1998.
- [6] R. L. Borelli, C. S. Coleman, *ODE Architect Companion*, John Wiley and Sons, 1999.
- [7] F. Brauer, J. A. Nohel, *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations*, W. A. Benjamin, 1969.
- [8] N. F. Britton, *Essential Mathematical Biology*, Springer, 2003.
- [9] I. N. Bronstein, *Matematični priročnik*, Tehniška založba Slovenije, 1997.
- [10] J. Ecalle, Finitude des cycles limites et accelero-sommation de l'application de retour, *Lecture notes in Mathematics*, **1455**, Springer-Verlag, 1990, 74-159.
- [11] E. A. Coddington, N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, 1955.
- [12] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, 1966.
- [13] L. Edelstein-Keshet, *Mathematical Models in Biology*, McGraw-Hill, 1988.
- [14] H. I. Freedman, *Deterministic Mathematical Models in Population Ecology*, Marcel Dekker, 1980.
- [15] F. R. Gantmacher, *Applications of the Theory of Matrices*, Interscience Publishers, 1959.
- [16] J. Hale, H. Kocak, *Dynamics and Bifurcations*, Springer-Verlag, 1991.
- [17] P. Hartman, On local homeomorphisms of Euclidean spaces, *Bol. Soc. Math. Mexicana*, **5**, 1960, 220-241.

- [18] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, John Wiley and Sons, 1964.
- [19] B. D. Hassard, N. D. Kazarinoff, Y-H. Wan, *Theory and Applications of Hopf Bifurcation*, Cambridge University Press, 1981.
- [20] F. Križanič, *Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun*, Državna založba Slovenije, 1974.
- [21] Y. A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, 1998.
- [22] J. E. Marsden, M. McCracken, *The Hopf Bifurcation and Its Applications*, Springer-Verlag, 1976.
- [23] J. D. Murray, *Mathematical Biology*, Springer, 1989.
- [24] M. H. A. Newman, *Topology of Plane Sets*, Cambridge University Press, 1953.
- [25] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 1991.
- [26] C. Robinson, *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, CRC Press LLC, 1999.
- [27] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw Hill, 1964.
- [28] K. Tarman, *Osnove ekologije in ekologija živali*, Državna založba Slovenije, 1992.
- [29] G. Teschl, *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*, <http://www.mat.univie.ac.at/~gerald/>.
- [30] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 1985.