Povzetek

Posebno mesto pri metodah podprostorov Krylova zavzema metoda konjugiranih gradientov, ki je zelo učinkovita metoda za reševanje simetričnih, pozitivno definitnih linearnih sistemov z matriko velikosti $N \times N$. Izrednega pomena je tudi zato, ker poišče rešitev pri eksaktnem računanju po največ N iteracijah - torej pripelje do rešitve po končno korakih. Hkrati je metoda konjugiranih gradientov osnova širšemu razredu metod CG-tipa, ki so pomembne za reševanje nesimetričnih linearnih sistemov. Razdelimo jih lahko na več skupin.

Prvo skupino sestavljajo metode, ki temeljijo na reševanju prirejenih sistemov; to sta predvsem metoda konjugiranih gradientov z minimalno residualnim pogojem in metoda konjugiranih gradientov z minimizacijo napake. V tem delu ju nismo predstavili, kajti v splošnem še vedno velja, da je bolje uporabiti metode, ki rešujejo originalni sistem (predvsem zaradi občutljivosti sistemov).

Drugo skupino sestavljajo tako imenovane ortogonalne metode; poleg razširjene metode konjugiranih gradientov spada sem večina drugih podobnih metod, kot CR in GCR ter Orthomin(k) metode. Poleg njih ima pomembno vlogo še nekoliko specifična metoda s posplošenim minimalno residualnim pogojem (GMRES algoritem), ki temelji na Arnoldijevem algoritmu za redukcijo matrike na zgornjo Hessenbergovo obliko. V tem delu smo se v celoti posvetili pregledu metod iz te skupine. Predstavili smo njihove algoritme, navedli njihovo prostorsko zahtevnost in potrebno število operacij, in predstavili algoritme tudi na primerih. Velikokrat te metode uporabimo skupaj s stabilizacijsko tehniko, kar smo na kratko predstavili v zadnjem poglavju.

Tretjo skupino predstavljajo biortogonalne metode, med katerimi izstopata predvsem metoda bikonjugiranih gradientov (BCG metoda) in kvaziminimalno residualna metoda (QMR metoda), ki temeljita na algoritmu Lanczosa. Ta algoritem zgradi bazi podprostorov Krylova s pomočjo matrike sistema in njej transponirane matrike. S pomočjo teh vektorjev lahko obe metodi (BCG in QMR) zgradita zaporedje približkov, ki pod določenimi pogoji pripeljeta do rešitve sistema. BCG metoda je osnova celotnega razreda teh metod. QMR metoda pa je precej podobna že omenjenemu GMRES algoritmu (med drugim tudi zato, ker se problem na koncu prevede na iskanje minimuma po metodi najmanjših kvadratov).

Math. Subj. Class (1991) : 65F10

Key words : variational methods, Krylov subspaces, conjugate gradients, Arnoldi process, conditioners.

Ključne besede : variacijske metode, podprostori Krylova, konjugirani gradienti, Arnoldijev algoritem, stabilizatorji.

Literatura

[1] S.F.ASHBY, T.A.MANTEUFFEL in P.E.SAYLOR : *A taxonomy for conjugate gradient methods*, SIAM. J. Numer. Anal. 27 (1990), 1542-1568.

[2] Z.BOHTE : *Numerično reševanje sistemov linearnih enačb*, DMFA Ljubljana (1994).

[3] S.C.EISENSTAT : *A note on the generalized conjugate gradient method*, SIAM J.Numer.Anal. 20 (1983a), 358-361.

[4] S.C.EISENSTAT, H.C.ELMAN in M.H.SCHULTZ : *Variational iterative methods for nonsymmetric systems of linear equations*, SIAM J.Numer Anal. 20, (1983), 345-357.

[5] V.FABER in T.MANTEUFFEL : *Necessary and sufficient conditions for the existence of a conjugate gradient method*, SIAM J.Numer Anal. 21 (1984), 352-362.

[6] V.FABER in T.MANTEUFFEL : *Orthogonal error methods*, SIAM J.Numer.Anal. 24 (1987), 170-187.

[7] R.W.FREUND : *Conjugate gradient type methods for linear systems with complex symmetric coefficient matrices*, RIACS Technical Report 89.54, NASA Ames Research Center, Moffett Field (1989b).

[8] R.W.FREUND : *On conjugate gradient type methods and polynomial preconditioners for a class of complex nonHermitian matrices*, Numer. Math. 57 (1990), 285-312.

[9] R.W.FREUND : *Conjugate gradient-type methods for linear systems with complex symmetric coefficient matrices*, SIAM J. Sci. Stat. Comput. 13 (1992).

[10] R.W.FREUND, G.H.GOLUB in N.M.NACHTIGAL : *Iterative solutions of linear systems*, Acta Numerica (1991), 57-100.

[11] G.H.GOLUB in D.P.O'LEARY : *Some history of the conjugate gradient and Lanczos algorithems : 1948-1976*, SIAM Review 31 (1989), 50-102.

[12] M.R.HESTENS in E.STIEFEL : *Methods of conjugate gradients for solving linear systems*, J.Res.Natl Bur.Stand. 49 (1952), 409-436.

[13] W.D.JOUBERT in D.M.YOUNG : *Necessary and sufficient conditions for the simplifications of generalized conjugate-gradient algorithms*, Lin.Alg.Appl. 88/89 (1987), 449-485.

[14] T.A.MANTEUFFEL : *The Tchebychev iteration for nonsymmetric linear systems*, Numer. Math. 28 (1977), 307-327.

[15] N.M.NACHTIGAL, S.C.REDDY in L.N.TREFFETHEN : *How fast are nonsymmetric matrix iterations?*, SIAM J.Matrix Anal.Appl. 13 (1990), 778-795.

[16] C.C.PAIGE in M.A.SOUNDERS : *Solution of sparse indefinite systems of linear equations*, SIAM J.Numer.Anal. 12 (1975), 617-629.

[17] Y.SAAD : *Variations of Arnoldi's method for computing eigenvalues of large unsymmetric matrices*, Lin.Alg.Appl. 34 (1980), 269-295.

[18] Y.SAAD : *Krylov subspace methods for solving large unsymmetric linear systems*, Math. Comput. 37 (1981), 105-126.

[19] Y.SAAD : *Conjugate gradient-like algorithms for solving nonsymmetric linear systems*, Math.Comput. 44, 417-424.

[20] D.M.YOUNG in K.C.JEA : *Generalized conjugate gradient acceleration of nonsymmetric iterative methods*, Lin.Alg. Appl. 34 (1980), 159-194.