Povzetek

Naj bo V končno razsežen realen ali kompleksen vektorski prostor dimenzije vsaj 2. V prvem poglavju dokažemo osnovni izrek afine geometrije, ki karakterizira bijektivne preslikave $V \to V$, ki slikajo premice v premice (oziroma ohranjajo kolinearnost). V drugem poglavju dokažemo osnovni izrek projektivne geometrije. Naj bo V realen ali kompleksen vektorski prostor dimenzije vsaj 3 in $\mathbb{P}V$ projektivni prostor nad njim. Izrek opiše bijektivne preslikave $\tau : \mathbb{P}V \to \mathbb{P}V$, ki zadoščajo pogoju

$$[x] \subset [y] + [z] \iff \tau([x]) \subset \tau([y]) + \tau([z]) .$$

Prav tako bomo dokazali, da je Uhlhornov izrek direktna posledica osnovnega izreka projektivne geometrije. Ti trije izreki nam bodo pomagali pri reševanju naslednjega problema.

Naj bo $\mathcal{V}$ bodisi prostor vseh $n \times n$ hermitskih matrik bodisi prostor vseh $n \times n$ realnih simetričnih matrik bodisi množica efektov ali pa množica vseh projektorjev ranga 1. Bodi c realno število. Karakteriziramo bijektivne preslikave $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, ki zadoščajo pogoju $\mathrm{sl}(AB) = c \iff \mathrm{sl}(\phi(A)\phi(B)) = c$ z nekaterimi dodatnimi omejitvami na c, odvisnimi od množice $\mathcal{V}$. Izkaže se, da lahko problema s hermitskimi in simetričnimi matrikami rešimo s pomočjo osnovnih izrekov afine (če $c \neq 0$) in projektivne (če $c = 0$) geometrije. Pri reševanju problema z efekti in s projektorji ranga 1 bomo uporabili Uhlhornov izrek.

Math. Subj. Class. (2010): `15B48, 15B57, 51A10`
Ključne besede: ohranjevalci, sled, hermitske matrike, simetrične matrike, efekti, projektorji ranga ena, osnovni izrek afine geometrije, osnovni izrek projektivne geometrije
Keywords: preservers, trace, hermitian matrices, symmetric matrices, effects, rank-one projections, fundamental theorem of affine geometry, fundamental theorem of projective geometry

Literatura

[1] C.-K. Li, P. Šemrl, L. Plevnik, *Preservers of matrix pairs with a fixed inner product value*, članek v pripravi.

[2] L. Molnár, *Selected preserver problems on algebraic structures of linear operators and on function spaces*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 2007.

[3] Z. X. Wan, *Geometry of matrices*, World Scientific Publishing, Singapore 1996.

[4] C. A. Faure, *An Elementary Proof of the Fundamental Theorem of Projective Geometry*, Geom. Dedicata **90** (2002), 145–151.

[5] T. Tonev, A. Luttman, *Algebra isomorphisms between standard operator algebras*, Studia Math. **191** (2009), 163–170.

[6] L. Molnár, *Some characterizations of the automorphisms of $B(H)$ and $C(X)$*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 111–120.

[7] L. Molnár, *Fidelity preserving maps on density operators*, Rep. Math. Phys. **48** (2001), 299–303.

[8] N. V. Rao, A. K. Roy, *Multiplicatively spectrum-preserving maps of function algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), 1135–1142.

[9] J. Hou, Q. Di, *Maps preserving numerical ranges of operator products*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), 1435–1446.