

Povzetek

$\mathfrak{CAT}(0)$ prostori so poseben primer $\mathfrak{CAT}(\kappa)$ prostorov, ki so posplošili ukrivljenost z gladkih mnogoterosti na splošne geodezične metrične prostore. Tu je $\kappa \in \mathbb{R}$ parameter, ki podaja zgornjo mejo za ukrivljenost. V teh prostorih ukrivljenost testiramo s primerjavo geodezičnih trikotnikov s trikotniki v dvodimenzionalnih mnogoterostih konstantne ukrivljenosti κ , ki je v primeru $\kappa = 0$ evklidska ravnina \mathbb{R}^2 . Ta koncept so si neodvisno zamislili Aleksander Danilovič Aleksandrov, Élie Joseph Cartan ter Victor Andrejevič Toponogov v začetku dvajsetega stoletja, mnogo pa je k njegovemu razvoju doprinesel Mihail Leonidovič Gromov, ki je v čast utemeljiteljem tudi uvedel oznako \mathfrak{CAT} – črke C , A in T kot začetnice njihovih priimkov.

V delu bomo izpeljevali algebraične lastnosti „lepih“ podgrup izometrij $\mathfrak{CAT}(0)$ prostorov, toda z geometrijskega vidika. Natančneje, s poznavanjem geometrije $\mathfrak{CAT}(0)$ prostora, na katerem neka grupa deluje kokompaktno diskretno z izometrijami, bomo spoznali nekatere pomembne lastnosti te grupe. Obravnavali bomo končnostne lastnosti, rešljivost besednega in konjugiranostnega problema, lastnosti končnih, abelovih in rešljivih podgrup ter obravnavali Baumslag-Solitarjeve podgrupe. Neprestano bo prisotno prepletanje geometrije, topologije in algebri – iz dejstva, da prostor dopušča „lepo“ delovanje grupe z izometrijami, bomo izpeljevali topološke lastnosti prostora, te pa nam bodo nazaj vračale dejstva o grupi. V tem duhu bomo dokazali Cartan-Hadamardov izrek za metrične prostore nepozitivne ukrivljenosti.

Za konec bomo nakazali, da s teorijo $\mathfrak{CAT}(0)$ prostorov lahko opravimo tudi z nekaterimi klasičnimi izreki Riemannovih mnogoterosti ter s pomočjo Bieberbachovega izreka o diskretnih podgrupah izometrij evklidskih prostorov klasificirali ravne sklenjene kompaktne mnogoterosti.

Math. Subj. Class. (2010): 53C23, 53C70, 53C45, 20F65, 57M07.

Ključne besede: $\mathfrak{CAT}(0)$ prostori, geodezični trikotnik, kokompaktno diskretno delovanje, virtualno abelove in rešljive podgrupe, besedni in konjugiranostni problem, izoperimetrična neenakost, kvazi-izometrija, Cartan-Hadamardov izrek, Bieberbachov izrek.

Keywords: $\mathfrak{CAT}(0)$ spaces, geodesic triangle, cocompact proper action, virtually abelian and solvable subgroups, word and conjugacy problem, isoperimetric inequality, quasi-isometry, Cartan-Hadamard theorem, Bieberbach theorem.

Literatura

- [1] M. R. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 319. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [2] M. R. Bridson, *Non-positive curvature and complexity for finitely presented groups*. International Congress of Mathematicians. Vol. II, 961–987, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.
- [3] W. P. Thurston, *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*. Edited by Silvio Levy. Princeton Mathematical Series, 35. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.
- [4] L. Auslander, *An account of the theory of crystallographic groups*. Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 16, No. 6 (Dec. 1965), pp. 1230-1236.
- [5] A. Vince: *Periodicity, quasiperiodicity, and Bieberbach's theorem on crystallographic groups*. The American Mathematical Monthly, Vol. 104, No. 1 (Jan. 1997), pp. 27-35.
- [6] S. T. Yau, *On the fundamental group of compact manifolds of non-positive curvature*. Ann. of Math. (2) **93** (1971), 579–585.
- [7] H. B. Lawson, Jr. & S. T. Yau, *Compact manifolds of nonpositive curvature*. Journal of differential geometry, Vol. 7 NOS. 1 & 2 september 1972.
- [8] J. M. Lee: *Riemannian manifolds: An introduction to curvature*. Graduated texts in mathematics 176. 1997 Springer-Verlag, New York inc.
- [9] S. Gersten, *Introduction to hyperbolic and automatic groups*. Summer School in Group Theory in Banff, 1996, 45–70, CRM Proc. Lecture Notes, 17, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [10] J. J. Rotman: *An introduction to the theory of groups*. 4th edition. 1995 Springer-Verlag New York, Inc.