Povzetek

Naj bo F algebraično zaprt obseg karakteristike 0. S $C(m,n)$ označimo raznoterost komutirajočih m-teric kvadratnih matrik reda n nad obsegom F. V članku [4] je Gerstenhaber dokazal, da je raznoterost $C(2,n)$ nerazcepna in postavil vprašanje, za katere n je nerazcepna raznoterost $C(3,n)$. Holbrook in Omladič sta v članku [9] dokazala, da je raznoterost $C(3,n)$ nerazcepna natanko takrat, ko je množica trojic generičnih matrik (t. j. matrik z n različnimi lastnimi vrednostmi) gosta podmnožica raznoterosti $C(3,n)$ v topologiji Zariskega. S pomočjo tega rezultata sta dokazala, da je raznoterost $C(3,n)$ nerazcepna za $n \leq 5$, dokazala pa sta tudi, da je $C(3,n)$ razcepna raznoterost za $n \geq 30$. Z aproksimacijo z generičnimi matrikami sta Omladič in Han v člankih [7] oziroma [5] dokazala, da sta raznoterosti $C(3,6)$ in $C(3,7)$ nerazcepni.

V diplomskem delu bomo predstavili dokaz nerazcepnosti raznoterosti $C(3,n)$ za $n \leq 7$. V prvem poglavju se bomo seznanili s pojmi algebraične geometrije, ki jih bomo uporabljali pozneje. Definirali bomo raznoterosti in pokazali, da ustrezajo pogojem za zaprte množice neke topologije, ki ji pravimo topologija Zariskega. Definirali bomo tudi nerazcepnost raznoterosti. V drugem poglavju bomo spoznali osnovne lastnosti Jacobsonovega radikala, ki jih bomo uporabili v nadaljevanju. V tretjem poglavju bomo definirali raznoterost komutirajočih matrik. Dokazali bomo, da je raznoterost $C(3,n)$ nerazcepna natanko takrat, ko vsako trojico komutirajočih matrik lahko aproksimiramo z generičnimi matrikami, in natanko takrat, ko vsako trojico lahko aproksimiramo s trojico, v kateri je ena matrika 1-regularna. Nato si bomo ogledali primere, ko je kvadrat Jacobsonovega radikala algebre, generirane s trojico matrik, enak 0, ko ima ena od matrik le eno neničelno Jordanovo kletko in ko ima ena od matrik le dve Jordanovi kletki. Dokazali bomo, da take trojice lahko aproksimiramo s trojicami generičnih matrik. V četrtem poglavju bomo dokazali nerazcepnost raznoterosti $C(3,6)$ in $C(3,7)$. Trojice, ki jih nismo obravnavali v prejšnjem poglavju, bomo aproksimirali s trojicami, ki bodo elementi raznoterosti $\overline{G(3,6)}$ oziroma $\overline{G(3,7)}$. V petem poglavju bomo dokazali, da je množica trojic komutirajočih kvadratnih matrik reda n, ki skupaj z identiteto generirajo največ n-rezsežno algebro, raznoterost. Ker ta raznoterost vsebuje vse trojice generičnih matrik, za $n \leq 7$ vsebuje vso raznoterost $C(3,n)$.

Math. Subj. Class. (2000): 14-01, 15-01, 14M, 15A30
Ključne besede: raznoterost komutirajočih matrik, aproksimacija z generičnimi matrikami, algebra, generirana z matrikami.
Key words: variety of commuting matrices, approximation by generic matrices, algebra generated by matrices.

Literatura

[1] D. Cox, J. Little, D. O'Shea: Ideals, Varieties, and Algorithms, Springer-Verlag, 1997

[2] I. R. Shafarevich: Basic Algebraic Geometry 1, Springer-Verlag, 1994

[3] T. W. Hungerford: Algebra, Holt, Rinehart and Winston, 1974

[4] M. Gerstenhaber: On dominance and varieties of commuting matrices, Annals of Mathematics, 73 (1961), str. 324–348

[5] Y. Han: Commuting triples of matrices, Electronic Journal of Linear Algebra, 13 (2005), str. 274–343

[6] M. G. Neubauer, B. A. Sethuraman: Commuting pairs in the Centralizers of 2-regular matrices, Journal of Algebra, 214 (1999), str. 174–181

[7] M. Omladič: A variety of commuting triples, Linear Algebra and Applications, 383 (2004), str. 233–245

[8] R. Guralnick: A note on commuting pairs of matrices, Linear and Multilinear Algebra, 31 (1992), str. 71–75

[9] J. Holbrook, M. Omladič: Approximating commuting operators, Linear Algebra and Applications, 327 (2001), str. 131–149